

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



14/10-75

P4 - 8591

Б-21

Е.Б.Бальбуцев, М.Плошайчак

1379/2-75

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ
СОХРАНЯЮЩЕГО ОБЪЕМ СПАРИВАНИЯ

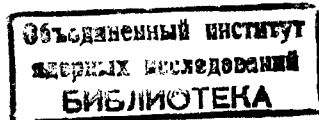
1975

P4 - 8591

Е.Б.Бальбуцев, М.Плошайчак

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ
СОХРАНЯЮЩЕГО ОБЪЕМ СПАРИВАНИЯ

Направлено в Acta Physica Polonica



Бальбуцев Е.Б., Плошайчак М.

P4 - 8591

Точно решаемая модель сохраняющего объем спаривания

Сформулирована точно решаемая модель для вариационного метода определения параметров парных корреляций из условия сохранения объема. Показано, что отличная от нуля равновесная щель возможна лишь в ядрах, имеющих нерегулярности в спектре возле поверхности Ферми.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Balbutsev E.B., Ploshaichik M.

P4 - 8591

Exactly Soluble Model for Volume
Conserving Pairing

Exactly soluble model for volume conserving pairing is formulated. It is shown, that nonzero equilibrium energy gap exists only in nuclei having irregularities in spectra near Fermi surface.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

Недавно в работах /1-3/ был предложен вариационный способ определения параметров спаривательного взаимодействия, исходя из условия сохранения объема. Проведенные расчеты показали /2-4/, что метод хорошо работает как в сферических, так и в деформированных ядрах. Однако в этих громоздких машинных расчетах, учитывающих массу тонкостей и деталей, важных для получения количественного согласия с экспериментом, отсутствует одна существенная черта - наглядность. Они практически ничего не дают, когда требуется объяснить "на пальцах" принцип действия метода, наглядно представить себе сам механизм возникновения щели в спектрах ядер. Очень полезно в этой связи исследовать проблему в максимально упрощенных условиях, т.е. поставить и решить модельную задачу.

Одна из точно решаемых моделей, известная в традиционном подходе к спариванию, описана в /5/. В ней рассматривается равномерный одночастичный спектр, плотность уровней в котором достаточно велика, чтобы суммирование по ним можно было заменить интегрированием.

Сформулируем в рамках этой модели задачу и решим ее нашим методом. Максимальная простота достигается, если полную энергию ядра записать в осцилляторном базисе:

$$E = \left[\beta \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} 2v_{\nu}^2 - \Delta \sum_{\nu} u_{\nu} v_{\nu} \right] \hbar \omega(\Delta), \quad /1/$$

где ω - осцилляторная частота, ϵ_{ν} - энергии одночастичных уровней в единицах $\hbar \omega$, Δ - параметр щели в тех же единицах, u_{ν} и v_{ν} - коэффициенты преобразова-

ния Боголюбова. Происхождение численного множителя β требует специального обсуждения. Из теории Хартри-Фока известно, что в /1/ вместо $\xi = \beta \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} 2v_{\nu}^2$ сле-

довало бы написать $\xi = \frac{1}{2} \sum_{\nu} (t_{\nu} + \epsilon_{\nu}) 2v_{\nu}^2$, где t_{ν} - сред-

няя кинетическая энергия в состоянии ν . В гармоническом осцилляторе $t_{\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu}$, отсюда $\beta = \frac{3}{4}$. В прямоугольной яме, если энергию отсчитывать от ее дна, $t_{\nu} = \epsilon_{\nu}$, следовательно, $\beta = 1$. Реалистические потенциалы типа Саксона-Вудса имеют форму, промежуточную между двумя указанными случаями. Поэтому величина параметра формы β для них будет находиться в пределах $3/4 < \beta < 1$.

