

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P4-86-339

П.П.Физиев, Ц.Я.Физиева

**ТРАЕКТОРИИ КОЛЛИНЕАРНОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ  
ТРЕХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ  
С НУЛЕВЫМИ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИЕЙ И МОМЕНТОМ**

**1986**

## ВВЕДЕНИЕ

В результате редукции уравнений Гамильтона изучение динамики трехчастичной системы на неподвижной прямой при произвольных массах  $m_{1,2,3}$  и двухчастичном взаимодействии  $V_{ij} = \Gamma_{ij}^{-1}$  сводится к изучению уравнения для траектории  $\rho(\phi)^{1/}$ :

$$(\rho'/\rho)' - (1 + \rho'^2/\rho^2)^{1/2} \cdot (a' \rho'/2a\rho - E\rho/a \chi - E\rho/a)^{-1} = 0. \quad /1/$$

Здесь  $E$  - полная энергия системы,  $a \in [0, \infty)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  - модифицированные гиперсферические координаты Дельвеса <sup>/2,3/</sup>. В обозначениях работ <sup>/2,3/</sup>

$$a(\phi) = \epsilon \gamma(\phi) = \epsilon \sum_{k=1}^3 \gamma_k |\sin(\phi - \phi_{ij,k})|^{-1}. \quad /2/$$

В <sup>/4,5/</sup> показано, что случай  $E = 0$  полностью интегрируем в обобщенном смысле, так как в нем:

1/ Понижается до первого порядок дифференциального уравнения <sup>/1/</sup>, которое переходит в уравнение Абеля первого рода <sup>/6/</sup> для  $\mathcal{U} = \rho'/\rho$ :

$$\mathcal{U}' - (1/2)(1 + \mathcal{U}^2)[1 - \lambda(\phi)\mathcal{U}] = 0, \quad /3/$$

где  $\lambda = a'/a$ .

2/ Разделяются переменные в уравнении Гамильтона - Якоби для действия:  $W(\rho, \phi) = \sqrt{2\mu|\epsilon|\rho} f(\phi)$ , причем  $f(\phi) = 2\mathcal{U}\sqrt{|\gamma|/(1 + \mathcal{U}^2)}$ .

3/ Имеется дополнительный первый интеграл, не зависящий от времени явным образом.

4/ Инвариантное многообразие решений с  $E = 0$  диффеоморфно двумерному тору  $T_{\chi\phi}^{(2)} = S_{\chi}^{(1)} \times S_{\phi}^{(1)}$ , на котором уравнение <sup>/3/</sup> приобретает вид

$$\chi' = (1/2 - (1/2)\lambda \operatorname{tg} \chi), \quad /4/$$

где  $\chi(\phi) = \operatorname{arctg} \mathcal{U}(\phi)$ .

Зная траекторию  $\rho(\phi)$ , можно найти закон движения из

$$t - t_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \{ \mu \rho (\rho'^2 + \rho^2) [-2a(\phi)]^{-1} \}^{1/2}. \quad /5/$$

Отсюда видно, что в гравитационной задаче движение возможно при  $E = 0$  для любых  $\phi$ , так как  $\alpha(\phi) < 0$  для всех  $\phi \in [0, 2\pi]$  а в электрической задаче движение возможно в областях значений угла  $\phi$ , где  $\alpha(\phi) < 0$  /см. /3,7/.

В отличие от вполне интегрируемых по теореме Лиувилля - Арнольда гамильтоновых систем, уравнения первого порядка /3/, /4/ задачи трех частиц не интегрируются при помощи одной единственной квадратуры, а требуют их бесконечного числа /5/.

В настоящей работе мы изучим основные свойства специальных функций, определяемых уравнениями /3/, /4/. Они задают простейшие решения задачи трех частиц, которые не выражаются в элементарных функциях, и, по-видимому, не описаны в литературе /см., напр., /7,8/ /. Относительная простота этих решений объясняется топологическими соображениями: инвариантный тор  $T^2_{X\phi}$  есть подмногообразие бифуркационного многообразия классической задачи трех частиц /8,9/.

Как видно из /1/, предел  $E \rightarrow 0$  эквивалентен пределам  $|a| \rightarrow \infty$ , или  $\rho \rightarrow 0$ . Следовательно, изученные ниже решения задачи трех частиц на прямой можно использовать для приближенного описания движения с  $E \neq 0$ :

1/ вблизи парных столкновений, когда  $|a| \rightarrow \infty$ ;

2/ вблизи тройного удара, когда  $\rho \rightarrow 0$ , что было объектом самостоятельного исследования /10/.

Чтобы не загружать текст простыми изменениями, необходимыми для задачи с кулоновским взаимодействием, мы ограничимся здесь рассмотрением только гравитирующих ньютоновских частиц.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $\alpha(\phi)$ И ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ

Для изучения аналитических свойств решений необходимо устранить модули в /2/ при помощи аналитического продолжения /5/:

$|\sin(\phi - \phi_{ij,k})| \rightarrow [\sin^2(\phi - \phi_{ij,k})]^{1/2} = \pm \sin(\phi - \phi_{ij,k})$ . Знаки здесь следует выбирать по-разному в разных секторах  $(\phi_{ij,k}, \phi_{i,jk})$  так, чтобы  $\gamma(\phi)$  совпадала с соответствующей ветвью многозначной функции

$$\Gamma(\phi) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k [\sin^2(\phi - \phi_{ij,k})]^{-1/2} \quad /6/$$

Ввиду согласования знаков отдельных слагаемых в /6/ /3/, достаточно рассмотреть шестилистную поверхность Римана функции  $\Gamma(\phi)$ . На трех ее листах функция  $\Gamma(\phi)$  принимает существенно различные значения. На остальных трех меняется только общий знак функции  $\Gamma(\phi)$ , а их наличие отражает двукратность описания физически эквивалентных конфигураций системы в модифицированных координатах Дельвеса /3/. Ясно, что фазовое пространство системы есть шестилистная поверхность Римана.

