

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



B-126

14/10-75

P4 - 8597

1381/2-75

Г.М.Ваградов, Ф.А.Гареев

О ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

**1975**

P4 - 8597

Г.М.Ваградов,\* Ф.А.Гареев

О ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

*Направлено в Physics Letters*

---

\* Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Известно, что микроскопические расчеты энергии основного состояния ядер наталкиваются на принципиальные трудности, связанные как с общей квантовомеханической проблемой многих тел, так и со сложными вопросами определения ядерных взаимодействий. С другой стороны, хорошо разработанная модель оболочек не дает разумных результатов для полной энергии связи. Это объясняется тем, что оболочечное среднее поле выбирается на основании экспериментальных данных о низких возбуждениях, а в энергию связи входят и глубокие "дырочные" состояния. Последние соответствуют относительно высоким возбуждениям ядер, когда существенную роль играют коррелятивные взаимодействия между квазичастицами. Следовательно, такие "дырочные" возбуждения уже нельзя считать независимыми от состояний остальной системы, как это предполагается в модели оболочек. Особенно яркое подтверждение этому дают реакции квазиупругого выбивания нуклонов: наблюдаемая картина расположения уровней находится в явном противоречии с предсказаниями оболочечной модели.

Действительно, на опыте оказалось, что глубокие "дырочные" уровни лежат гораздо ниже оболочечных и обладают значительными ширинами. Заметим, что аналогичная картина наблюдается в реакциях  $(d, p)$  с возбуждением высоколежащих "частичных" уровней конечного ядра <sup>1</sup>. Для описания таких опытов по аналогии с оптическим потенциалом необходимо вводить зависящее от энергии комплексное среднее поле и для "дырочных" возбуждений, как это было впервые предложено в работе <sup>2</sup>. В последние годы был

достигнут заметный прогресс в понимании механизма квазиупругого выбивания нуклонов и структуры дырочных состояний  $3-10$ . Можно утверждать, что для полного количественного описания с помощью оптического потенциала в настоящее время еще не имеется достаточно точных экспериментальных данных. Очевидно, что при вычислении полной энергии связи ядер следует учитывать отмеченные выше особенности наблюдаемого спектра дырочных возбуждений: опускание глубоких дырочных уровней по сравнению с оболочечными и наличие у них ширин. Эти особенности указывают на существенную роль коррелятивных взаимодействий, и поэтому они должны привести к заметному улучшению результатов, получаемых в модели оболочек. Однако это обстоятельство обычно не учитывалось (см. монографию Г.Бете <sup>II</sup> и ссылки в ней).

В настоящей работе используются методы полевой теории многих тел, что позволяет установить общие связи между различными наблюдаемыми величинами, а затем после ряда упрощений перейти к феноменологии.

Рассмотрим одночастичную функцию Грина для основного состояния ядра из  $A$  нуклонов:

$$G(x, x', \varepsilon) = \langle \psi_x \frac{1}{\varepsilon - H + E_c + i\alpha} \bar{\psi}_{x'} \rangle + \langle \bar{\psi}_{x'} \frac{1}{\varepsilon - H - E_c - i\alpha} \psi_x \rangle, \quad (1)$$

$$(H | = E_c |),$$

где  $\bar{\psi}_x$  и  $\psi_x$  - операторы рождения и уничтожения нуклонов,  $x$  - совокупность их пространственных ( $\vec{r}$ ), спиновых ( $\sigma$ ) и изоспиновых ( $\tau$ ) координат. Эта функция удовлетворяет уравнению Дайсона:

$$\begin{aligned}
 (\epsilon - T_x - M(x, \epsilon)) \mathcal{G}(x, x', \epsilon) &= \delta(x - x'), \\
 (M(x, \epsilon) &\equiv \int dx' M(x, x', \epsilon) \varphi(x')),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $M$  - массовый оператор. Для полного гамильтониана  $H$ , содержащего только парные взаимодействия <sup>1)</sup>:

$$H = \int dx \bar{\psi}_x T_x \psi_x + \frac{1}{2} \int dx dx' \bar{\psi}_x \bar{\psi}_{x'} U(x, x') \psi_{x'} \psi_x,
 \tag{3}$$