Суть описанного в /1-4/ метода заключается в том, что при вариации Δ нужно следить за неизменностью объема ядра Ω . Там же было показано, что постоянство Ω можно обеспечить, сохраняя среднеквадратичный радиус ядра $\langle r^2 \rangle$. Известно, что в гармоническом осцилляторе

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \sum_{\nu} (N_{\nu} + \frac{3}{2}) 2v_{\nu}^2 \quad \text{или, пользуясь тем, что}$$

$$\epsilon_{\nu} = N_{\nu} + 3/2, \quad \langle r^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} 2v_{\nu}^2, \quad /2/$$

где m - масса нуклона. В прямоугольной яме $\langle r^2 \rangle$ не зависит от энергии и

$$\langle r^2 \rangle = \text{const}. \quad /3/$$

Формулы /2/ и /3/ можно объединить в одну:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \sum_{\nu} (a + n \epsilon_{\nu}) 2v_{\nu}^2 = \frac{\hbar}{m\omega} (aN + \frac{n}{\beta} \xi),$$

где N - число частиц, a и n - еще два параметра формы потенциала. Ясно, что в случае осциллятора $a = 0, n = 1$; для прямоугольной ямы $a \neq 0, n = 0$. $\langle r^2 \rangle$ будет постоянным, если положить

$$\omega(\Delta) = \text{const} \sum_{\nu} (a + n \epsilon_{\nu}) 2v_{\nu}^2 = c(aN + \frac{n}{\beta} \xi). \quad /4/$$

Введем обозначение $P = \Delta \sum_{\nu} u_{\nu} v_{\nu}$. Тогда энергия

$$E = (\xi - P)c(aN + \frac{n}{\beta} \xi). \text{Варируя ее по } \Delta, \text{ получаем уравне-}$$

ние на равновесную щель:

$$(aN + \frac{n}{\beta} \xi) \left(\frac{d\xi}{d\Delta} - \frac{dP}{d\Delta} \right) + (\xi - P) \frac{n}{\beta} \frac{d\xi}{d\Delta} = 0.$$

Здесь можно пренебречь P по сравнению с ξ . Полученное уравнение существенно упрощается в двух предельных случаях:

для гармонического осциллятора -

$$\frac{d}{d\Delta} (2\xi - P) = 0 \quad /5/$$

и для прямоугольной ямы -

$$\frac{d}{d\Delta} (\xi - P) = 0. \quad /6/$$

Чтобы сохранить эту простоту и в общем случае, введем параметр a , который для осциллятора равен $2\beta = \frac{3}{2}$, для прямоугольной ямы равен $\beta = 1$ и принимает промежуточные значения в более реалистических случаях. Тогда вместо /5/ и /6/ можно написать уравнение на равновесную щель для произвольного потенциала:

$$\frac{d}{d\Delta} (\xi' - P) = 0, \quad /7/$$

где $\xi' = a \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} 2v_{\nu}^2$.

Заменяя в /1/ суммы интегралами, находим:

$$\begin{aligned} \xi' - P &= \rho \frac{a}{2} [\mu^2 - (\mu + \lambda) \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + \Delta^2} + \lambda \sqrt{\lambda^2 + \Delta^2} + \\ &+ (1 - \frac{1}{a}) \Delta^2 \ln \frac{\mu - \lambda + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + \Delta^2}}{\tau \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}}], \end{aligned} \quad /8/$$

где ρ - плотность уровней, μ - верхняя граница спектра. Уравнение, получающееся из условия сохранения числа частиц в среднем, $N = \sum_v 2v^2$, преобразуется к виду:

$$\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + \Delta^2} = (\mu - 2\lambda_0) + \sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}, \quad /9/$$

где $\lambda_0 = \frac{N}{\rho}$ - химический потенциал при $\Delta = 0$. Возводя /9/ в квадрат, получаем полезные соотношения:

$$\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2} = \frac{2\lambda_0(\mu - \lambda_0) - \mu\lambda}{\mu - 2\lambda_0}, \quad \Delta^2 = \frac{4\lambda_0(\mu - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda)(\mu - \lambda - \lambda_0)}{(\mu - 2\lambda_0)^2}. /10/$$

Выражение /8/ можно значительно упростить с помощью /9/ и /10/:

$$\mathcal{E}' - P = \rho \frac{a}{2} \left\{ \frac{2\lambda_0}{\mu - 2\lambda_0} [2\lambda(\mu - \lambda_0) - \mu\lambda_0] + \left(1 - \frac{1}{a}\right) \Delta^2 \ln \frac{\mu - \lambda - \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} \right\}. /11/$$

