

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



К-418

12/11-75  
P4 - 8525

В.С.Кинчаков

978/2-75

ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЙ АЛЬФА-КЛАСТЕРНЫХ ЯДЕР  
sd -ОБОЛОЧКИ В МОДЕЛИ БРИНКА

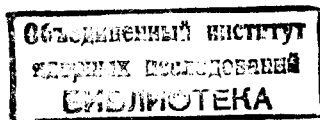
**1975**

P4 - 8525

В.С.Кинчаков\*

ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЙ АЛЬФА-КЛАСТЕРНЫХ ЯДЕР  
sd -ОБОЛОЧКИ В МОДЕЛИ БРИНКА

Направлено в Изв. АН СССР



---

\* Дальневосточный государственный университет,  
Владивосток.

Кинчаков В.С.

P4 - 8525

Энергии состояний альфа-кластерных ядер  $sd$ -оболочки  
в модели Бринка

Рассчитаны энергии состояний ядер  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{32}\text{S}$ .  
Подтверждена альфа-частичная природа ядра  $^{24}\text{Mg}$ , обнаруженная ранее  
в анализе зарядовых формфакторов рассеяния электронов. Абсолютная  
величина энергии связи  $D_{2d}$ -структуры ядра  $^{20}\text{Ne}$ , вычисленная с силами  
Бринка, Бокера, на 16 МэВ меньше энергии связи треугольной бипира-  
мидальной конфигурации альфа-кластеров. Найдено метастабильное со-  
стояние  $D_{3h}$ -структуры ядра  $^{32}\text{S}$ .

Препринт Объединенного института ядерных исследований  
Дубна 1975

Kinchakov V.S.

P4 - 8525

Energies of States of Alpha-Cluster  
Nuclei in the  $sd$ -Shell in the Brink's Model

Energies of states of nuclei  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$ , and  $^{32}\text{S}$   
are calculated. Alpha-particle structure of nucleus  $^{24}\text{Mg}$   
is confirmed, which was found earlier in the analysis of  
the charge form factors of the electron scattering. Abso-  
lute quantity of the binding energy of the  $D_{2d}$ -structure  
of the nuclei  $^{20}\text{Ne}$  calculated with force Brink, Boeker is  
smaller than the binding energy of triangle bipyramidal  
configuration of alpha-clusters by 16 MeV. The metastable  
state of the  $D_{3h}$ -structure of the nucleus  $^{32}\text{S}$  is found.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research  
Dubna 1975

## §1. Введение

Альфа-кластерная модель в форме, предложенной  
Бринком <sup>/1/</sup>, дает удобный способ описания низколежа-  
щих состояний ядер  $p$  и  $sd$ -оболочек с  $A = 4N$ . В рамках  
этой модели были успешно объяснены формфакторы рас-  
сеяния электронов с возбуждением вращательных уров-  
ней этих ядер <sup>/2-4/</sup> и достигнут прогресс в понимании  
экспериментально наблюдаемых больших шириин альфа-  
распада из ряда состояний  $^8\text{Be}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{20}\text{Ne}$  <sup>/5-6/</sup>.

Расчеты же энергий связи и спектров в этой модели  
проводились в основном для ядер  $p$ -оболочки <sup>/1,6-8/</sup>. Что  
касается альфа-кластерных ядер  $sd$ -оболочки, то здесь  
рассчитывались энергии состояний лишь для ядра  $^{20}\text{Ne}$ ,  
а также энергии связи  $^{24}\text{Mg}$  и  $^{28}\text{Si}$  с непроецируемыми  
волновыми функциями <sup>/1/</sup>. К тому же в этих расчетах  
рассматривались не все возможные альфа-конфигурации  
для основных состояний ядер  $sd$ -оболочки.

Кроме того, анализ формфакторов ядер  $sd$ -оболоч-  
ки <sup>/3/</sup> показывает, что в них значительны эффекты класте-  
ризации, и представляется интересным дополнить такой  
анализ расчетом энергий. Это позволяет "микроскопи-  
чески" обосновать выбор альфа-структуры для того или  
иного ядра и сделать определенные заключения об исполь-  
зуемом эффективном нуклон-нуклонном взаимодействии.

