

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Г-124

31/III-75

P4 - 8574

1197/2-75

Г.М.Гавриленко, В.К.Федянин

АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ  
В МОДЕЛИ АНДЕРСОНА

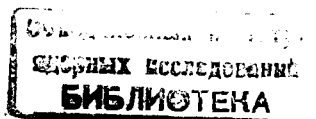
**1975**

P4 - 8574

Г.М.Гавриленко, В.К.Федянин

АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ  
В МОДЕЛИ АНДЕРСОНА

*Направлено в ТМФ*



Гавриленко Г.М., Федянин В.К.

P4 - 8574

Аппроксимация спектральной плотности в модели Андерсона

Двухпараметрическое представление спектральной плотности в модели Андерсона, замыкая цепочку соотношений для моментов, позволяет учесть корреляционные эффекты. Показано, что учет корреляционных эффектов сужает область существования магнитного решения.

Препринт Объединенного института ядерных исследований  
Дубна 1975

Gavrilenko G.M., Fedyanin V.K.

P4 - 8574

Spectral Density Approximation in the Anderson Model

Two-parametric representation (that closes the system of equations for the moments) of the spectral density in the Anderson model allows the correlation effect to be taken into account. It is shown that the account for the correlation effects narrows the region of the magnetic solution.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research  
Dubna 1975

Настоящая работа посвящена учету эффектов корреляции в модели Андерсона. Модель была впервые предложена в 1961 году в связи с проблемой описания образования локализованного магнитного момента на примесях [1]. Она успешно применяется в теории химической адсорбции [2 - 4] и эффекта Кондо [5 - 6]. В основном гамильтониан Андерсона обрабатывался в приближении Хартри-Фока. Попытки выйти за приближение Хартри-Фока были сделаны в [7 - 9]. В первой части данной работы будет кратко рассмотрено приближение Хартри-Фока и обсуждены свойства решений в этом приближении. Во второй части рассмотрена схема, позволяющая выйти за рамки приближения Хартри-Фока. Обсуждены свойства решений в этом приближении. Показано, что в определении состояния системы кроме параметров гамильтониана важную роль играет и форма виртуального энергетического уровня локализованного состояния.

I. В представлении вторичного квантования исследуемый гамильтониан записывается следующим образом:

$$(I) \quad \mathcal{H} = \sum_{\kappa, \sigma} \varepsilon_{\kappa\sigma} n_{\kappa\sigma} + \sum_{\sigma} \varepsilon_d n_{d\sigma} + U n_{d\sigma} n_{d,\sigma} + \sum_{\kappa, \sigma} [c_{d\sigma}^+ c_{\kappa\sigma} V_{d\kappa} + h.c.],$$

где  $\sum_{\kappa, \sigma} \varepsilon_{\kappa\sigma} n_{\kappa\sigma}$  - энергия "свободных" электронов зоны в отсутствие примеси;  $\sum_{\sigma} \varepsilon_d n_{d\sigma}$  - энергия невозбужденного состояния примесного атома;  $U n_{d\sigma} n_{d,\sigma}$  - энергия кулоновского взаимодействия "примесных" электронов с противоположными спинами  $\sum_{\kappa, \sigma} [V_{d\kappa} c_{d\sigma}^+ c_{\kappa\sigma} + V_{d\kappa}^* c_{d\sigma} c_{\kappa\sigma}^+]$  - s - d взаимодействие примеси с зоной матричного вещества матрицы (отметим, что это существенно одночастичное взаимодействие);  $n_{\kappa\sigma} = c_{\kappa\sigma}^+ c_{\kappa\sigma}$ ;  $c_{\kappa\sigma}^+$ ,  $c_{\kappa\sigma}$  - ферми-операторы рождения и уничтожения электронов в состоянии  $(\kappa, \sigma)$ .

$V_{d\kappa} = \frac{1}{\sqrt{N}} \int \varphi_d^*(r) H(r) \sum_n e^{ikR_n} a(r-R_n) dr = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikR_n} V_d(R_n)$   
состояния зоны описываются функциями Блоха.  $\varphi_d$  - функция состо-

яния изолированного примесного атома;  $a(r - R_n)$  функция Ванье; считается, что  $\mathcal{L}_d$  - состояния ортогональны к функциям Ванье.