Функция  $\Gamma(\phi)$  имеет 6 точек однозначности:  $\phi = \phi_{ij,k}$ ;  $\phi = \phi_{k,ij}$ . При их обходе в комплексной плоскости нет переходов с одного листа поверхности Римана на другой, поскольку эти точки не являются точками ветвления. Поэтому можно дальше ограничиться рассмотрением только одного такого листа, например, того, на котором  $\gamma(\phi) = \Gamma(\phi)$  для  $\phi \in (\phi_{23,1}, \phi_{3,12})$ . Результаты для других листов получаются путем перестановки индексов в общих формулах.

Определение: Сектор, в котором  $\gamma(\phi) = \Gamma(\phi)$ , назовем физическим сектором данного листа, а остальные - нефизическими секторами.

Дальше под  $\Gamma(\phi)$  мы будем понимать ветвь функции /6/ на выбранном нами листе, т.е. функцию

$$\Gamma(\phi) = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \gamma_k \sin^{-1}(\phi - \phi_{ij,k}) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{2k-1} \sin^{-1}(\phi - \phi_{2k-1}), \quad /7/$$

вид которой показан на рис.1. Здесь мы ввели новые обозначения для  $\phi_{ij,k}$ ,  $\phi_{k,ij}$  и  $\gamma_k$ :

$$\phi_1 = \phi_{23,1}, \quad \phi_3 = \phi_{3,12}, \quad \phi_5 = \phi_{31,2}, \quad \Gamma_{2k-1} = \gamma_k / k = 1, 2, 3 / \quad /8a/$$

к которым добавим и обозначение

$$\phi_2 = \phi_{31}^{(2)} \quad /8b/$$

для либрационного угла  $\phi_{ij}^{(k)}/3/$  физического сектора данного листа. Мы будем пользоваться этими обозначениями наряду со старыми.

Введем также и два новых угла  $\phi_{4,6}$  согласно формулам /8в/

$$2\phi_{4,6} = \arccos[(\gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \gamma_3 \cos(\Psi_2 - \Psi_1)] / A_{31}^{(2)}] \pm \arccos[(-\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 - \gamma_3 c_3) / A_{31}^{(2)}],$$

где на выбранном листе  $A_{31}^{(2)} = (c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + 4c_1 c_2 c_3 s_1 s_2 s_3)^{1/2}$ . Углы  $\phi_{4,6}$  лежат в нефизических секторах задачи, причем  $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \phi_4 < \phi_5 < \phi_6$  /см. рис.1/ \*

С учетом /2/, /6/, /7/ и /8а-в/ получаем, что

$$\Gamma(\phi) = A_{31}^{(2)} \sin(\phi - \phi_4) \sin(\phi - \phi_6) / \sin(\phi - \phi_1) \sin(\phi - \phi_3) \sin(\phi - \phi_5) \quad /9/$$

есть мероморфная функция на  $C_\phi^{(1)}$ .

В результате аналитического продолжения в уравнениях /3/ и /4/ функция  $\lambda(\phi)$  меняется на  $\Lambda(\phi)$ :

$$\Lambda(\phi) = \Gamma'(\phi) / \Gamma(\phi) = \Lambda(\phi) / B(\phi) = \sum_{k=1}^6 (-1)^k \operatorname{ctg}(\phi - \phi_k), \quad /10/$$

\* В кулоновской задаче с разными знаками зарядов нули  $\phi_{4,6}$  функции  $\Gamma(\phi)$  могут находиться в физических секторах /см. рис.1 из /3/ /.

где

$$A(\phi) = \sum_{k=1}^6 (-1)^k \sin(\phi - \phi_1) \dots \cos(\phi - \phi_k) \dots \sin(\phi - \phi_6), \quad /11a/$$

$$B(\phi) = \prod_{k=1}^6 \sin(\phi - \phi_k), \quad /11б/$$

а звезда означает, что при соответствующих операциях пропускается значение индекса  $k = 2$ .

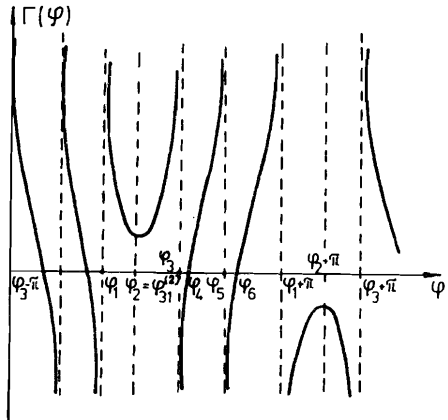


Рис.1. Вид аналитически продолженной функции  $\Gamma(\phi)$ .

## 2. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ПАРАМЕТР ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ /3/

С учетом /10/ и /11а,б/ уравнение /3/ записывается в виде аналитической системы

$$d\bar{U}/d\sigma = (1 + \bar{U}^2)[B(\phi) - A(\phi)\bar{U}], \quad d\phi/d\sigma = 2B(\phi). \quad /12/$$

Согласно теореме Коши, ее решение задается голоморфными функциями  $\bar{U}(\sigma)$ ,  $\phi(\sigma)$  регуляризирующего параметра

$$\sigma = \int d\phi [2B(\phi)]^{-1} = (1/2) \sum_{k=1}^6 \left\{ \prod_{n \neq k}^6 \sin(\phi_n - \phi_k) \right\} \ln \text{tg}[(\phi - \phi_k)/2]. \quad /13/$$

Таким образом, получаем

**Утверждение 1:** В окрестности любого начального условия  $\{\bar{U}_0, \phi_0, \sigma_0\} \in \mathbb{C}^{(3)}_{\bar{U}, \phi, \sigma}$  решение уравнения /3/ задается в параметрическом виде следующими рядами Тейлора, имеющими отличный от нуля радиус сходимости по  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}(\sigma; \bar{U}_0, \phi_0, \sigma_0) \\ \phi(\sigma; \bar{U}_0, \phi_0, \sigma_0) \end{pmatrix} = \exp[\Delta\sigma \vec{W}(\bar{U}_0, \phi_0)] \begin{pmatrix} \bar{U}_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad /14/$$

Здесь

$$\vec{W}(\bar{U}, \phi) = (1 + \bar{U}^2)[B(\phi) - A(\phi)\bar{U}] \partial \bar{U} + 2B(\phi) \partial \phi$$

есть автономное векторное поле, аналитическое на  $\mathbb{C}^{(2)}_{\bar{U}, \phi}$ .

