СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 8580

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. Задача двух частиц. Уравнения Шредингера и Фаддеева для трех частиц

1975

P4 - 8580

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. Задача двух частиц. Уравнения Шредингера и Фаддеева для трех частиц

§ I. Введение

В решении вопроса о виде нуклон-нуклонного потенциала находит широкое применение феноменологический подход, основанный на использовании экспериментальных данных по нуклон-нуклонному взаимодействию - данных по фазам упругого нуклон-нуклонного рассеяния до 400 МэВ и данных по дейтону. Примером получаемых таким способом потенциалов служат потенциалы Рейда /I/, содержащие, наряду с хорошо обоснованным в мезонной теории ОРЕР - потенциалом, ряд компонент, феноменологически описывающих взаимодействие на малых расстояниях. В частности, взаимодействие при весьма малых расстояниях ($r \lesssim 0{,}4$ Ф) имитируется или твердым кором, или сильным отталкивательным потенциалом с малым радиусом действия.

При построении феноменологических потенциалов одной из простых возможностей учета короткодействующих сил является введение модели граничных условий (М.Г.У.)/2,3/. Согласно этой модели, область взаимодействия делится на внешнюю ($r > c$) и внутреннюю ($r < c$). Во внешней области взаимодействие описывается сравнительно простым потенциалом, а эффект короткодействующих сил, которые в принципе могут иметь весьма сложный характер, учитывается путем введения при $r = c$ граничного условия на логарифмическую производную волновой функции. Радиус граничных условий c и значение логарифмической производной f при $r = c$ являются феноменологическими параметрами модели, которые должны быть определены из экспериментальных данных. Следует заметить, что потенциал с твердым кором является частным случаем М.Г.У. ($f \to \infty$). Для интерпретации нуклон-нуклонного взаимодействия с успехом использовалась простая М.Г.У. без внешнего потенциала /2,4-6/, а также М.Г.У. с внешним потенциалом /7,8/.

Введение феноменологических потенциалов связано с известной неоднозначностью, обусловленной тем, что с экспериментальными данными совместимо много потенциалов различной формы, содержащих достаточное число параметров. Дополнительный критерий отбора таких потенциалов может быть получен при расчете трехнуклонных данных на основе интегральных уравнений Фаддеева /9/, ядра которых выражаются через двухчастичные внемассовые t -матрицы. Следовательно, возникает вопрос об определении внемассовой t -матрицы для потенциалов, учитывающих короткодействующие силы по М.Г.У., так как в этом случае ее нельзя найти из обычного уравнения Липпманна-Швингера. Одним из методов построения t -матрицы в М.Г.У. является введение псевдопотенциала во внутренней области $r < c$ /6,10/. Другой подход развит в работах /11,12/, где показано, что заданное значение не зависящей от энергии логарифмической производной волновой функции на радиусе граничных условий может быть получено с помощью некоторого предельного перехода для локального потенциала специального вида, действующего во внутренней области. В этом случае в пределе как массовые, так и внемассовые волновые функции обращаются в нуль во внутренней области. Это обстоятельство, как показано в работах /13,14/, может быть использовано как исходный момент для получения внемассовой t -матрицы в М.Г.У., так как для этого оказывается вполне достаточным введения при $r = c$ граничного условия для логарифмической производной внемассовой волновой функции и требования обращения в нуль этой функции во внутренней области $r < c$. Предложенный в /13,14/ метод можно рассматривать в некотором смысле "чистым" методом граничных условий, так как он основан только на условиях, налагаемых на волновую функцию, и в соответствии с М.Г.У. не требует введения в явном виде какого-либо потенциала во внутренней области.

Использование непосредственно в трехчастичных уравнениях Фаддеева внемассовых t -матриц, соответствующих М.Г.У., приводит к дополнительным трудностям, связанным с тем, что эти уравнения уже не имеют однозначных решений /15/. В работе /16/ было показано, что в этом случае ядра интегральных уравнений Фаддеева нефредгольмовы даже для связанного состояния трех частиц с учетом двухчастичных взаимодействий только в S -состоянии. Следовательно, если двухчастичные взаимодействия описываются с помощью М.Г.У., уравнения Фаддеева должны быть модифицированы. Ниже будет рассмотрен простой способ такой модификации, основанный на том, что трехчастичная волновая функция должна удовлетворять определенным граничным условиям, вытекающим из условий, которым подчиняются двухчастичные внемассовые волновые функции в М.Г.У. Это обстоятельство приводит к тому, что для двухчастичных взаимодействий, описываемых М.Г.У. без внешнего потенциала, задача построения трехчастичной волновой функции точным образом сводится к решению, в общем случае, системы одномерных интегральных уравнений, ранг которой определяется числом учитываемых парциальных компонент.