Отсюда находим производную:

$$\frac{d}{d\Delta} (\mathcal{E}' - P) = \rho \Delta \left[(a-1) \ln \frac{\mu - \lambda - \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda} - (2a-1) \frac{\mu - 2\lambda_0}{\mu - 2\lambda} \right]. /12/$$

Из /7/ и /12/ видно, что при $\Delta = 0$ \mathcal{E} всегда имеет экстремум. Чтобы найти остальные экстремумы, надо решить уравнение:

$$\ln x = B \frac{x-1}{x+1}, \quad /13/$$

где $x = \frac{\mu - \lambda - \lambda_0}{\lambda_0 - \lambda}$, $B = \frac{2a-1}{a-1}$. В терминах x $\lambda = \frac{\lambda_0(x+1) - \mu}{x-1}$,

$\Delta^2 = \frac{bx}{(x-1)^2}$, $b = 4\lambda_0(\mu - \lambda_0)$. На рис. 1 схематически изо-

бражены функции $\ln x$ и $B \frac{x-1}{x+1}$. Видно, что есть три точки пересечения: $0 < x_1 < 1$, $x_2 = 1$, $x_3 > 1$. Решение x_1 является лишним. Оно возникло потому, что мы возводили в квадрат равенство /9/, и соответствует отрицательному значению

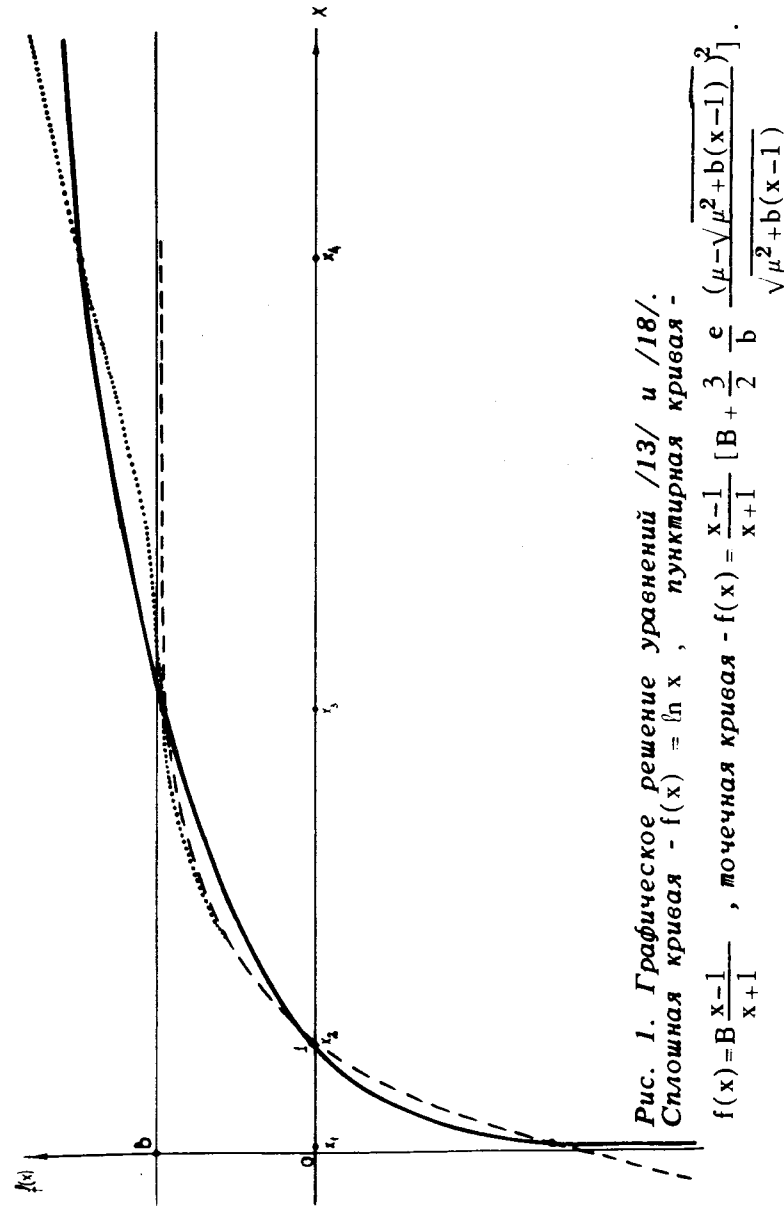


Рис. 1. Графическое решение уравнений /13/ и /18/.
Сплошная кривая - $f(x) = \ln x$, пунктирная кривая -

$$f(x) = B \frac{x-1}{x+1}, \text{ точечная кривая - } f(x) = \frac{x-1}{x+1} \left[B + \frac{3}{2} \frac{e}{b} \frac{(\mu - \sqrt{\mu^2 + b(x-1)})^2}{\sqrt{\mu^2 + b(x-1)}} \right].$$