## 3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ТРАЕКТОРИИ

Удобно продолжить изучение решений уравнения /3/ после его преобразования в рациональный вид. Подстановка  $U = \exp(i\phi)$  компактифицирует ось  $\mathbb{R}^{(1)}_{\phi}$  и переводит  $A(\phi)$ ,  $B(\phi)$  и  $V(\phi)$  в

$$A(U) = iP_5(U^2)/Q_5(U^2) = i \left\{ \sum_{k=1}^6 (-1)^k \left[ \frac{U_k}{U - U_k} - \frac{U_k}{U + U_k} \right] - 1 \right\}, \quad /15a/$$

$$P_5(U^2) = \sum_{k=1}^6 (-1)^k (U^2 - U_1^2) \dots (U^2 + U_k^2) \dots (U^2 - U_6^2), \quad /15б/$$

$$Q_5(U^2) = \prod_{k=1}^6 (U^2 - U_k^2), \quad /15в/$$

где  $U_k = \exp(i\phi_k)$ , а  $P_5$ ,  $Q_5$  есть полиномы пятой степени переменной  $U^2$ . В результате /3/ приобретает вид

$$d\bar{U}/dU = P(\bar{U}, U)/Q(\bar{U}, U) = (1 + \bar{U}^2)(Q_5 - i\bar{U}P_5)/2i\bar{U}Q_5, \quad /16/$$

который удобен для исследования особенностей решений /11-13/.

Из /16/ следует, что решения  $\bar{U}(U)$  не имеют существенно особых точек. Их конечные неподвижные особые точки можно найти из системы  $(1 + \bar{U}^2)[Q_5(U^2) - i\bar{U}P_5(U^2)] = 0$ ,  $UQ_5(U^2) = 0$ , а переход к переменным  $\bar{U}^{-1}$  и  $U^{-1}$  позволяет изучить поведение решений в бесконечных точках  $\bar{U} = \infty$  и  $U = \infty$ . В результате имеем

**Утверждение 2.** Уравнение /16/ имеет /с учетом их кратности/ 46 неподвижных особых точек на компактифицированном многообразии  $\bar{\mathbb{C}}^{(1)} \times \bar{\mathbb{C}}^{(1)}$ :

1/  $\bar{U} = 0, \pm U_1$ ;  $U = \pm U_k$ ;  $k = 1, 3, 4, 5, 6$

2/  $\bar{U} = i$ ,  $U = 0$  /двукратная/;  $\bar{U} = -i$ ,  $U = 0$ ;

3/  $\bar{U} = i$ ,  $U = \infty$ ;  $\bar{U} = -i$ ,  $U = \infty$  /двукратная/;

4/  $\bar{U} = \infty$ ,  $U = \pm U^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 5$ ;

где  $\pm U^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 5$  есть корни уравнения  $P_5(U^2) = 0$ .

Последние являются особыми точками либрационного типа. Из них только две лежат на окружности  $|U| = 1$  и соответствуют вещественным корням  $\phi_2, \phi_2 + \pi$  уравнения  $A(\phi) = 0$ .

Кроме описанных неподвижных особых точек, решения уравнения /16/ имеют подвижные особые точки.

Утверждение 3. Решения уравнения /16/ имеют на линии  $\bar{U} = \infty$  подвижные критические полюса вида

$$\bar{U}(\bar{U}; \bar{U}_0 = \infty, \bar{U}_0) = [\Lambda(\phi_0)(\bar{U} - \bar{U}_0)]^{-1/2} + O_1(\Delta \bar{U}),$$

где  $\phi_0 = -i \ln \bar{U}_0$ .

Доказательство получается исследованием решений после перехода к переменной  $\bar{U}^{-1}$  и отбрасывания членов высших порядков по  $\bar{U}^{-1}$  в /16/.

Утверждение 4. Решение уравнения /16/ записывается в окрестности любого начального условия при помощи сходящихся рядов Тейлора типа /14/ для голоморфных функций  $\bar{U}(w), \bar{U}(w)$ , регуляризирующего параметра

$$w(\bar{U}) = (1/4i) \sum_{k=1}^6 * [(U_1^2 - U_k^2) \dots U_k^2 \dots (U_6^2 - U_k^2)]^{-1} [\ln(1 - U_k^2 U^{-2}) + (1 + U_k^2 U^{-2})/2] / 17/$$

Доказательство сводится к применению теоремы Коши к аналитической системе

$$d\bar{U}/dw = (1 + \bar{U}^2)[Q_5(\bar{U}^2) - i\bar{U}P_5(\bar{U}^2)]; \quad d\bar{U}/dw = 2i\bar{U}Q_5(\bar{U}^2), \quad /18/$$

к которой сводится уравнение /16/, а параметр /17/ получается путем интегрирования последнего уравнения.

Отметим, что вид уравнения /16/ подтверждает правильность выбора угла  $\phi$  в качестве независимой переменной. При работе с  $\phi = 2\psi$  /что удобно для некоторых целей, см. /3/ и ссылки там/ мы пришли бы к дробно-степенной зависимости правой стороны уравнения /16/ от  $\bar{U} = \exp(i\phi)$ , для устранения которой пришлось бы строить поверхность Римана, т.е. вернуться к углу  $\phi$ .