Для простоты будем рассматривать случай невырожденного состояния. При исследовании (I) в приближении Хартри-Фока будем пользоваться техникой температурных функций Грина [10]. Работать будем в большом каноническом ансамбле. Для получения уравнений для  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$ ,  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle =$  чисел заполнения локализованного состояния, определим следующие функции Грина  $\langle\langle C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle$ ,  $\langle\langle C_{k,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle$ . Уравнения движения для ферми-операторов имеют вид:

$$(2) \quad i \dot{C}_{d,\sigma} = [C_{d,\sigma} \mathcal{H}]_- = \bar{E}_{d,\sigma} C_{d,\sigma} + U n_{d,-\sigma} C_{d,\sigma} + \sum_k V_{d,k} C_{k,\sigma}; \quad \bar{E}_{d,\sigma} = \varepsilon_d - \mu$$

$$i \dot{C}_{k,\sigma} = [C_{k,\sigma} \mathcal{H}]_- = \bar{E}_{k,\sigma} C_{k,\sigma} + V_{d,k} C_{d,\sigma}; \quad \bar{E}_{k,\sigma} = \varepsilon_k - \mu$$

С помощью (2) получаем уравнения движения для функций Грина

$$(3) \quad (\varepsilon - \bar{E}_{d,\sigma}) \langle\langle C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} + U \langle\langle n_{d,-\sigma} C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle +$$

$$+ \sum_k V_{d,k} \langle\langle C_{k,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle;$$

$$(\varepsilon - \bar{E}_{k,\sigma}) \langle\langle C_{k,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle = V_{d,k} \langle\langle C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle.$$

Расцепим функцию Грина  $\langle\langle n_{d,-\sigma} C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle$  по Боголюбову-Тябликову:  $\langle\langle n_{d,-\sigma} C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle \rightarrow \langle n_{d,-\sigma} \rangle \langle\langle C_{d,\sigma}; C_{d,\sigma}^\dagger \rangle\rangle$ . Система (3) "замыкается", спектральная плотность имеет вид:

$$(4) \quad \mathcal{J}_{C_{d,\sigma} C_{d,\sigma}^\dagger} = P (\exp \beta \varepsilon + 1)^{-1} [(\varepsilon - \bar{E}_{d,\sigma} - U \langle n_{d,-\sigma} \rangle - \Lambda^2) + P^2]^{-1};$$

$$\Lambda = \frac{1}{\pi} \int \frac{P(\varepsilon') d\varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'}; \quad P = \pi \sum_k V_{d,k}^2 \delta(\varepsilon - \bar{E}_{k,\sigma}) \equiv \pi \langle V_{d,k}^2 \rangle P_{2\Lambda}.$$

Из (4) по известным формулам можно найти  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$ ,  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle$ .

Для основного состояния ( $\Theta = 0$ ,  $\mu = \varepsilon_f$ ) имеем

$$(5) \quad \langle n_{d,\sigma} \rangle = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\langle n_{d,\sigma} \rangle - x}{y} \right],$$

$$\langle n_{d,-\sigma} \rangle = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\langle n_{d,-\sigma} \rangle - x}{y} \right], \quad x = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_d}{U}, \quad y = \frac{P}{U}.$$

Заметим, что система (5) совершенно симметрична по отношению к перестановке  $\sigma \rightarrow -\sigma$ . Поэтому всегда имеется немагнитное решение. Однако при определенных значениях параметров  $x$ ,  $y$  существует и магнитное решение:  $\langle n_{d,\sigma} \rangle \neq \langle n_{d,-\sigma} \rangle$ . Покажем это.

Система (5) проще всего анализируется графически. При этом, рассматривая  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$  как функцию  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle$ , из первого и второго уравнений (5) при  $\left[ \frac{d \langle n_{d,\sigma} \rangle}{d \langle n_{d,-\sigma} \rangle} \right]_{\langle n_{d,\sigma} \rangle = \langle n_{d,-\sigma} \rangle} > 1$  мы получаем три точки пересечения; т.е. наряду с "немагнитным" решением имеется и "магнитное" решение.