массовый оператор определяется соотношением

$$M(x, \epsilon) \mathcal{G}(x, x', \epsilon) = \langle u_x \psi_x \frac{1}{\epsilon - H + \epsilon_0 + i0} \bar{\psi}_{x'} \rangle + \langle \bar{\psi}_{x'} \frac{1}{\epsilon + H - \epsilon_0 - i0} u_x \psi_x \rangle;
 \tag{4}$$

$$u_x = \int dx' \bar{\psi}_{x'} U(x, x') \psi_{x'}.$$

Спектральное представление функции  $\mathcal{G}$  записывается через полные ортонормированные системы векторов стационарных состояний  $\Psi_\nu$  и  $\Phi_\lambda$  ядер соответственно из  $A+1$  и  $A-1$  нуклонов:

$$\mathcal{G}(x, x', \epsilon) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(x) \bar{\psi}_\nu(x')}{\epsilon - \epsilon_\nu + i0} + \sum_\lambda \frac{\Phi_\lambda(x) \Phi_\lambda^+(x')}{\epsilon - \epsilon_\lambda - i0},
 \tag{5}$$

$$\psi_\nu(x) = \langle \psi_x \Psi_\nu \rangle; (H - \epsilon_0) \Psi_\nu = (\epsilon_\nu(A+1) - \epsilon_0) \Psi_\nu = \epsilon_\nu \Psi_\nu; \epsilon_\nu = \mathcal{M}_+ + \mathcal{f}_\nu (\mathcal{f}_\nu > 0);$$

$$\Phi_\lambda(x) = \langle \Phi_x \psi_x \rangle; (H - \epsilon_0) \Phi_\lambda = (\epsilon_\lambda(A-1) - \epsilon_0) \Phi_\lambda = -\epsilon_\lambda \Phi_\lambda; \epsilon_\lambda = \mathcal{M}_- - \mathcal{f}_\lambda (\mathcal{f}_\lambda > 0),
 \tag{6}$$

где суммы по  $\nu$  и  $\lambda$  обозначают как суммирование по дискретному так и интегрирование по сплошному спектрам. При этом функции  $\psi_\nu(x)$  и  $\Phi_\lambda(x)$  отличны от нуля, вообще говоря, для любых состояний  $\nu$  и  $\lambda$ , не являются ортонормированными и не образуют полной системы, но удовлетворяют условиям:

1) Мы ограничились случаем парных взаимодействий только из соображений простоты изложения: рассмотрение более сложных сил не изменит наших результатов.

$$\sum \psi_n(x) \psi_n^*(x') + \sum \varphi_n(x) \varphi_n^*(x') = \delta(x-x'); \quad \sum \varphi_n(x) \varphi_n^*(x) = \langle \bar{\psi}_n \psi_n \rangle = \rho(x). \quad (7)$$

Только в предельном случае модели оболочек  $\psi_n(x)$  и  $\varphi_n(x)$  переходят в ортонормированные волновые функции частиц и дырок.

Из (1), (3) и (4) следует, что энергия основного состояния ядра из  $A$  нуклонов может быть представлена в виде:

$$E_0 = \langle H \rangle = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} \int dx dx' \left\{ \delta(x-x') T_x + \frac{1}{2} M(x, x', \varepsilon) \right\} G(x, x', \varepsilon), \quad (8)$$

где интегрирование по  $\varepsilon$  проводится по замкнутому контуру в верхней полуплоскости комплексных значений  $\varepsilon$ . С учетом (2) и (5) это выражение может быть записано и в другой форме:

$$E_0 = \int_m \sum_n \int_{-\infty}^m \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_n - i\alpha} \operatorname{Re} \int dx dx' \varphi_n^*(x) \left\{ \varepsilon \delta(x-x') - \frac{1}{2} M(x, x', \varepsilon) \right\} \varphi_n(x'). \quad (9)$$