#### 4. ТРАЕКТОРИИ НА ТОРЕ $\tau_{\chi\phi}^{(2)}$

Большое количество особых точек уравнения /16/ затрудняет изучение его решений. Те из них, которые являются особыми точками функции  $\chi = \text{arctg } \bar{U}$ , устраняются переходом к переменной  $X$ , т.е. к уравнению /4/ с функцией  $\Lambda(\phi)$  из /10/. Изучение уравнения /4/ удобно свести к исследованию аналитической системы

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} X \\ \phi \end{pmatrix} = \vec{X}(X, \phi) \begin{pmatrix} X \\ \phi \end{pmatrix}, \quad /19/$$

где  $\vec{X}(X, \phi)$  - автономное векторное поле, аналитическое на  $C_{X\phi}^{(2)}$

$$X(X, \phi) = [B(\phi) \cos \chi - A(\phi) \sin \chi] \partial \chi + 2B(\phi) \cos \chi \partial \phi. \quad /20/$$

К этой системе применимы все результаты /5/, где рассматривались задачи более общего класса. В частности, по теореме Коши можно написать сходящиеся в некоторой окрестности любого начального условия  $\{\chi_0, \phi_0, \tau_0\} \in C_{X\phi\tau}^{(3)}$  ряды Тейлора типа /14/ для ее решений  $\chi(\tau, \chi_0, \phi_0, \tau_0), \phi(\tau, \chi_0, \phi_0, \tau_0)$ . Однако теперь не удастся просуммировать ни один из этих рядов и получить конечные соотношения типа /13/ и /17/.

Приведем качественное исследование вещественных траекторий системы /19/ на торе  $\tau_{\chi\phi}^{(2)}$  /14, 15/. Вещественные нули коэффициентов векторного поля /20/ задают следующие особые точки:  $S_{k; n_1 n_2} / k = 1, \dots, 6; n_{1,2} \in \mathbb{Z} /:$

$$\phi_{k; n_1}^s = \phi_k + n_1 \pi; \quad \chi_{k; n_2}^s = n_2 \pi; \quad k = 1, 3, 4, 5, 6; \quad \chi_{2; n_2}^s = \pi/2 + n_2 \pi. \quad /21/$$

Утверждение 5. В окрестности точки  $S_{k; n_1 n_2}$  система /19/ имеет линеаризованный вид:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \phi \end{pmatrix} = (-1)^{n_1 + n_2} N_k \hat{D}_k \begin{pmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \phi \end{pmatrix}. \quad /22/$$

Здесь  $\Delta \chi$  и  $\Delta \phi$  - отклонения  $\chi$  и  $\phi$  от координат точки  $S_{k; n_1 n_2}$

$$N_k = \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^6 * \sin(\phi_k - \phi_\ell); \quad k = 1, 3, 4, 5, 6; \quad N_2 = - \prod_{\ell=1}^6 * \sin(\phi_2 - \phi_\ell); \quad /23/$$

$$\hat{D}_k = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad k = 1, 3, 4, 5, 6; \quad \hat{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \nu_2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad /24/$$

где  $\nu_2 = \nu(\phi_2)$  - значение в точке  $\phi = \phi_2$  функции

$$\nu(\phi) = \Gamma''(\phi)/\Gamma(\phi). \quad /25/$$

Доказательство получается линеаризацией векторного поля /20/ в окрестностях точек /21/.

Утверждение 6. В физическом секторе каждого листа поверхности Римана функции  $\Gamma(\phi)$  имеет место неравенство

$$\nu(\phi) > 1 + 2\Lambda^2(\phi). \quad /27/$$

Доказательство основано на равенстве

$$\nu - 1 - 2\Lambda^2 = \Gamma^{-2} \sum_{k=2}^3 [\Gamma_{2k-1} \sin^{-1}(\phi - \phi_{2k-1})][\Gamma_{2l-1} \sin^{-1}(\phi - \phi_{2l-1})][\operatorname{ctg}(\phi - \phi_{2k-1}) - \operatorname{ctg}(\phi - \phi_{2l-1})]^2;$$

которое получается после некоторых преобразований из /7/, /10/ и /25/. В нем правая сторона положительна, так как:

- 1/ для  $\phi \in (\phi_{23}, \phi_{31})$  все множители не равны нулю;
- 2/ первый и последний множители являются точными квадратами;
- 3/ второй и третий множители имеют положительные знаки в физическом секторе в силу определения функции  $\Gamma(\phi)$ .

Приведем значения  $\nu(\phi_{ij}^{(k)})$  для физических либрационных углов  $\phi_{ij}^{(k)}$  на разных листах поверхности Римана функции  $\Gamma(\phi)$ . Они получены с точностью  $O_1(\delta_{1,2,3})$  при трех характерных значениях масс  $m_{1,2,3}$  при помощи результатов из /3/:

- 1/ при  $m_{1,2,3} = m(1 + \delta_{1,2,3})$ ,  $|\delta_{1,2,3}| \ll 1$ :  $\nu(\phi_{23}^{(1)}) \approx \nu(\phi_{31}^{(2)}) \approx \nu(\phi_{12}^{(3)}) \approx 29/5$ ;
- 2/ при  $m_{1,2} = m(1 + \delta_{1,2})$ ,  $|\delta_{1,2}| \ll 1$ ;  $m_3 = m\delta_3^{-1}$ ,  $0 < \delta_3 \ll 1$ :  $\nu(\phi_{23}^{(1)}) \approx \nu(\phi_{31}^{(2)}) \approx 9$ ,  $\nu(\phi_{12}^{(3)}) \approx 3$ .
- 3/ при  $m_{1,2} = m(1 + \delta_{1,2})$ ;  $|\delta_{1,2}| \ll 1$ ;  $m_3 = m\delta_3$ ;  $0 < \delta_3 \ll 1$ :  $\nu(\phi_{23}^{(1)}) \approx 251/27$ ,  $\nu(\phi_{31}^{(2)}) \approx 17/8$ ,  $\nu(\phi_{12}^{(3)}) \approx 17$ .