$\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}$. Решение x_2 соответствует $\Delta^2 = \infty$ и поэтому не представляет для нас интереса. Остается x_3 . Из рис. 1 видно, что производная /12/ при $\Delta < \Delta(x_3)$ положительна, а при $\Delta > \Delta(x_3)$ отрицательна. Следовательно, экстремум при $\Delta = \Delta(x_3)$ есть максимум. Зависимость E от Δ в этом случае показана на рис. 2.

Первый нетривиальный результат решения модельной задачи можно сформулировать так: если ядро в окрестности поверхности Ферми имеет равномерный спектр и плавную зависимость $\langle r_i^2 \rangle$ от ϵ_i , то равновесная щель в нем равна нулю.

В реальных ядрах такая ситуация крайне редка. Обычно есть сгущения и разрежения в спектре, образующие оболочки и подоболочки. Кроме того, из-за ls -сил и деформации уровни с большими $\langle r_i^2 \rangle$ могут опускаться ниже уровней с малыми $\langle r_i^2 \rangle$, так что зависимость $\langle r_i^2 \rangle$ от ϵ_i вблизи поверхности Ферми может оказаться весьма нерегулярной. Оба указанных фактора могут привести к отличной от нуля равновесной щели. Относительно первого из них это было показано в работе /1/. Исследуем второй.

Чтобы имитировать нерегулярность в росте $\langle r_i^2 \rangle$, рассмотрим зависимость $\langle r_i^2 \rangle$ от ϵ_i , изображенную на рис. 3:

$$\langle r_i^2 \rangle = \begin{cases} a + n\epsilon_i, & \epsilon_i \leq \lambda_0 \\ a + n(\epsilon_i - e), & \epsilon_i > \lambda_0 \end{cases}$$

Вместо /4/ теперь имеем:

$$\omega(\Delta) = c \left[aN + \frac{n}{\beta} (\xi - \beta e \Sigma) \right],$$

где $\Sigma = \sum_{\nu > \lambda_0} 2\nu^2$. Тогда $E = (\xi - P) c \left[aN + \frac{n}{\beta} (\xi - \beta e \Sigma) \right]$ и варьирование по Δ дает:

$$\left[aN + \frac{n}{\beta} (\xi - \beta e \Sigma) \right] \left(\frac{d\xi}{d\Delta} - \frac{dP}{d\Delta} \right) + (\xi - P) \frac{n}{\beta} \left(\frac{d\xi}{d\Delta} - \beta e \frac{d\Sigma}{d\Delta} \right) = 0. /14/$$

Пренебрегая здесь P и $\beta e \Sigma$ по сравнению с ξ , получаем

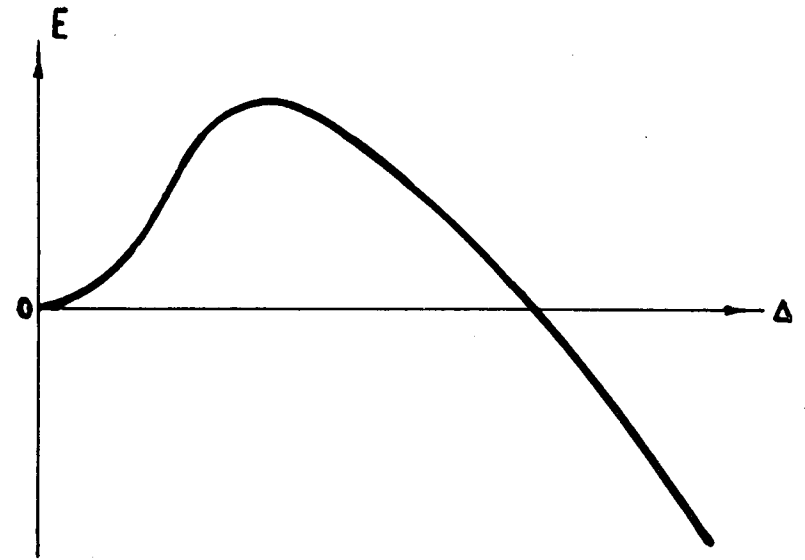


Рис. 2. Зависимость полной энергии ядра E от Δ в случае, когда равновесная щель равна нулю.