Существенным моментом излагаемого ниже метода построения двухчастичной t -матрицы в М.Г.У. и метода получения интегральных уравнений для волновой функции системы трех частиц является использование граничных условий для внемассовых двухчастичных волновых функций. В этом отношении логические основы метода одинаковы как в задаче двух, так и в задаче трех частиц. В последнем случае предлагаемый метод существенно отличается от метода, использованного в работе /I7/, и, естественно, приводит к уравнениям другого вида. Ниже ради простоты рассматривается простейший вариант трехчастичной задачи – связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц с парными взаимодействиями только в S -состояниях. Для полноты изложения и необходимых ссылок рассмотрена также задача двух частиц.

§ 2. Двухчастичная внемассовая t -матрица в модели граничных условий

Для вывода некоторых соотношений, необходимых в дальнейшем, рассмотрим двухчастичный потенциал $V(r)$, удовлетворяющий условиям, при которых имеют место уравнения Липпманна-Швингера. Парциальная ℓ -компонента двухчастичной t -матрицы $t_\ell(k,p,z)$ определяется соотношением

$$t_\ell(k,p,z) = -\int_0^\infty r^2 dr\, j_\ell(kr) V(r) \Psi_{\ell p}(r,z) \qquad \text{(I)}$$

со следующей нормировкой :

$$t_\ell(k,k,k^2+i0) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell ,$$

где δ_ℓ – парциальная фаза рассеяния.

Внемассовая волновая функция $\Psi_{\ell p}(r,z)$ в (I) удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\Psi_{\ell p}(r,z) = j_\ell(pr) - \int_0^\infty r'^2 dr' K_\ell(r,r',z) V(r') \Psi_{\ell p}(r',z), \qquad (2)$$

где

$$K_\ell(r,r',z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p^2 dp\, \frac{j_\ell(pr)\, j_\ell(pr')}{p^2 - z}, \qquad (3)$$

$j_\ell(x)$ – сферическая функция Бесселя, $z = E + i0$, E – энергия в с.ц.м. (используется система единиц $2\mu = \hbar = 1$, μ – приведенная масса). Для достаточно быстро убывающих потенциалов $V(r)$ из выражений (I-3) следует ассимптотический вид волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,z)$:

$$\Psi_{\ell p}(r,z) \underset{r\to\infty}{\approx} j_\ell(pr) + i\sqrt{z}\, t_\ell(\sqrt{z}, p, z)\, h_\ell^{(1)}(r\sqrt{z}), \qquad (4)$$

где $h_\ell^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода. Матрицу $t_\ell(k,p,z)$ (I) с помощью (2) и (3) можно выразить через фурье-компоненту $\Phi_{\ell p}(k,z)$ внемассовой волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,z)$:

$$t_\ell(k,p,z) = (k^2 - z)\left[\Phi_{\ell p}(k,z) - \frac{\pi}{2k^2}\,\delta(k-p)\right]. \qquad (5)$$

Рассмотрим далее М.Г.У. без внешнего потенциала, причем будем считать, что выполнены следующие предположения:

1) для модельной внемассовой волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,z)$ и модельной t -матрицы справедливы соотношения (4) и (5) ;

2) модельная внемассовая волновая функция удовлетворяет граничным условиям :

$$\Psi_{\ell p}(r,z)=0, \quad r\leq c_-, \tag{6}$$

$$c\left[\frac{d}{dr} r\Psi_{\ell p}(r,z)\right]_{r=c_+}=f_\ell\left[r\Psi_{\ell p}(r,z)\right]_{r=c_+}, \tag{7}$$

где c - радиус граничных условий, который может зависеть от ℓ. $c_\pm=c\pm\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, f_ℓ - некоторый вещественный параметр. Модели твердого кора радиуса c соответствует $f_\ell=\infty$.