С помощью стандартных вычислений получаем

**Утверждение 7.** Собственные значения  $D_k^\pm$  и собственные векторы  $|D_k^\pm\rangle$  матриц  $\hat{D}_k$  /25/ при  $k = 1, 3, 4, 5, 6$  есть

$$D_k^+ = 2, \quad |D_k^+\rangle = [6 + (-1)^k \ 4] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + (-1)^k \end{pmatrix}; \quad /27a/$$

$$D_k^- = (-1)^{k+1}, \quad |D_k^-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad /27б/$$

а при  $k = 2$

$$D_2^\pm = (1/2)(1 + \sqrt{1 + 8\nu_2}), \quad |D_2^\pm\rangle = [4 + (D_2^\pm)^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} D_2^\pm \\ 2 \end{pmatrix}. \quad /27в/$$

Из /26/ и /27а-в/ следует, что при  $k = 1, 3, 5$ :  $D_k^+ > 0$ , а при  $k = 2, 4, 6$ :  $D_k^- < 0 < D_k^+$ . Таким образом, имеем

**Следствие 1.** Особые точки  $S_{k;n_1 n_2}$  с нечетными  $k$  являются узлами, а с четными  $k$  - седловыми особыми точками векторного поля /20/.

**Следствие 2.** В соответствии с характеристикой Эйлера тора  $T_{X\phi}^{(2)}$  суммарный индекс векторного поля /20/ на нем равен 0. Фундаментальная область переменных  $\{\chi, \phi\} \in [-\pi, \pi] \times [\phi_1, \phi_1 + 2\pi)$  разбивается на четыре квадрата типа  $[0, \pi] \times [\phi_1, \phi_1 + \pi)$ . В них гео-

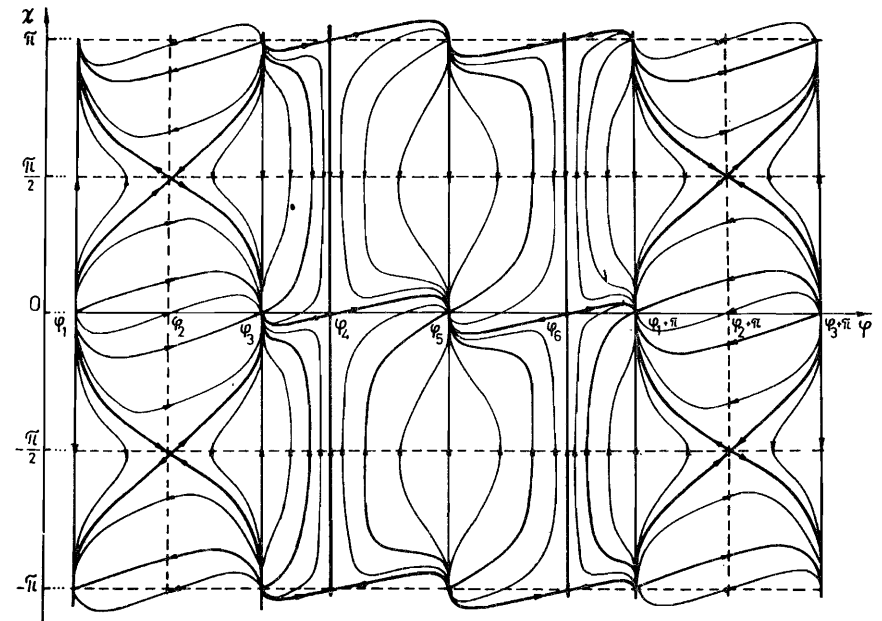


Рис.2. Фазовый портрет системы на торе  $T_{X\phi}^{(2)}$

метрическая картина интегральных кривых векторного поля /20/ повторяется с точностью направлений стрелок, зависящих от множителя  $-1/n_1 + n_2$  из /22/. В каждом таком квадрате имеется три узла и три седловых точки, а на всем  $T_{X\phi}^{(2)}$  - 24 особых точки. Характер этих точек и все возможные типы траекторий системы /19/ на  $T_{X\phi}^{(2)}$  показаны на рис.2. Для полного доказательства этой картины необходимо исследовать глобальные свойства решений.

Обозначим через  $\chi_k^\pm(\phi)$  интегральную кривую через точку  $S_{k;n_1 n_2}$ , тангенциальную к вектору  $|D_k^\pm\rangle$ , а через  $\chi(\phi; \Lambda_0)$  - изоклины  $^{15/}$  векторного поля /20/:

$$\chi(\phi; \Lambda_0) = \operatorname{arccotg}[\Lambda(\phi)/\Lambda_0], \quad /28/$$

где  $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^{(1)}$  есть произвольный параметр.