При  $\left[ \frac{d \langle n_{d,\sigma} \rangle}{d \langle n_{d,-\sigma} \rangle} \right] < 1$  существует лишь одна точка пересечения, отвечающая "немагнитному" решению. В зависимости от параметров реализуется либо тот, либо другой случай. Область существования "магнитного" решения на плоскости  $x, y$  ограничена "критической" кривой  $y_c = y_c(x)$ , уравнение которой определяется исключением  $n = \langle n_{d,\sigma} \rangle = \langle n_{d,-\sigma} \rangle$  из (5) и из  $\left[ \frac{d \langle n_{d,\sigma} \rangle}{d \langle n_{d,-\sigma} \rangle} \right]_{\langle n_{d,\sigma} \rangle = \langle n_{d,-\sigma} \rangle} = 1$ .

В неявном виде

$$(6) \quad n - x_c = y_c \operatorname{ctg} \pi n;$$

$$\pi y_c = \sin^2 \pi n.$$

Исключая отсюда  $n$ , получаем функциональную зависимость:

$$(7) \quad x_c = \begin{cases} \pi^{-1} \operatorname{arcsin} \sqrt{\pi y_c} - y_c \operatorname{ctg} \operatorname{arcsin} \sqrt{\pi y_c}; \\ \pi^{-1} \left[ \pi - \operatorname{arcsin} \sqrt{\pi y_c} - y_c \pi \operatorname{ctg} (\pi - \operatorname{arcsin} \sqrt{\pi y_c}) \right]; \end{cases}$$

отметим, что  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\pi y \leq 1$ .

2. Хорошо известно, что пренебрежение корреляциями завывает область существования магнитной фазы [7] и поэтому возникает необходимость рассматривать и корреляционные эффекты. Учет их

мы проведем в рамках метода [II], однако, учитывая специфику модели Андерсона, используем, как нам представляется, более реалистическую форму аппроксимации для спектральной функции. С этой целью воспользуемся системой соотношений для моментов спектральной плотности:

$$(8) \int x^m J_{A,B}(x) (\exp \rho x - \eta) dx = \langle [ \dots [AH] \dots H ]_-, \beta \rangle_2$$

Соотношения (8) представляют собой систему уравнений. Для получения точного выражения для  $\langle A, B \rangle$  необходимо найти  $J_{A,B}(x)$ , удовлетворяющее всей системе (8). Ограничиваясь приближенным нахождением  $\langle A, B \rangle$ , можно попытаться исходить не из цепочки уравнений для функции Грина, а из (8), в котором постулируется функциональный вид  $J_{A,B}(x)$  в виде некоторой параметрической функции; параметры будем определять, удовлетворяя (8) для нескольких  $m$ .

Отметим основные этапы такого подхода. Во-первых, приходится предполагать функциональный вид спектральной плотности, что требует дополнительных физических соображений<sup>x)</sup>. Во-вторых, проблема искусственного замыкания системы уравнений (8) не снимается; в правые части (8) войдут высшие корреляционные функции, построенные на операторах, через которые выражается гамильтониан  $\mathcal{H}$ . Их придется, в конечном счете, выражать через "низшие" корреляционные функции. Однако для некоторых систем (в том числе для модели Андерсона) высшие корреляционные функции, вплоть до уравнения для второго момента включительно ( $m=2$ ), не возникают. Поэтому

x) Так, в частности, аппроксимация спектральной плотности для модели Хаббарда двумя  $\delta$ -функциями [II] соответствует, в общем, методу линейного канонического преобразования.

в рамках 2-параметрической модели не придется делать никаких расщеплений и можно надеяться, что будут учтены корреляции, которые теряются в хартри-фоковском приближении.