## §2. Энергии ротационных состояний альфа-кластерной модели Бринка

Энергии вращательных состояний с определенным  
значением проекции  $K$  на ось симметрии момента коли-

чества движения  $J$  ядра рассчитываются по известной формуле /9/

$$E_{\text{КК}}^J = \frac{\int d\theta \hat{D}_{\text{КК}}^J(\theta) \langle U(\vec{R}_i) | \hat{H}R(\theta) | U(\vec{R}_i) \rangle}{\int d\theta \hat{D}_{\text{КК}}^J(\theta) \langle U(\vec{R}_i) | \hat{R}(\theta) | U(\vec{R}_i) \rangle}, \quad /1/$$

где гамильтониан

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i<j} V_{ij} - T_g, \quad /2/$$

а  $D_{\text{КК}}^J$  - матрицы конечных вращений,  $\hat{R}(\theta)$  - оператор поворота на углы Эйлера,  $U(\vec{R}_i)$  - внутренняя волновая функция альфа-кластерного ядра,  $\vec{R}_i$  задают центры кластеризации, относительно которых четыре нуклона находятся в  $1s$ -состояниях,  $V_{ij}$  - двухчастичное нуклон-нуклонное взаимодействие,  $T_g$  - кинетическая энергия движения центра масс. В качестве двухчастичных сил выбирались эффективные взаимодействия Волкова №2  $V_2^{10}$  и Бринка, Бокера  $V_1^{11}$

$$V_{\text{NN}} = \sum_{\ell=r,a} V_{\ell} (1 - m_{\ell} + m_{\ell} P_m) \exp \left[ -\frac{r_{12}^2}{\mu_{\ell}^2} \right]. \quad /3/$$

Значения параметров сил даны в табл. 1.

В отдельных случаях для данного  $J$  нужно учитывать несколько значений  $K$ , тогда следует заменить средние значения энергии в выражении /1/ на собственные значения системы уравнений

$$\sum_{\text{К}'} (H_{\text{КК}}^J - E B_{\text{КК}}^J) C_{\text{К}'} = 0, \quad /4/$$

где  $H_{\text{КК}}^J$  и  $B_{\text{КК}}^J$  даются формулами

$$H_{\text{КК}}^J = \frac{8\pi^2}{2J+1} \int d\theta \hat{D}_{\text{КК}}^J(\theta) \langle U(\vec{R}_i) | \hat{H}R(\theta) | U(\vec{R}_i) \rangle, \quad /5/$$

$$B_{\text{КК}}^J = \frac{8\pi^2}{2J+1} \int d\theta \hat{D}_{\text{КК}}^J(\theta) \langle U(\vec{R}_i) | \hat{R}(\theta) | U(\vec{R}_i) \rangle. \quad /6/$$

Таблица 1  
Параметры эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия

	$V_1$	$V_2$
$V_r$ (МэВ)	389.5	60.0
$\mu_2$ ( $\phi$ )	0.7	1.01
$m_r$	-0.529	0.65
$V_a$ (МэВ)	-140.6	-60.0
$\mu_a$ ( $\phi$ )	1.4	1.8
$m_a$	0.4864	0.65

Одночастичные волновые функции выбирались в виде традиционных гауссовских

$$U_i(|\vec{r} - \vec{R}_i|) = \exp \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{R}_i)^2}{2b_i^2} \right], \quad /7/$$

где  $b_i$  - определяет размер  $i$ -го альфа-кластера.

Схема расчета энергий в предположении одинаковых размеров альфа-кластеров изложена в работе /1/. Если снять это ограничение, то, используя волновые функции /7/, получаем следующий результат для одночастичных

матричных элементов оператора кинетической энергии нуклона:

$$\langle u_i(\vec{r} - \vec{R}_i) | -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 | u_j(\vec{r} - \epsilon \vec{S}_j) \rangle = \frac{\hbar^2}{2M} B_{ij}(\epsilon) \times$$

$$\times \left[ \frac{3}{b_i^2 + b_j^2} - \frac{(\vec{R}_i - \epsilon \vec{S}_j)^2}{4b_i^2 b_j^2} \left( 1 - \frac{(b_i^2 - b_j^2)^2}{(b_i^2 + b_j^2)^2} \right) \right]. \quad /8/$$