**Утверждение 8.** Решения  $\chi_k^\pm(\phi)$  имеют показанный на рис.2 вид.

Приведем подробное доказательство для решений из физического сектора:

А. Сепаратриса  $\chi_2^-(\phi)$  проходит через седло  $S_{2;00}$  указанным на рис.3 способом по отношению к изоклине нулевого наклона  $\chi(\phi; 1) = \operatorname{arccotg} \Lambda(\phi)$ , так как, согласно /27в/,  $\chi_2^-(\phi_2) = D_2^-/2 > -\nu_2 = \chi(\phi_2; 1)$ . Для всех  $\phi \in (\phi_2, \phi_3)$  имеем  $\chi'(\phi; 1) < 0$ . Тогда предположение о том, что  $\chi_2^-(\phi)$  может иметь общую точку с  $\chi(\phi; 1)$  для некоторого значения

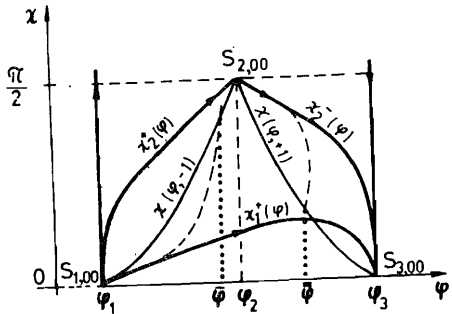


Рис.3. Решения в физическом секторе.

$\bar{\phi} \in (\phi_2, \phi_3)$ , приводит к противоречию, так как в ближайшей к  $\phi_2$  такой точке сепаратриса подходила бы к изоклине сверху /см. пунктир на рис.3/, т.е.  $|\chi_2^-(\bar{\phi})| \geq |\chi^-(\bar{\phi}; 1)|$ , а по определению изоклины  $\chi(\phi; 1)$  следовало бы, что  $\chi_2^-(\bar{\phi}) = 0$ .

С другой стороны, сепаратриса  $\chi_2^-(\phi)$  монотонно убывает на  $(\phi_2, \phi_3)$  и может достичь вертикали  $\phi = \phi_3$ , которая также есть решение системы /19/, только в особой точке, причём  $\chi_2^-(\phi_3) = -\infty$ .

Из этих двух обстоятельств следует, что  $\chi_2^-(\phi)$ , выходя из  $S_{2;00}$ , монотонно убывает и касается вертикали  $\phi = \phi_3$  в точке  $S_{3;00}$ .

Б. Решение  $\chi_1^+(\phi)$  имеет разложение в ряд по  $\Delta\phi = \phi - \phi_1$

$$\chi_1^+(\phi) = \Delta\phi - (1/3)(s_2^2/s_1^2 s_3^2)(s_1/c_1)\Delta\phi^2 + O_3(\Delta\phi). \quad /29a/$$

Оно показывает, что  $\chi_1^+(\phi)$  проходит в окрестности узла  $S_{1;00}$  ниже изоклины  $\chi(\phi; -1) = \Delta\phi + O_3(\Delta\phi)$ , с которой  $\chi_1^+(\phi)$  имеет касание первого порядка в точке  $S_{1;00}$ . Предположение о том, что  $\chi_1^+(\phi)$  может пересечь изоклину  $\chi(\phi; -1)$  в некоторой точке  $\bar{\phi} \in (\phi_1, \phi_2)$  /см. пунктир на рис.3/, противоречит неравенству /26/, так как из определения изоклины  $\chi(\phi; -1)$  тогда следовало бы, что  $\chi_1^+(\bar{\phi}) = 1 \geq \chi^-(\bar{\phi}; -1) = [\nu(\bar{\phi}) - \Lambda^2(\bar{\phi})]/[1 + \Lambda^2(\bar{\phi})]$ , т.е.  $\nu(\bar{\phi}) \leq 1 + 2\Lambda^2(\bar{\phi})$ . Отсюда ясно, что решение проходит ниже седла  $S_{2;00}$  при  $\phi = \phi_2$ , и, будучи ограниченной сепаратрисой  $\chi_2^-(\phi)$ , дальше идет в узел  $S_{3;00}$ , достигая максимума при пересечении изоклины  $\chi(\phi; 1)$ .

В. Сепаратриса  $\chi_2^+(\phi)$  проходит через седло  $S_{2;00}$  указанным на рис.3 способом по отношению к изоклине  $\chi(\phi; -1)$ , поскольку из /26/, /27в/ и /28/ следует, что  $\chi_2^+(\phi_2) = D_2^+ / 2 < \nu_2 = \chi^-(\phi_2, -1)$ . Из /4/ видно, что для  $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$  имеем  $\chi_2^+(\phi) > 0$ , так как в области  $\{\chi, \phi\} \in [0, \pi/2] \times [\phi_1, \phi_2]$  не проходит нулевая изоклина  $\chi(\phi; 1)$ . Тогда при уменьшении  $\phi$  от  $\phi_2$  до  $\phi_1$  точка на  $\chi_2^+(\phi)$  движется монотонно вниз от  $\chi = \pi/2$  до  $\chi = 0$ . Сепаратриса  $\chi_2^+(\phi)$  касается сверху вниз вертикали  $\phi = \phi_1$  в единственной на этом участке особой точке  $S_{1;00}$ . Она не может обойти  $S_{1;00}$  или подойти к ней снизу вверх, так как в таком случае сепаратриса  $\chi_2^+(\phi)$  пересекла бы решение  $\chi_1^+(\phi)$ , что противоречит теореме единственности решений для системы /19/.

Рассмотрение остальных решений  $\chi_k^\pm$  в нефизических секторах проводится при помощи аналогичных приемов. Отметим разложения

$$\chi_3^+(\phi) = \Delta\phi + (1/3)(s_2^2/s_1^2 s_3^2)(s_3/c_3)\Delta\phi^3 + O_3(\Delta\phi), \quad /29б/$$

$$\chi_5^+(\phi) = \Delta\phi + (1/3)(s_2^2/s_1^2 s_3^2)[\sin(\Psi_3 - \Psi_1)/c_2]\Delta\phi^2 + O_3(\Delta\phi) \quad /29в/$$

соответственно по  $\Delta\phi = \phi - \phi_3$  и  $\Delta\phi = \phi - \phi_5$ , аналогичные разложению /29а/.