Преобразуем это соотношение таким образом, чтобы в него вошли наблюдаемые величины. Для этого рассмотрим задачу на собственные значения для одночастичного движения в потенциале  $M$ , зависящем от  $\varepsilon$ , как от параметра:

$$(T_x + M(x, \varepsilon)) \varphi_n(x, \varepsilon) = E_n(\varepsilon) \varphi_n(x, \varepsilon), \quad (10)$$

где индекс  $n$  обозначает совокупность квантовых чисел, определяющих состояние частиц в потенциальной яме. Предполагая, что собственные функции  $\varphi_n(x, \varepsilon)$  образуют полную ортонормированную систему, пропагатор  $G(x, x', \varepsilon)$  можно записать в диагональной форме:

$$G(x, x', \varepsilon) = \sum_n \frac{\varphi_n(x, \varepsilon) \varphi_n^*(x', \varepsilon)}{\varepsilon - E_n(\varepsilon) \pm i\alpha}. \quad (11)$$

Для значений  $\mathcal{E}$ , лежащих в области дискретного спектра  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_+$  и  $\mathcal{E}_\lambda \in \mathcal{M}_-$ , массовый оператор действителен, а, следовательно, действительными будут и собственные значения  $\mathcal{E}_n(\mathcal{E})$ . Из сравнения (II) со спектральным представлением (5) вытекает, что истинные уровни энергии  $\mathcal{E}_\lambda$  и  $\mathcal{E}_\nu$  будут определяться уравнениями:

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{E}) = \mathcal{E}; \quad (\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda, \nu}). \quad (12)$$

При этом возможны два типа решений: 1) существуют корни  $\mathcal{E}$ , которые удовлетворяют только одному из этих уравнений при заданном  $n$ , т.е. имеется однозначное соответствие между наборами квантовых чисел  $n$  и  $\lambda$  или  $\nu$ ; 2) корни двух или более уравнений (12) с различными  $n$  совпадают. Можно сказать, что первый тип решений определяет одночастичную ветвь спектра возбуждений ядер из  $A \pm 1$  нуклонов, а второй - многочастичную.

На основе (5), (II) и (12) можно записать для дискретного спектра:

$$\varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda^+(x') = \sum_n \left( \delta_{\mathcal{E}, \mathcal{E}_n(\mathcal{E})} \frac{\varphi_n(x, \mathcal{E}) \varphi_n^+(x', \mathcal{E})}{1 - \frac{\partial \mathcal{E}_n(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}}} \right)_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda}. \quad (13)$$

Из физических соображений ясно, что в области непрерывного спектра ядер из  $A \pm 1$  нуклонов массовый оператор должен быть комплексным. Для дырочных возбуждений возникновение мнимой части связано с возможностью распада в непрерывный спектр, например, с вылетом одного из  $A-1$  нуклонов ядра. Такому затуханию дырочного состояния будет соответствовать положительная мнимая часть массового оператора и в результате для  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_-$  выражение (II)

можно записать в виде:

$$G(x, x'; \mathcal{E}) = \sum_n \frac{\varphi_n(x, \mathcal{E}) \varphi_n^+(x', \mathcal{E})}{\mathcal{E} - E_n(\mathcal{E}) - \frac{i}{2} \Gamma_n(\mathcal{E})}, \quad (14)$$

где мы положили:

$$\begin{aligned} E_n(\mathcal{E}) &= E_n(\mathcal{E}) + \frac{i}{2} \Gamma_n(\mathcal{E}); \\ E_n(\mathcal{E}) &= \text{Re} \int dx dx' \varphi_n^+(x, \mathcal{E}) M(x, x', \mathcal{E}) \varphi_n(x', \mathcal{E}) = \text{Re} M_{nn}(\mathcal{E}); \\ \Gamma_n(\mathcal{E}) &= 2 \text{Im} M_{nn}(\mathcal{E}). \end{aligned} \quad (15)$$

Эти выражения справедливы и для дискретного спектра  $\mathcal{E}_A$ , если учесть, что для него  $\frac{i}{2} \Gamma_n(\mathcal{E}) \rightarrow i\alpha$ .