Здесь  $\epsilon = \pm 1$ ,  $\vec{S}_j = \hat{R}(\theta) \vec{R}_j$ , а матричные элементы перекрытия имеют вид

$$B_{ij}(\epsilon) = \pi^{3/2} \beta_{ij}^3 \exp \left[ -\frac{(\vec{R}_i - \epsilon \vec{S}_j)^2}{2(b_i^2 + b_j^2)} \right], \quad /9/$$

$$\beta_{ij}^2 = \frac{2b_i^2 b_j^2}{b_i^2 + b_j^2}. \quad /10/$$

Для двухчастичных матричных элементов оператора потенциальной энергии взаимодействия двух нуклонов вида

$$V = V_0 \exp \left[ -\frac{r_{12}^2}{\beta^2} \right] \text{ имеем}$$

$$\langle u_i u_j | V | u_k u_\ell \rangle = B_{ik} B_{j\ell} I(\vec{R}_i + \vec{S}_k - \vec{R}_j - \vec{S}_\ell), \quad /11/$$

где

$$I = \frac{V_0}{P_1^3 P_2^3} \exp \left[ \frac{\vec{\rho}'^2}{4P_1^2} + \frac{\vec{q}^2}{4P_2^2} - \frac{\vec{\rho}'^2 + \vec{q}^2}{8} \right], \quad /12/$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\rho} - \frac{\beta_{ik}^2 - \beta_{j\ell}^2}{2P_1^2 \beta^2} \vec{\rho}', \quad /13/$$

$$\vec{\rho} = \vec{A} - \vec{A}', \quad \vec{\rho}' = \vec{A} + \vec{A}', \quad /14/$$

$$\vec{A} = \beta_{ik} \left( \frac{\vec{R}_i}{b_i^2} + \epsilon \frac{\vec{S}_k}{b_k^2} \right), \quad /15/$$

$$\vec{A}' = \beta_{j\ell} \left( \frac{\vec{R}_j}{b_j^2} + \epsilon \frac{\vec{S}_\ell}{b_\ell^2} \right), \quad /16/$$

$$P_1^2 = 2 + \frac{(\beta_{ik} - \beta_{j\ell})^2}{\beta^2}, \quad /17/$$

$$P_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{(\beta_{ik} + \beta_{j\ell})^2}{4\beta^2} - \frac{(\beta_{ik}^2 - \beta_{j\ell}^2)^2}{4P_1^2 \beta^4}. \quad /18/$$

В случае одинаковых размеров кластеров ядра имеем  $b_i = b_j = b$ , тогда формулы /8-18/ переходят в соответствующие выражения работы /1/.

### §3. Результаты расчетов и обсуждение

Обратимся теперь к табл. 2 и 3, в которых приведены значения параметров пробных волновых функций и среднеквадратичные радиусы альфа-кластерных ядер sd-оболочки /соответствующие альфа-конфигурации изображения на рис. 1/, полученные в вариационных расчетах энергий связи с непроецируемыми волновыми функциями для сил  $V_2$  и  $V_1$  соответственно. Наряду с параметрами  $R_1, R_2, \theta$  /рис. 1/ независимо варьировались и размеры альфа-кластеров, находящихся в геометрически неэквивалентных позициях. Общее замечание, касающееся всех ядер, состоит в том, что минимум энергии связи реализуется при одинаковых размерах альфа-кластеров как для сил Волкова, так и для сил Бринка, Бокера. В то же время анализ формфакторов этих ядер /3/ указывает на существенно разные размеры

Таблица II

Результаты расчётов энергий связи альфа-частичных ядер для сил  
с непроецируемыми волновыми функциями

Идентификация	$R_1$	$b_1$	$R_2$	$b_2$	$\theta$	$E_0$	$E_0$ эксп	$R(A)$	$\bar{R}(A)$ эксп
$^{20}\text{Ne}$	0.0	1.6	0.4	1.6	0.1	135.83	160.64	2.54	2.75
$^{24}\text{Mg}$	0.5	1.5	1.7	1.5	0.5	178.19	198.25	2.67	2.98
$^{28}\text{Si}$	0.0	1.5	1.3	1.5	0.2	224.50	236.53	2.66	3.04
$^{32}\text{S}$	2.6	1.5	1.4	1.5	0.2	261.01	271.77	2.94	3.19