Учитывая, что спектральная плотность удовлетворяет следующим "естественным" условиям:

$$(9) \begin{aligned} f(x) P_n(x) &\rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \\ f\left(\frac{x-\alpha}{\Gamma}\right) &\sim \delta(x-\alpha), \quad \Gamma \rightarrow 0 \\ P_n(x) &\text{ - полином степени } n, \quad \alpha, \Gamma \text{ - параметры.} \end{aligned}$$

Представим спектральную плотность в виде:

$$(10) J_{C_{d,\sigma}^-, C_{d,\sigma}^+}(x) = \frac{f\left(\frac{x-\alpha}{\Gamma}\right)}{\Gamma M_0 (\exp \rho x + 1)}; \quad M_0 = \int f(x) dx$$

Уравнение для нулевого момента вследствие коммутационных соотношений  $A, B$  не несет в себе динамической информации, а есть просто некоторое кинематическое условие. Коэффициент  $(M_0 \Gamma)^{-1}$  введен для того, чтобы это условие удовлетворялось тождественно.

Из (8) (при  $\eta = -1$ ) определяются параметры  $\alpha_\sigma, \Gamma_\sigma$ :

$$(11) \begin{aligned} \alpha_\sigma &= \langle [ [C_{d,\sigma}^- H]_-; C_{d,\sigma}^+ ]_+ \rangle, \quad M_0 = \int x^2 f(x) dx \\ \Gamma_\sigma^2 &= \left\{ \langle [ [ [C_{d,\sigma}^- H]_- H]_-; C_{d,\sigma}^+ ]_+ \rangle - \langle [ [C_{d,\sigma}^- H]_-; C_{d,\sigma}^+ ]_+ \rangle^2 \right\} \frac{M_0}{M_2} \end{aligned}$$

Можно заметить, что  $\alpha_\sigma$  определяется на классе функций (9) однозначно и зависит лишь от  $H$ .  $\Gamma_\sigma^2$  пропорционально некоторому коэффициенту, зависящему от вида  $f(x)$  и на данном классе функций определяется с точностью до числового коэффициента. Однако это не отражается на качественном анализе области магнитного решения уравнений

$$(12) \langle n_{d,\sigma} \rangle = \frac{1}{\Gamma_\sigma M_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(\frac{x-\alpha_\sigma}{\Gamma_\sigma}\right) dx}{(\exp \rho x + 1)}$$

Уравнения (12) для случая  $\beta^{-1} = 0$  ( $\mu = \epsilon_f$ ) можно представить в виде

$$(13) \quad \langle n_{d\sigma} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{M_0} \int_0^{\alpha\sigma/n_\sigma} f(x) dx$$

Для гамильтониана Андерсона из (II) находим

$$(14) \quad \alpha_\sigma = \bar{\epsilon}_{d\sigma} + U \langle n_{d,-\sigma} \rangle, \\ \Pi_\sigma^2 = \frac{M_0}{M_2} \left[ \sum_k V_{d,k}^2 + U^2 [\langle n_{d,-\sigma} \rangle - \langle n_{d,\sigma} \rangle^2] \right];$$

т.к. гамильтониан (I) инвариантен относительно преобразований

$\sigma \rightarrow -\sigma$ , то спектральные плотности для  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$ ,  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle$  будем аппроксимировать одной и той же функцией вида (10), что позволяет уравнение для  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle$  получить из уравнения для  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$  простой заменой  $\sigma \rightarrow -\sigma$ . Уравнения (13) в этом случае запишутся в виде

$$(15) \quad \langle n_{d,\sigma} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{M_0} \int_0^{\frac{y}{x - \langle n_{d,\sigma} \rangle}} f(x) dx.$$

Рассмотрим  $\phi(z) = \frac{1}{M_0} \int_0^y f(x) dx$ , где  $f(x)$  принадлежит классу (9).

Легко установить следующие свойства  $\phi(z)$ :

$$(16) \quad \phi(z) \rightarrow 0, z \rightarrow 0; \quad \phi'(z) > 0, \text{ если } z \in (-\infty, \infty) \\ \phi'(0) = \frac{1}{M_0} f(0), \quad \phi(z) = -\phi(-z), \quad \phi''(z) = -\phi''(-z)$$

Эти свойства иллюстрируются рис. 2. Графический анализ

(15) с учетом свойств (16), даваемых рис. 2, проводится аналогично

тому, как это было сделано выше в хартри-фоковском приближении.

Из него можно сделать следующие выводы.