**Утверждение 9.** При любых начальных условиях  $\{\chi_0, \phi_0, \tau_0\} \in R_{\chi\phi}^{(3)}$  решение  $\chi(\tau; \chi_0, \phi_0, \tau_0)$ ,  $\phi(\tau; \chi_0, \phi_0, \tau_0)$  системы /19/ продолжаемо до всех  $\tau \in R_\tau^{(1)}$ .

**Доказательство.** Правая сторона в /19/ не зависит от  $\tau$ . Она задана аналитическими функциями, которые, согласно /20/, ограничены по модулю на всей плоскости  $R_{\chi\phi}^{(2)}$  и удовлетворяют условию Липшица. Тогда по теореме Пикара - Линделефа /16/ решение системы /19/ единственно и вещественно аналитично для всех  $\tau \in R_\tau^{(1)}$ .

**Следствие 3.** Любая нестационарная траектория системы /19/ на  $T_{\chi\phi}^{(2)}$  выходит при  $\tau \rightarrow -\infty$  из некоторой особой точки  $S_k; n_1 n_2$ , а при  $\tau \rightarrow +\infty$  входит в некоторую соседнюю точку  $S_k; n_1 n_2$ .

**Доказательство** следует из продолжаемости и единственности траекторий на  $T_{\chi\phi}^{(2)}$  /см. /17/.

## 5. ВИД ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА $I(\chi, \phi)$ СИСТЕМЫ /19/

Автономная система /19/ имеет не зависящий от  $\tau$  первый интеграл  $I(\chi, \phi) = \text{const}$ , который задает в неявном виде решения уравнения /4/, и есть интеграл уравнения /3/, записанный в переменных тора  $T_{\chi\phi}^{(2)}$ . Его вид в вертикальных или горизонтальных плоскостях между особыми точками  $S_k; n_1 n_2$  можно определить, применяя утверждения из /5/ при значении параметра  $\omega = 1/2$  /см. /5/.

**Утверждение 9.** Как функция переменных  $I_0 = \sqrt{|\gamma(\phi)|} \sin \chi$  и  $\phi$ , первый интеграл  $I(\chi, \phi)$  системы /19/ задан рядом

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/2)^k \int_{\bar{\phi}}^{\phi} d\phi_k \dots \int_{\bar{\phi}}^{\phi_2} d\phi_1 \prod_{\ell=1}^k \sqrt{|\dot{\gamma}(\phi)| - I_0^2 \partial_{I_0}} I_0. \quad /30/$$

который сходится в интервале  $[\phi, \phi] \subset (\phi_1, \phi_{i+1}) / i = 1, \dots, 5/$  при  $0 \leq I_0^2 < m$ , если

$$\Delta\phi \sqrt{m} \leq (8/\sqrt{3}) [\arctg \sqrt{3(m - \sqrt{m - I_0^2}) / (m + \sqrt{m - I_0^2})} - \pi/3] + 2 \arccos(|I_0|/\sqrt{m}),$$

где  $0 < m = \min_{\phi \in [\bar{\phi}, \phi]} |\gamma(\phi)| < M = \max_{\phi \in [\bar{\phi}, \phi]} |\gamma(\phi)| < \infty$ .

**Утверждение 10.** Интеграл  $I(\chi, \phi)$  системы /19/ задается рядом Фурье:

$$I(\chi, \phi) = (\sqrt{|y|}/2) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} I_k(\phi) \exp[i(2k-1)(\chi - \phi/2)] \right\}, \quad /31/$$

где  $I_0(\phi) = 1$ , а при  $k > 0$  в интервале  $(\phi_i, \phi_{i+1}) / i = 1, \dots, 5/$  имеем:

$$I_k = (-y)^{-k} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi_k e^{i\phi_k} \gamma^{2k-2} (\phi_k) \frac{d}{d\phi_k} \left[ \gamma^{-2k+3} (\phi_k) \int_{\phi_0}^{\phi_k} d\phi_{k-1} \dots \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi_1 e^{i\phi_1} \frac{d}{d\phi_1} \gamma(\phi_1) \right].$$

Ряд /31/ сходится абсолютно и равномерно по  $\phi$ , по меньшей мере при  $\operatorname{Im} \chi > \ln \sqrt{3}$ . Он задает функцию  $I(\chi, \phi)$ , которую можно продолжить аналитически в  $\mathbb{C}_{\chi}^{(1)}$  до всех точек на  $\mathbb{R}_{\chi}^{(1)}$  за исключением особых точек  $\chi_{k;n_2}$  /21/.

Поведение первого интеграла системы /19/ в окрестностях особых точек  $S_{k;n_1 n_2}$  можно изучить при помощи системы /22/. Исключая  $\Delta \tau$  из ее решений  $\Delta \chi(\Delta \tau; \Delta \chi_0, \Delta \phi_0), \Delta \phi(\Delta \tau; \Delta \chi_0, \Delta \phi_0)$ , получаем

Утверждение 11. В окрестности особой точки  $S_{k;n_1 n_2}$  интеграл системы /19/ принимает вид

$$(-1)^{n_1+n_2} [(N_k D_k^+)^{-1} \ln(R_{(k)11} \Delta \chi + R_{(k)12} \Delta \phi) + (N_k D_k^-)^{-1} \ln(R_{(k)21} \Delta \chi + R_{(k)22} \Delta \phi)] = \text{const},$$

где  $R_{(k)ij}$  - элементы матрицы  $\hat{R}_{(k)}$ , столбцами которой являются векторы  $D_k^{\pm}$  из /27а-в/.

Доказательство. При помощи  $\hat{R}_{(k)}$  матрица  $\hat{D}_k$  приводится в диагональный вид  $\hat{R}_{(k)} \hat{D}_k \hat{R}_{(k)}^{-1} = \text{diag} \{D_k^+, D_k^-\}$ , после чего исключение параметра  $\Delta \tau$  из решений системы /19/ проводится легко.