Таблица III

Результаты расчётов энергий связи альфа-частичных ядер  
для сил  $V_1$  с непроецируемыми волновыми функциями

Идентификация	$R_1$	$b_1$	$R_2$	$b_2$	$\theta$	$E_0$	$E_0$ эксп	$\bar{R}(A)$	$\bar{R}(A)$ эксп
$^{20}\text{Ne}$	0.0	1.9	0.5	1.9	0.1	117.16	160.64	3.02	2.75
$^{24}\text{Mg}$	0.9	1.7	2.2	1.7	0.5	155.27	198.25	3.12	2.98

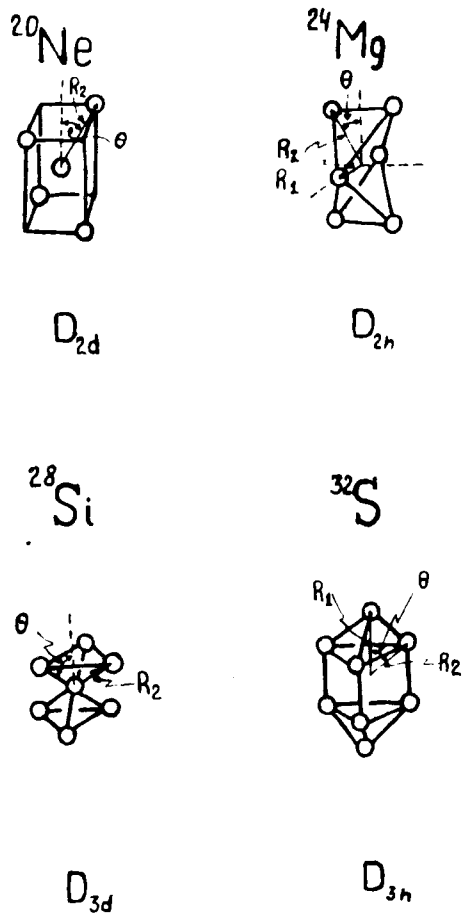


Рис. 1. Альфа-конфигурации ядер  $sd$ -оболочки, используемые в расчетах энергий связи.

центрального и периферийных кластеров для  $^{20}\text{Ne}$  /структура  $D_{2d}$  и  $^{28}\text{Si}$  /  $D_{3d}$ -структура//. Это противоречие, возможно, исчезнет, если учитывать поляризацию альфа-кластеров /12/.

Что касается выбора сил, то расчеты с эффективным взаимодействием  $V_1$  дают завышенные значения среднеквадратичных радиусов атомных ядер. К тому же рассчитанные энергии связи лучше согласуются с экспериментальными для сил Волкова №2.

В принципе, расчеты энергии связи есть основа выбора соответствующей альфа-конфигурации ядра. Для ядра  $^{20}\text{Ne}$  обычно рассматривается треугольная бипирамида /1/, которая, однако, не предсказывает низлежащей ротационной серии с  $K^\pi = 2^-$ . Этого недостатка лишена используемая нами  $D_{2d}$ -структура. В то же время сравнение проведенных здесь расчетов с результатами работы /1/ показывает, что  $D_{3h}$ -структура оказывается энергетически более выгодной. Для сил  $V_1$  она имеет энергию связи на 16 МэВ ниже, чем  $D_{2d}$  структура.

$^{28}\text{Si}$ . Вытянутая конфигурация альфа-кластеров реализует минимум энергии связи для этого ядра /табл. 2/, что не согласуется с результатами анализа неупругих формфакторов рассеяния электронов для такой структуры. Но следует иметь в виду, что расчеты энергий связи состояний с проектируемыми функциями несколько изменяют значения вариационных параметров.