Подставляя (14) в (9), получим для энергии основного состояния

$$E_0 = \sum_n \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\mathcal{E}}{2\mathcal{F}} \frac{(\mathcal{E} - \frac{i}{2} \text{Re} M_{nn}(\mathcal{E})) \Gamma_n(\mathcal{E})}{(\mathcal{E} - E_n(\mathcal{E}))^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2(\mathcal{E})}. \quad (16)$$

Из (1), (7) и (14) следует соотношение для полного числа частиц:

$$N = \int_m \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\mathcal{E}}{2\mathcal{F}} \int dx G(x, x, \mathcal{E}) = \sum_n \int dx \varphi_n^+(x) \varphi_n(x) = \sum_n \int_{-\infty}^{\mu} \frac{d\mathcal{E}}{2\mathcal{F}} \frac{\Gamma_n(\mathcal{E})}{(\mathcal{E} - E_n(\mathcal{E}))^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2(\mathcal{E})}. \quad (17)$$

Информацию о величинах, входящих в выражение (17), можно извлечь из данных по возбуждению дырочных состояний. Действительно, сечение процесса с передачей энергии  $\mathcal{E}$  и возбуждением дырочного уровня с определенным набором квантовых чисел  $n$  пропорционально величине  $\mathcal{E}$ :



$$R_n(\epsilon) = \frac{\frac{1}{2} \Gamma_n(\epsilon)}{(\epsilon - E_n(\epsilon))^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2(\epsilon)} \quad (18)$$

Для дискретных уровней  $\Gamma_n(\epsilon) \rightarrow 0$  и это выражение переходит в  $\delta$ - функцию от энергии. Для квазистационарных уровней центры наблюдаемых пиков должны совпадать с корнями уравнения  $E_n(\epsilon) = \epsilon$ . Из требований согласования с экспериментом, в принципе, можно найти зависящий от энергии комплексный потенциал  $M(x, x', \epsilon)$ . Но поскольку эта задача весьма сложна, естественно воспользоваться хорошо проверенными данными об оболочечном потенциале для низких возбуждений. Тогда по аналогии с оптическим потенциалом для рассеяния нуклонов на ядрах массовый оператор можно представить в виде:

$$M(x, x', \epsilon) = \delta(x-x') V(x) (1 + \alpha(\epsilon) + i\beta(\epsilon)) + V_{sa}(x) + V_{kg}(x), \quad (19)$$

где  $V(x) + V_{sa}(x) + V_{kg}(x)$  - оболочечный потенциал с известными параметрами, а подлежащими определению величинами остаются  $\alpha(\epsilon)$  и  $\beta(\epsilon)$  при условии их плавного обращения в нуль для значений  $\epsilon$ , близких к  $\mu$ .

Как уже говорилось, наблюдается определенная симметрия между "дырочными" и "частичными" возбуждениями, поэтому для установления численных значений параметров массового оператора обратимся к оптическому (оболочечному) потенциалу. В работе [3] были подобраны параметры потенциала Саксона-Вудса, которые приводят к схеме заполнения уровней, соответствующей экспериментальным данным об основных и первых возбужденных состояниях ядер, имеющих нуклон или "дырку" сверх заполненной

оболочки. Заметим, что отклонение от опыта не превышает 10%. Согласно  $\alpha(\epsilon) = \alpha_0(M - \epsilon)$ , т.е. эта добавка не изменяет свойства потенциала у поверхности Ферми, а для глубоких "дырочных" состояний соответствует углублению потенциальной ямы. Из сравнения с экспериментальными данными по "дырочным" возбуждениям значение  $\alpha_0$  оказалось равным 0.525 Мэв. Для мнимой части потенциала  $\beta(\epsilon)$  мы приняли такую же зависимость от  $\epsilon$ , что и в работе <sup>14</sup>, изменив её знак на противоположный из соображений обращения времени, т.е.:

$$\beta(\epsilon) = 16,6 (1 - e^{0,022(\epsilon - M)}) / V_0,$$

где  $V_0$  - глубина потенциала  $V(x)$ .