В рассматриваемой модели во внешней области потенциал отсутствует, поэтому соотношение (4) определяет вид внемассовой волновой функции при $r>c$:

$$\Psi_{\ell p}(r,z)=j_\ell(pr)+i\sqrt{z}\, t_\ell(\sqrt{z},p,z)\, h_\ell^{(1)}(r\sqrt{z}), \quad r>c \tag{8}$$

откуда при учете граничного условия (7) непосредственно следует выражение для полумассовой t -матрицы:

$$t_\ell(\sqrt{z},p,z)=\frac{i}{\sqrt{z}}\,\frac{g_\ell(pc,f_\ell)}{\mathcal{D}_\ell^{(1)}(c\sqrt{z},f_\ell)}, \tag{9}$$

где $g_\ell(x,f_\ell)=x j_{\ell-1}(x)-(\ell+f_\ell)j_\ell(x)$,

$$\mathcal{D}_\ell^{(1)}(x,f_\ell)=x h_{\ell-1}^{(1)}(x)-(\ell+f_\ell)h_\ell^{(1)}(x).$$

Внемассовая t -матрица определяется согласно (5) и (8) с учетом условия (6):

$$t_\ell(k,p,z)=-(k^2-z)F_\ell(k,p)+$$

$$+\left[j_\ell(kc)-i\sqrt{z}(k^2-z)h_\ell^{(1)}(c\sqrt{z})F_\ell(k,\sqrt{z})\right]\frac{t_\ell(\sqrt{z},p,z)}{j_\ell(c\sqrt{z})}, \tag{10}$$

где

$$F_\ell(k,p)=\int_0^c r^2 dr\, j_\ell(kr)\, j_\ell(pr).$$

Выражение (10) для t -матрицы удовлетворяет условиям симметрии и унитарности /18/:

$$t_\ell(k,p,z)=t_\ell^*(p,k,z^*)=t_\ell(p,k,z),$$

$$t_\ell(k,p,s^2+i0)-t_\ell(k,p,s^2-i0)=$$

$$=2is\, t_\ell(k,s,s^2+i0)\, t_\ell(s,p,s^2-i0).$$

При отрицательных энергиях $z = -E_0$, являющихся решениями уравнения

$$ic\sqrt{E_0}\,h^{(1)}_{\ell-1}(ic\sqrt{E_0}) - (\ell + \varkappa_\ell)\,h^{(1)}_\ell(ic\sqrt{E_0}) = 0, \tag{II}$$

t - матрица (I0) имеет полюс. Для триплетного S -состояния протона и нейтрона энергия E_0 должна быть положена равной энергии связи дейтона $\varepsilon_d = \alpha^2$, причем уравнение (II) в этом случае приобретает вид

$$\varkappa_0 + \alpha c = 0, \tag{I2}$$

а волновая функция дейтона $\varphi_d(r)$ в области $r > c$ будет определяться выражением:

$$\varphi_d(r) = \sqrt{2\alpha}\;\frac{e^{-\alpha(r-c)}}{r}. \tag{I3}$$

Будем считать, что имеется только одно связанное S -состояние, энергия которого и волновая функция определяются выражениями (I2) и (I3), и введем при $E = k^2 > 0$ на массовой поверхности вещественные функции

$$\phi_{\ell k}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i\delta_\ell(k)}\,\Psi_{\ell k}(r, k^2 + i0), \tag{I4}$$

где $\delta_\ell(k)$ - фаза рассеяния в М.Г.У. :

$$e^{2i\delta_\ell(k)} = -\frac{\mathcal{D}^{(1)*}_\ell(kc, \varkappa_\ell)}{\mathcal{D}^{(1)}_\ell(kc, \varkappa_\ell)}.$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что при постоянных $\varkappa_\ell$ и c в области $r > c$ волновые функции (I3) и (I4) ортогональны :

$$\int_c^\infty r^2 dr\, \phi_{\ell k}(r)\,\phi_{\ell k'}(r) = \frac{1}{k^2}\,\delta(k - k'),$$
$$\int_c^\infty r^2 dr\, \varphi_d(r)\,\phi_{0k}(r) = 0 \tag{I5}$$

и образуют полную систему:

$$\int_0^\infty k^2 dk\, \phi_{\ell k}(r)\,\phi_{\ell k}(r') + \delta_{\ell 0}\,\varphi_d(r)\,\varphi_d(r') = \frac{1}{r^2}\,\delta(r - r'). \tag{I6}$$