Пусть  $f(x)$  — функция, описывающая форму виртуального уровня, удовлетворяет (9). Тогда с помощью этой функции можно построить

указанным выше способом спектральную плотность. Если

$f(0) < y \cdot M_0$ , то существует только немагнитное решение, если

$f(0) > y \cdot M_0$ , то наряду с немагнитным существует и магнитное решение,

$\Pi$  — полуширина уровня,  $U$  — кулоновский интеграл. Если

$f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ , мы приходим к приближению Хартри-Фока и  $\pi y \leq 1$ ,

что совпадает с критерием, полученным выше. Выберем далее  $f(x)$  в ви-

де (16) —  $f(x) = \exp(-x^2)$ . Легко убедиться, что она удовлетворяет всем требованиям (9).

Тогда:

$$(17) \quad \Gamma_\sigma^2 = 2 \left[ \sum_k V_{d,k}^2 + U^2 (\langle n_{d,-\sigma} \rangle - \langle n_{d,-\sigma} \rangle^2) \right]$$

$$\Gamma_{-\sigma}^2 = 2 \left[ \sum_k V_{d,k}^2 + U^2 (\langle n_{d,\sigma} \rangle - \langle n_{d,\sigma} \rangle^2) \right].$$

Введем еще один безразмерный параметр  $z = \frac{1}{U^2} \sum_k V_{d,k}^2$ . Уравнения для  $\langle n_{d,\sigma} \rangle$  и  $\langle n_{d,-\sigma} \rangle$  запишутся в виде

$$(18) \quad \langle n_{d,\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \phi \left( \frac{x - \langle n_{d,-\sigma} \rangle}{\sqrt{2(z + \langle n_{d,-\sigma} \rangle - \langle n_{d,-\sigma} \rangle^2)}} \right) \right\},$$

$$\langle n_{d,-\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \phi \left( \frac{x - \langle n_{d,\sigma} \rangle}{\sqrt{2(z + \langle n_{d,\sigma} \rangle - \langle n_{d,\sigma} \rangle^2)}} \right) \right\},$$

здесь  $\phi(x)$  — функция ошибок; ( $y_z = \sqrt{2(z + \langle n_{d,\sigma} \rangle - \langle n_{d,\sigma} \rangle^2)}$ ;  $y = y_+ = y_-$ .)

Построим в этом случае критическую кривую (строится она совершенно так же, как и в приближении Хартри-Фока). Условие существования магнитного решения для  $y$  можно найти сразу из критерия:  $\sqrt{\pi} y \leq 1$ .

Первое уравнение критической кривой получится, если в (18) по-

ложить  $n = \langle n_{d,\sigma} \rangle = \langle n_{d,-\sigma} \rangle$ :

$$(19) \quad n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \phi \left( \frac{x - n}{y} \right)$$

Введем функцию  $\phi_1$  такую, что  $\phi_1(\phi(x)) = 1$ , и преобразуем (19)

к виду:

$$(20) \quad x - n = y \phi_1(2n - 1).$$

Второе уравнение для критической кривой есть

$$(21) \quad 1 = \pi^{-1/2} e^{-\frac{(x-n)^2}{y^2}} [y^{-1} + y^{-3}(1-2n)(x-n)].$$

Из (20) и (21) можно исключить  $y$  и получить уравнение относительно  $x$ :

$$(22) \quad (x-n)^2 - \pi^{-1/2} \exp[-\phi_1^2(2n-1)] \phi_1(2n-1)(x-n) - \\ - \pi^{-1/2}(1-2n) \phi_1^3(2n-1) \exp[-\phi_1^2(2n-1)] = 0.$$

Перед радикалом решения (22), дающего  $(x-n)$ , надо выбирать знак (+), поскольку в противном случае  $y(n-\frac{1}{2}) = 0$ , что не соответствует физической постановке задачи. Величина  $(x-n)$  может принимать только действительные значения: дискриминант (22)

$\Delta$  должен быть больше или равен нулю.