Результаты вычислений собственных значений  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$  протонных "дырочных" состояний для ядер  $O^{16}, Ca^{40}$  и  $Ni^{58}$  приведены на рис.1; экспериментальные данные взяты из работы <sup>10</sup>. Видно, что наши вычисления неплохо воспроизводят наблюдаемую картину. Экспериментальные данные для нейтронных "дырочных" состояний крайне бедны, для  $Ni^{58}$  они фактически отсутствуют. Совпадение вычисленных  $E_n$  и  $\Gamma_n$  для нейтронных "дырочных" возбуждений с экспериментом <sup>15,16</sup> такое же, как и для протонов.

Вычисления полной энергии связи проводились по формуле (16), причем была введена принудительная нормировка весовой функции на число частиц. Суммирование по  $n$  велось до  $n \leq n_F$ , т.к. очевидно, что члены в сумме (16) с  $n > n_F$  дадут маленький вклад в полную энергию. Если  $\Gamma_n(\epsilon) \rightarrow 0$ , то формула (16)

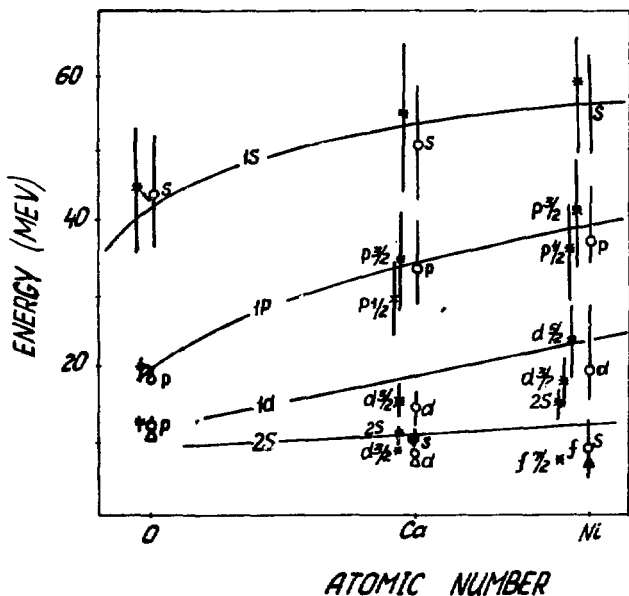


Рис. I. Экспериментальные значения энергии отделения (светлые кружочки) протонов и ширины дырочных состояний, взятые из <sup>10</sup>. Треугольниками обозначены энергии отделения последнего связанного протона. Положения максимумов рассчитанных дырочных состояний обозначены крестиками.

приобретает обычный оболочечный вид:

$$E_c^{osc} = \sum_n (E_n - \frac{1}{2} M_{nn}). \quad (17)$$

В таблице I приведены значения полной энергии связи для ядер  $O^{16}$ ,  $Ca^{40}$  и  $Ni^{58}$ , вычисленные по формулам (16) и (17),  $E_c^{osc}(\alpha_c = 0,525)$ , рассчитанные при  $\alpha_c = 0,525$ , и  $E_c^{osc}(\alpha_c = 0)$  — при  $\alpha_c = 0$ , т.е.  $E_c^{osc}(\alpha_c = 0)$  соответствует обычной оболочечной энергии связи. Видно, что в предложенном подходе энергия связи согласуется с экспериментом с точностью 10%. Отметим, что введение ширины  $\Gamma_n(E)$  дырочных возбуждений оказалось существенным, поскольку именно учет этого фактора обеспечивает увеличение энергии связи в два раза по сравнению с  $E_c^{osc}(\alpha_c = 0,525)$ . Это можно было ожидать уже из анализа формулы (16), т.к. в ней вклад более глубоких "орбиталей" усилен. Этот факт был отмечен в <sup>17</sup> при получении правила сумм для энергии связи. Безусловно, разумного значения  $E_c^{osc}$  можно было бы достигнуть и путем увеличения  $\alpha_c$ , но в предположении  $\Gamma_n(E) = 0$ , как это было сделано в <sup>18</sup>. Однако тогда положение рассчитанных уровней намного отличалось бы от наблюдаемых.

Итак, в работе предложена модификация оболочечной модели, описывающая положение максимумов "дырочных" возбуждений и их ширины. Получена формула для полной энергии связи, удобная для вычислений и сравнения с данными по реакциям квазиупругого выбивания нуклонов. Удовлетворительное описание полной

Таблица I

$\xi_c$  - полная энергия связи, вычисленная по формуле (16),  
 $\xi_c^{ns,oa}(\alpha_0 = 0,525)$  - оболочечная полная энергия связи,  
 рассчитанная по формуле (17) при  $\alpha_0 = 0,525$ , а  $\xi_c^{ns,oa}(\alpha_0 = 0)$  -  
 при  $\alpha_0 = 0$ .

Ядра	$\xi_c$ МэВ	$\xi_c^{ns,oa}$ ( $\alpha_0=0,525$ ) МэВ	$\xi_c^{ns,oa}$ ( $\alpha_0=0$ ) МэВ	$\xi_c^{jkc}$ МэВ
$O^{16}$	- 117.	-49.1	-33.4	-127.6
$Ca^{40}$	- 332.	-188	-61.2	-342.0
$Ni^{58}$	- 560.	-315	-68.7	-506.5

энергии связи ядра и отсутствие свободных параметров указывает на адекватность нашего подхода реальной физической картине. Установлена приближенная связь между матричными элементами введенного динамического потенциала и наблюдаемыми величинами; дальнейшее уточнение этой связи требует постановки более точных экспериментов. Заметим, что предложенный подход напоминает и опирается на оптическую модель и не требует разработки нового по сравнению с применяемым в теории ядра математическим аппаратом. Поэтому мы надеемся, что это позволит на более строгой основе с уточненным средним полем провести рассмотрение процессов при высоких энергиях. Очевидно, что лучшего согласия с опытом можно было бы достигнуть допустимыми вариациями параметров оптического потенциала, но точность наших вычислений ограничена экспериментальными ошибками спектра дырочных возбуждений.

В заключение мы хотели бы остановиться на тех проблемах, решение которых осталось вне рамок данной работы. Хотя мы воспользовались результатами оптической модели и получили удовлетворительное согласие положения максимумов "дырочных" возбуждений, их ширины и полной энергии связи ядра, тем не менее необходимо дальнейшее теоретическое обоснование принятой нами схемы. Так могут оказаться неудовлетворительными линейная аппроксимация зависимости от энергии  $\alpha(E)$  и использованное нами выражение для мнимой части  $\beta(E)$  в области более тяжелых ядер. Возникает также вопрос о нормировке и суммировании в формуле (16) по  $n$  до  $n \leq n_c$  :

вклад членов с  $n > 11$  в легких ядрах незначителен, но для тяжелых ядер он может оказаться существенным. Отметим также, что при исследовании свойств глубоких дырочных состояний тяжелых ядер нужно рассмотреть и вопрос о включении в среднее поле добавки, связанной с разностью между числами нейтронов и протонов. Планируется проведение исследований указанных эффектов.

Авторы признательны за полезные обсуждения Е.Бангу, Б.Моттelsonу и В.А.Сергееву.

Рукопись поступила в издательский отдел  
II февраля 1975 г.