Как было указано во введении, приведенные выше выражения для t -матрицы и волновых функций могут быть получены в результате некоторого предельного перехода, примененного к потенциалу специального вида, действующего в области $r \leq c$ /II/:

$$V(r) = V_0\,\theta(c - r) - c V_1\,\delta(r - c), \tag{I7}$$

где $\theta(x) = 1,\ x > 0,\quad \theta(x) = 0,\ x < 0.$

Для потенциала (I7) легко найти в аналитическом виде волновые функции и t -матрицу. Последующий переход к пределу

$$V_0 \to \infty, \quad V_1 \to \infty \tag{I8}$$

при выполнении соотношения

$$c(\sqrt{V_0} - c V_1) = \varkappa, \tag{I9}$$

где $\varkappa$ -константа, показывает, что предельное выражение для волновой функции имеет вид (8) и удовлетворяет условиям (6) и (7), а предельное значение t -матрицы определяется выражением (I0).

§ 3. Уравнения Шредингера и Фаддеева для системы трех тождественных частиц

Рассмотрим простейший вариант трехчастичной задачи с парными взаимодействиями - связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц. Такое ограничение не принципиально и в то же время позволяет наиболее простым способом изложить предлагаемый метод получения трехчастичных уравнений в случае, когда взаимодействия описываются М.Г.У. без внешнего потенциала. Как и в случае двух частиц, рассмотрим сначала задачу в предположении, что парные взаимодействия между частицами определяются потенциалами $\hat{V}(\vec{r})$, такими, что имеют место как двухчастичные уравнения Липпманна-Швингера, так и трехчастичные уравнения Фаддеева. Запись потенциалов в виде $\hat{V}(\vec{r})$ подразумевает зависимость взаимодействия от относительного орбитального момента пары частиц.

Как обычно, введем в системе центра масс координаты Якоби:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_3, \quad \vec{\rho}_1 = -\vec{R}_1 + \frac{1}{2}\left(\vec{R}_2 + \vec{R}_3\right), \qquad (20)$$

где $\vec{R}_i$ - радиус-вектор i -й частицы. Наряду с координатами (20), в дальнейшем будут использоваться координаты $\vec{r}_2, \vec{\rho}_2$ и $\vec{r}_3, \vec{\rho}_3$, получающиеся из (20) путем циклических перестановок, а также импульсы $\vec{k}_i, \vec{q}_i$, сопряженные соответствующим координатам Якоби $\vec{r}_i, \vec{\rho}_i$. Волновая функция системы трех тождественных бозонов $\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1)$ симметрична относительно любых перестановок частиц

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) = \Psi(-\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{\rho}_2) = \Psi(\vec{r}_3, \vec{\rho}_3) \qquad (21)$$

и удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\left(\nabla^2_{\vec{r}_1} + \frac{3}{4}\nabla^2_{\vec{\rho}_1} + E\right)\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) = \qquad (22)$$
$$= \left[\hat{V}(\vec{r}_1) + \hat{V}(\vec{r}_2) + \hat{V}(\vec{r}_3)\right]\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1),$$

где $E<0$ - энергия связи.

Полная волновая функция $\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1)$ может быть выражена через функцию канала $\psi(\vec{r}, \vec{\rho})$ (в данном случае одну):

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) = \psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) + \psi(\vec{r}_2, \vec{\rho}_2) + \psi(\vec{r}_3, \vec{\rho}_3), \qquad (23)$$

причем $\psi(\vec{r}, \vec{\rho})$ следующим образом выражается через $\Psi(\vec{r}, \vec{\rho})$:

$$\psi(\vec{r}, \vec{\rho}) = \int d\vec{r}\,' d\vec{\rho}\,' \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{\rho}; \vec{r}\,', \vec{\rho}\,'; E)\,\hat{V}(\vec{r}\,')\Psi(\vec{r}\,', \vec{\rho}\,'), \qquad (24)$$

где трехчастичная свободная функция Грина $\mathcal{G}$ имеет вид:

$$\mathcal{G}(\vec{r}, \vec{\rho}; \vec{r}\,', \vec{\rho}\,'; E) = -\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\vec{k}\, d\vec{q}\; \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,') + i\vec{q}(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')}}{k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E}. \qquad (25)$$