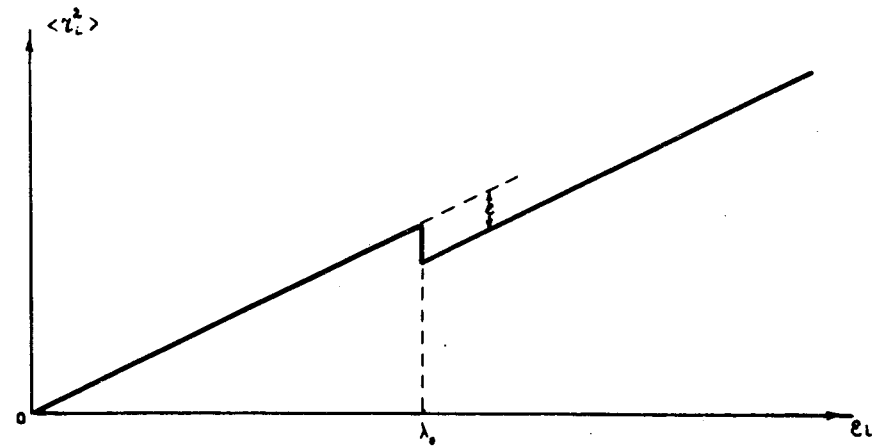


Рис. 3. Имитация нерегулярности в поведении $\langle r_i^2 \rangle$, как функции ϵ_i .

уравнение на равновесную щель, которое значительно упрощается в случае гармонического осциллятора,

$$\frac{d}{d\Delta} (2\mathcal{E} - P - \beta e\Sigma) = 0, \quad /15/$$

и прямоугольной ямы,

$$\frac{d}{d\Delta} (\mathcal{E} - P) = 0. \quad /16/$$

Снова вводя в рассмотрение параметр формы a , для произвольной ямы можно вместо /14/ написать более простое уравнение, включающее в себя /15/ и /16/ как предельные случаи:

$$\frac{d}{d\Delta} \left[\mathcal{E}' - P - \frac{3}{2}(a-1)e\Sigma \right] = 0 \quad /17/$$

Оно отличается от /7/ дополнительным членом $\frac{3}{2}e(a-1)\frac{d\Sigma}{d\Delta}$.

Проводя все выкладки, снова убеждаемся, что решение при $\Delta=0$ существует всегда. На экстремумы при $\Delta \neq 0$ получается уравнение:

$$\ln x = \frac{x-1}{x+1} \left[B + \frac{3}{2} \frac{e}{b} \frac{(\mu - \sqrt{\mu^2 + b(x-1)})^2}{\sqrt{\mu^2 + b(x-1)}} \right]. \quad /18/$$

Правая часть схематически изображена на рис. 1 точечной кривой. Если e невелико /как и должно быть/, то при разумных значениях остальных параметров множитель $\frac{e}{b} \ll B$. Отсюда ясно, что при небольших x картина останется практически неизменной и, значит, точка x_3 почти не сдвинется. С ростом x начинает давать заметный вклад второе слагаемое в квадратных скобках. При больших x оно ведет себя как \sqrt{x} , следовательно, правая часть когда-то должна стать больше $\ln x$. Отсюда ясно, что существует еще одна точка пересечения x_4 . Легко видеть, что экстремум в Δ_4 соответствует минимуму E . Зависимость E от Δ для этого случая показана на рис. 4.