Можно представить  $\Delta$  в виде:

$$\Delta = (4\pi)^{-1/2} \exp[-\Phi_1^2(2n-1)] \Phi_1(2n-1) \cdot Q, \quad (23)$$

$$Q = \left[ 1 + 4\pi^{1/2}(1-2n) \Phi_1(2n-1) \exp[-\Phi_1^2(2n-1)] \right]^{1/2} \geq 0$$

Граничные значения  $n_1, n_2$  находим из уравнения  $Q = 0$ :

$$1 + 4\pi^{1/2}(1-2n) \Phi_1(2n-1) \exp[-\Phi_1^2(2n-1)] = 0. \quad (24)$$

Величина  $(1-2n) \Phi_1(2n-1)$  всегда отрицательна в силу нечетности  $\Phi_1(x)$  и того, что  $0 < n < 1$ .

Качественный вид решения (24) представим на рис.3.

Используя найденные  $n_1$  и  $n_2$ , находим граничные точки

$$x_1 = n_1 + (4\pi)^{-1/2} \exp[-\Phi_1^2(2n_1-1)] \Phi_1(2n_1-1) < \frac{1}{2}, \quad (25)$$

$$x_2 = n_2 + (4\pi)^{-1/2} \exp[-\Phi_1^2(2n_2-1)] \Phi_1(2n_2-1) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом,  $x$  может изменяться в интервале  $(x_1, x_2)$ , а соответствующие границам интервала значения  $y$  равны

$$y_1 = (4\pi)^{-1/2} \exp[-\Phi_1^2(2n_1-1)], \quad (26)$$

$$y_2 = (4\pi)^{-1/2} \exp[-\Phi_1^2(2n_2-1)].$$

Полученные результаты иллюстрируются рисунком 4.

Видно, что, независимо от формы виртуального уровня, происходит сужение области существования магнитной фазы. Конкретные значения  $x_1, x_2, M_0$  зависят, кроме параметров гамильтониана, еще и от конкретного вида функции  $f(x)$ .

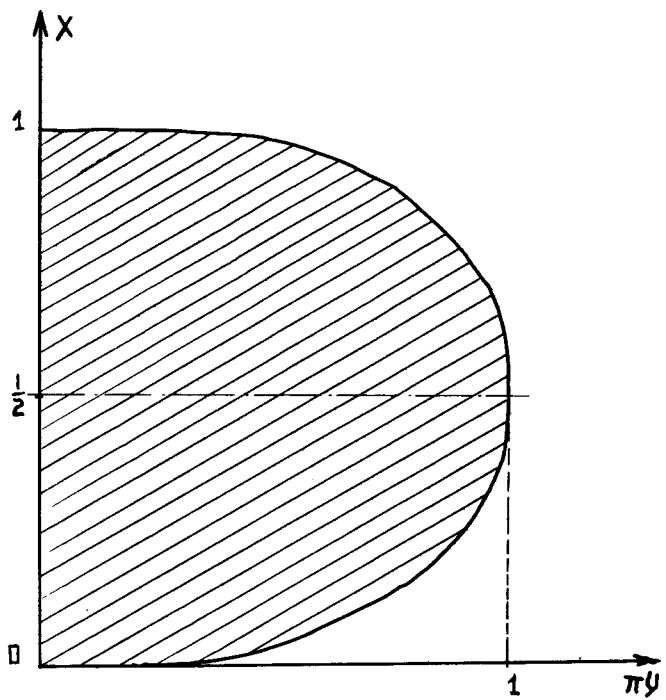


Рис. 1.

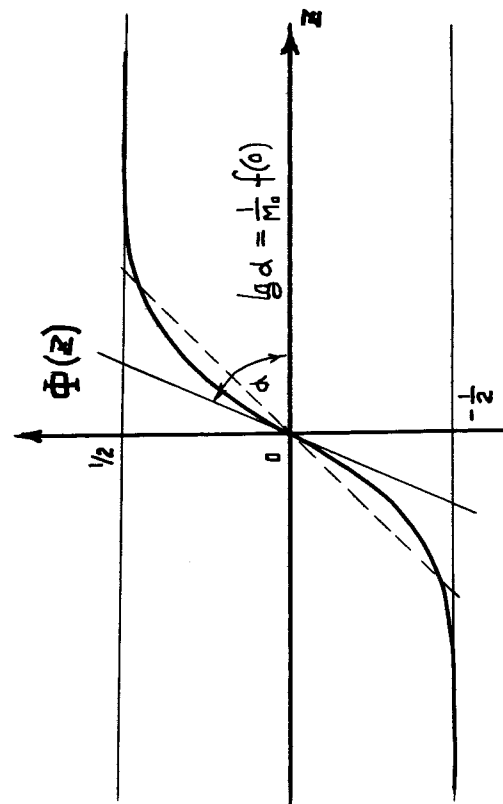


Рис. 2.