Функция канала в импульсном представлении $\psi(\vec{K},\vec{q})$ подчиняется интегральному уравнению Фаддеева:

$$\psi(\vec{K},\vec{q})=\left[2\pi^2\left(K^2+\frac{3}{4}q^2-E\right)\right]^{-1}\int d\vec{q}\,'\left[t\left(\vec{K},\frac{1}{2}\vec{q}+\vec{q}\,',E-\frac{3}{4}q^2\right)\times\right.$$ (26)

$$\left.\times\psi\left(-\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{q}\,',\vec{q}\,'\right)+t\left(\vec{K},-\frac{1}{2}\vec{q}-\vec{q}\,',E-\frac{3}{4}q^2\right)\psi\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{q}\,',\vec{q}\,'\right)\right],$$

где $t(\vec{K},\vec{p},z)$ – двухчастичная внемассовая t -матрица. Если ввести внемассовую волновую функцию $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},z)$ с помощью разложения

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},z)=4\pi\sum_{\ell m}i^{\ell}\,\Psi_{\ell p}(r,z)\,Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)Y^{*}_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right),\qquad(27)$$

где $\Psi_{\ell p}(r,z)$ имеют ассимптотику (4), то двухчастичная t -матрица в (26), согласно (5), будет следующим образом выражаться через фурье-компоненту $\Phi_{\vec{p}}(\vec{K},z)$ волновой функции (27):

$$t(\vec{K},\vec{p},z)=\frac{1}{4\pi}(K^2-z)\left[\Phi_{\vec{p}}(\vec{K},z)-(2\pi)^3\delta(\vec{K}-\vec{p})\right].\qquad(28)$$

Для фурье-компоненты $\Psi(\vec{r},\vec{q})$ по переменной $\vec{\rho}$ полной волновой функции (23)

$$\Psi(\vec{r},\vec{q})=\int d\vec{\rho}\,\Psi(\vec{r},\vec{\rho})\,e^{-i\vec{q}\vec{\rho}}\qquad(29)$$

с помощью (28) из уравнения (26) легко получить следующее соотношение:

$$\Psi(\vec{r},\vec{q})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\Psi_{\vec{p}}\left(\vec{r},E-\frac{3}{4}q^2\right)\times$$ (30)

$$\times\left[\psi\left(-\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{3}{4}\vec{q},-\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}\right)+\psi\left(-\frac{1}{2}\vec{p}-\frac{3}{4}\vec{q},\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}\right)\right],$$

которое указывает, что характер зависимости от $\vec{r}$ трехчастичной волновой функции $\Psi(\vec{r},\vec{q})$ определяется зависимостью от $\vec{r}$ внемассовой двухчастичной функции $\Psi_{\vec{p}}\left(\vec{r},E-\frac{3}{4}q^2\right)$. Соотношение (30) совместно с граничными условиями (6) и (7) будет служить основой для получения одномерного интегрального уравнения для трехчастичной волновой функции в М.Г.У. Вывод этого уравнения и метод его решения будут рассмотрены в следующих сообщениях.

Литература

1. R.V.Reid. Ann.Phys.,50,411(1968).
2. H.Fechbach, E.L.Lomon. Phys.Rev.,102,891(1956).
3. H.Feshbach, E.L.Lomon. Ann.Phys.,29,19(1964).
4. G.Breit, W.G.Bouricius. Phys.Rev.,75,1029(1949).
5. E.L.Lomon, M.McMillan. Ann.Phys.,23,439(1963).
6. M.M.Hoenig, E.L.Lomon. Ann.Phys.,36,363(1969).
7. E.L.Lomon, M.Nauenberg. Nucl.Phys.,24,474(1961).
8. E.L.Lomon, H.Feshbach. Ann.Phys.,48,94(1968).
9. Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, I459 (I960).
10. M.M.Hoenig. Nucl.Phys.,A206,169(1973).
11. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C1,414(1970).
12. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C2,2118(1970).
13. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, P4-6708, Дубна, I972.
14. В.Н.Ефимов, Г.Шульц. ОИЯИ, P4-7722, Дубна, I974.
    V.N.Efimov, H.Schultz. Nucl.Phys., A235, 436 (I974).
15. D.D.Brayshaw. Phys.Rev.Lett.,26,659(1971).
16. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C4, 693(1971).
17. D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D.7,1835(1973).
18. Л.Д.Фаддеев. Труды математического института АН СССР, 69, I9 (I963).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1975 г.