Следует особо отметить случай, когда величина скач-

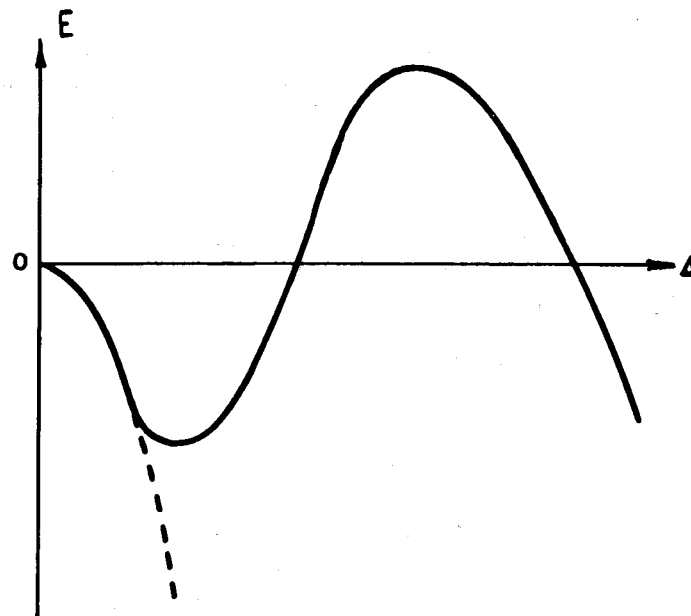


Рис. 4. Зависимость полной энергии ядра E от Δ в случае, когда равновесная щель отлична от нуля /сплошная кривая/. Пунктиром показано поведение $E(\Delta)$ при нефизических значениях параметров модели.

ка ϵ настолько велика, что при любых $x > 1$ правая часть /18/ оказывается больше, чем $\ln x$. Это означает, что решений при $x > 1$ не существует, и кривая $E(\Delta)$ ведет себя так, как показано на рис. 4 пунктиром. Нас это не должно беспокоить, потому что подобная ситуация невозможна в реальных ядрах. Если даже там и встречаются случаи аномально быстрого уменьшения $\langle r_i^2 \rangle$ на поверхности Ферми, то они обязательно сопровождаются не менее быстрым увеличением $\langle r_i^2 \rangle$ в соседней части спектра.

В заключение приведем две численные оценки, чтобы убедиться, что модель не приводит к нелепым результатам при разумных значениях параметров.

Положим $\alpha = 1.5$, что соответствует гармоническому осциллятору. Минимальное значение ϵ при этом должно быть порядка $\hbar\omega$. Для средних ядер $\lambda_0 \approx 5\hbar\omega$, поэтому примем $\epsilon = 0.2\lambda_0$. Возьмем также $\mu = 3\lambda_0$. Находим: $x_3 \approx 155$, $\Delta_3 \approx 0.23\lambda_0$, $\lambda_3 \approx 0.994\lambda_0$; $x_4 \approx 670$, $\Delta_4 \approx 0.11\lambda_0$, $\lambda_4 \approx 0.998\lambda_0$. Рассмотрим теперь случай, промежуточный между осциллятором и прямоугольной ямой: $\alpha = 1.3$. Поскольку здесь $\langle r_i^2 \rangle$, как функция ϵ_r , меняется значительно медленнее, то и минимальная возможная величина скачка ϵ должна быть меньше. Возьмем $\epsilon = 0.1\lambda_0$. Тогда: $x_3 \approx 890$, $\Delta_3 \approx 0.095\lambda_0$, $\lambda_3 \approx 0.9989\lambda_0$; $x_4 \approx 2120$, $\Delta_4 \approx 0.061\lambda_0$, $\lambda_4 \approx 0.9995\lambda_0$. Как видно, результаты вполне удовлетворительные.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить З. Бохнацки и И.Н. Михайлова за полезные дискуссии.

Литература

1. Z. Bochnacki. *Phys. Lett.*, 31B, 187 (1970).
2. E. V. Balbutsev, Z. Bochnacki. *Acta Phys. Pol.*, B3, 287 (1972).
3. E. V. Balbutsev, Z. Bochnacki. *Acta Phys. Pol.*, B3, 283 (1972).
4. E. V. Balbutsev, Z. Bochnacki. *Acta Phys. Pol.*, B5, 397 (1974).
5. В. Г. Соловьев. *Теория сложных ядер. "Наука", Москва, 1971.*

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1975 года.