Следствие 4. Особые точки  $S_{k;n_1 n_2}$  являются логарифмическими точками ветвления первого интеграла системы /19/, который есть бесконечнозначная функция на  $\mathbb{C}_{\chi\phi}^{(2)}$ .

Утверждение 12. Решения задачи трех частиц имеют критическую существенно особую точку по каждой из масс  $m_{1,2,3}$ .

Доказательство основано на разложении решений в бесконечные ряды по  $m_1^{-1/2}$ , появление которых связано с формулой  $\mu = \sqrt{m_1 m_2 m_3 / (m_1 + m_2 + m_3)}$ , для приведенной массы трехчастичной системы /см. /1-3/ /. Для разных форм решений оно проводится по разному с учетом соотношений  $\sin(\phi_n - \phi_k) \sim s_1 - m_1^{1/2}$  при  $n, k = 1, 2, 3 / 1, 3/$ . Для разложения решений /29а-в/ доказательство очевидно. Для решений /12/ и /18/ оно следует из голоморфной зависимости решений от параметров /13/ и /17/ соответственно. Для первого интеграла  $I(\chi, \phi)$  доказательство можно получить обращением рассмотренных рядов или при помощи представлений /30/, /31/, а также из разложений типа /32/ с учетом /23/, /25/ и /27а-в/.

Этот результат согласуется полностью с работой /18/ и вместе со следствием 4 объясняет происхождение отрицательных результатов Пуанкаре /19/ при поиске дополнительного однозначного первого интеграла в задаче трех тел, для которого требовалась аналитичность в окрестностях точек  $m_{1,2,3} = 0$  по массам частиц.

Следствие 5. Применение теории возмущений по малой массе в задаче трех частиц приводит к сингулярной теории возмущений.

В заключение отметим, что решения уравнения /4/ имеют дополнительные особенности на линиях  $\chi = \chi_{2,n_2} = \pi(n_1 + 1/2)$  в  $\mathbb{R}_{\chi\phi}^{(2)}$  по отношению к решениям системы /19/ /15/. Для получения фазового портрета уравнения /4/ следует изменить направления стрелок на рис.2 в соответствии со знаком выражения  $B(\phi) \cos \chi$ .

Для получения траекторий системы трех частиц в обычном координатном пространстве нужно дополнительно исследовать  $\rho(\phi) = \rho_0 \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \operatorname{tg} \chi(\phi)$ , а также продолжение решений уравнения /4/ при прохождении их через особые точки, что мы сделаем в другой работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Физиев П.П., Физиева Ц.Я. ОИЯИ, P2-86-131, Дубна, 1986.
2. Delves L.M. Nucl.Phys., 1959, 9, p.391; 1960, 20, p.275.
3. Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya. JINR, 2-86-119, Dubna, 1986; P2-86-130, Дубна, 1986.
4. Fiziev P.P. JINR, E4-86-227, Dubna, 1986.
5. Fiziev P.P. JINR, E4-86-325, Dubna, 1986.
6. Kamke E. Differential gleichungen. B.G.Teubner, Studgart, 1977, v.1.
7. Hagihara Y. Celestial Mechanics. MIT Press, Cambridge - Massachusetts - London, 1971, vol.3-5; Tokyo Press, 1976.
8. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Итоги науки и техники, сер. "Современные проблемы математики". Изд-во АН СССР, М., 1985, т.3.
9. Smale M. Invent.Math., 1970, 10, p.305.
10. Mc Gehee. Invent.Math., 1974, 27, p.191.
11. Айнс Е.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Харьков, 1939.
12. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ОНТИ, М.-Л., 1941.
13. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Итоги науки и техники, сер. "Современные проблемы математики". Изд-во АН СССР, М., 1985, т.1.
14. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. "Наука", М., 1985.



15. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. "Наука", М., 1976.
16. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Мир", М., 1970.
17. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Наука", М., 1984.
18. Cherry T.M. Proc. Cambridge Phil.Soc., 1924, 24, p.287.
19. Пуанкаре А. Избранные труды. "Наука", М., 1971, т.1,2.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Рукопись поступила в издательский отдел  
28 мая 1986 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Физиев П.П., Физиева Ц.Я.

P4-86-339

Траектории коллинеарной ньютоновской трехчастичной системы с нулевыми полной энергией и моментом

Изучены основные свойства класса специальных функций, задающих траектории задачи трех классических частиц. Найдены их особые точки во всей комплексной области значений переменных: 46 неподвижных особых точек /с учетом их кратности/, и подвижные критические полюса. В вещественной области многообразия решений диффеоморфно двумерному тору, на котором имеются 24 особые неподвижные точки. Построена качественная теория траекторий и глобальный фазовый портрет на торе. Найдены два типа представлений дополнительного интеграла задачи в рассматриваемом случае и показано, что он есть бесконечнозначная функция. Установлено, что решения имеют критическую существенно особую точку в нуле по каждой из масс частиц. Это показывает сингулярный характер теории возмущений по малой массе в задаче трех частиц в соответствии с результатами Пуанкаре и др.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya.

P4-86-339

Trajectories of the Collinear Newton Three-Particle System with Zero Total Energy and Total Momentum

The case of zero total energy and total momentum in the problem of three classical particles on a straight line is completely integrable in a generalized sense. The basic properties of the class of special functions giving the problem trajectories are studied. Singular points are found in the complex range of variable values: 46 fixed singular points (taking into account their multiplicity) and moving critical poles. In the real region a variety of solutions is diffeomorphic to a two-dimensional torus on which 24 singular fixed points are placed. A qualitative theory of trajectories and a global phase picture on a torus are constructed. Two types of representations of an additional problem integral are found in the case considered and it is shown to be an infinite-valued function. It is established that the solutions have a critical essential singular point at zero for every particle mass, which indicates a singular nature of perturbation theory in small mass in the three-particle problem according to the Poincaré results and others.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986