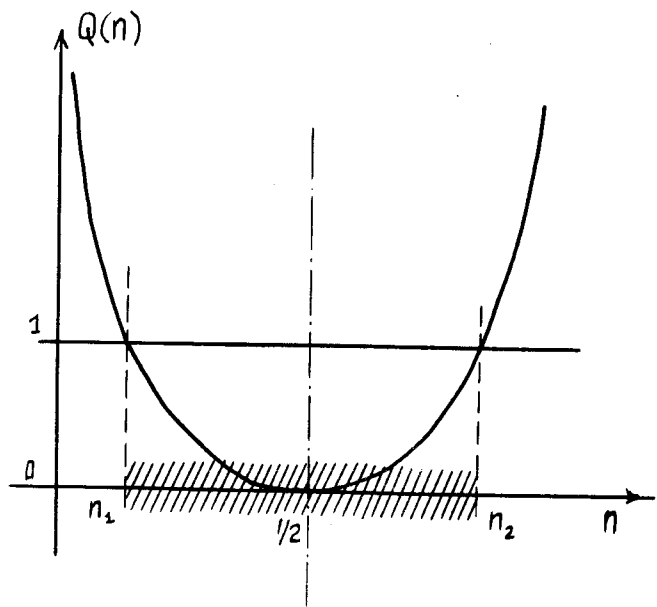


Рис. 3.

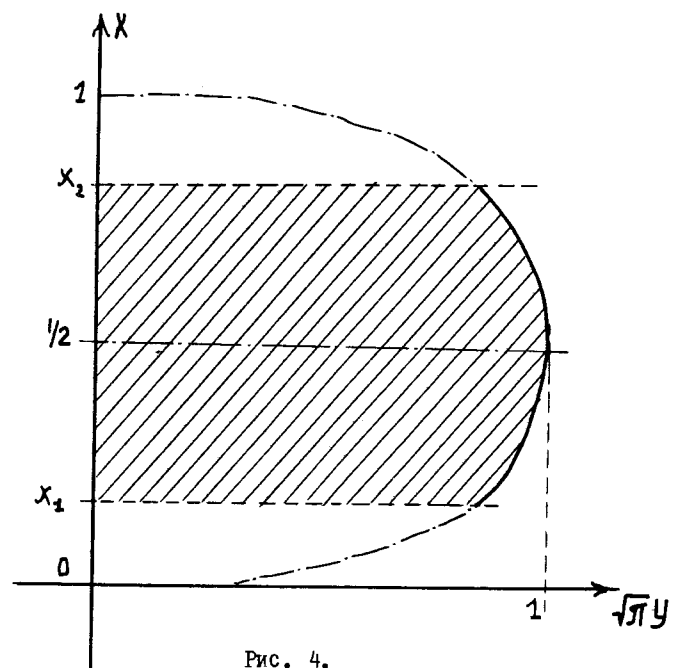


Рис. 4.

Литература:

1. Anderson P.W. Phys. Rev. v 124 p 41, 1961.
2. D.M Edwards, D M Newns. Phys. Letters 24A, p 236, 1967.
3. D.M Newns. Phys. Rev. v178 p 1123, 1969.
4. T.B Grimley. Proc. Phys. Soc. v 90, p 751, 1967.
5. J. Kondo. Solid states Phys. v 23, 1969.
6. A.J. Heeger. Solid states Phys. v 23, 1969.
7. Schrieffer JR Mattis, Phys. Rev. v 140, A 1412, 1965.
8. Scalapino DJ. Phys. Rev. Letters v 16, 937, 1966.
9. Schrieffer JR Wolf P.A. Phys. Rev. v 149, p 491, 1966.
10. Н.Н. Боголюбов, С.В. Тябликов. ДАН СССР, 126; 53, 1959.
11. О.К. Калашников, Е.С. Фрадкин. ТМФ, т.5, №3, 417, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 января 1975 года.