$^{32}\text{S}$ . Примечательно наличие метастабильного состояния  $D_{3h}$ -структуры, которое имеет энергию связи примерно 247 МэВ /рис. 2/. Это состояние - "два кластера окружены шестью остальными" ( $R_1 < R_{2Z}$ ), отделено от основного - "два кластера снаружи шести других" ( $R_{2Z} < R_1$ ), высоким / $\approx 40$  МэВ/ и узким / $\approx 0,2$  Фм/ барьером. Туннельный переход между ними может происходить за счет центробежного эффекта, что подтверждается расчетами формфакторов вращательных состояний для этой структуры. Действительно, по результатам анализа формфакторов в состояниях  $0^+$  и  $3^-$  / $K = \pm 3$ / оказывается, что  $R_1 < R_{2Z}$ , а в состоянии  $2^+$  ( $K=0$ ) из-за центробеж-

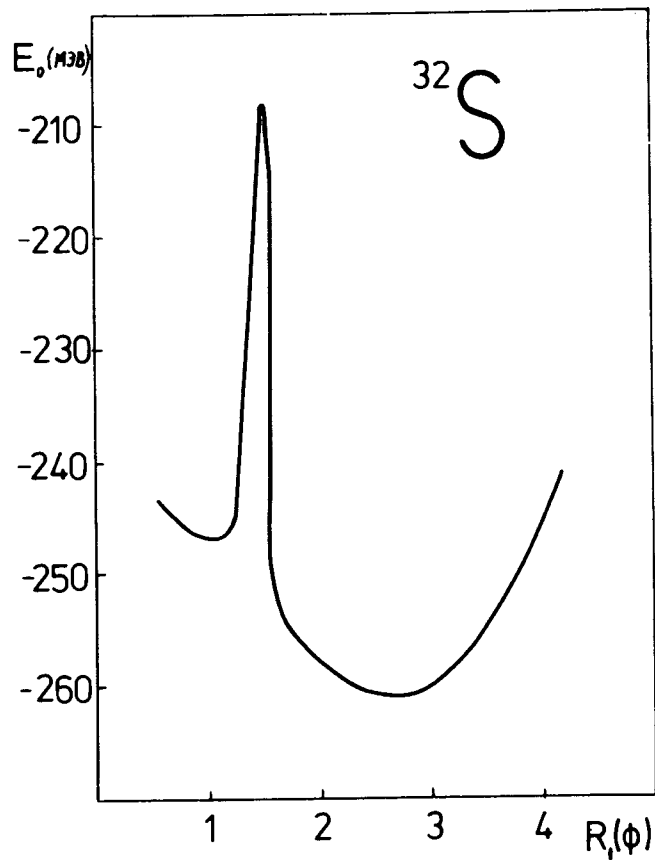


Рис. 2. Зависимость энергии связи ядра  $^{32}\text{S}$ , рассчитанной для  $D_{3h}$ -структуры с непроецируемыми волновыми функциями, от половинного расстояния  $R_1$  между двумя выделенными альфа-кластерами /остальные параметры в табл. 2/. В расчете использовались силы Волкова № 2.

ного эффекта, который действует на два выделенных кластера в большей степени, чем на остальные, было получено  $R_1 > R_{2Z}$ . Обращает на себя внимание и тот факт, что имеет место сравнительно малое отличие рассчитанной для этой структуры энергии связи от экспериментального значения. По-видимому,  $D_{3h}$ -структура для ядра  $^{32}\text{S}$  является наиболее выгодной в энергетическом аспекте.

$^{20}\text{Ne}$ . Вариационные расчеты энергий связи с проецируемыми волновыми функциями производились с помощью стандартной программы /13/ и для  $D_{2d}$ -симметрии дали следующие значения параметров пробной функции  $R_2 = 0,7$ ,  $b_1 = b_2 = 1,6$ ,  $\theta = 0,1$ . Спектр, полученный по формуле /1/ для этих значений параметров, показан на рис. 3. Малый, по сравнению с экспериментальным значением, среднеквадратичный радиус ядра  $^{20}\text{Ne}$  в данном состоянии есть следствие малых значений  $R_2$  и  $b_1$  сравнительно с найденными в расчетах формфакторов рассеяния электронов. Угол  $\theta$  близок к найденному из анализа неупругих формфакторов.

$^{24}\text{Mg}$ . Результаты вариационных расчетов энергий нижайших ротационных полос для этого ядра представлены на рис. 4. Основное состояние характеризуется весьма значительной кластеризацией:  $R_1 = 1,2$  Фм,  $R_2 = 2,6$  Фм,  $b_1 = b_2 = 1,3$  Фм,  $\theta = 0,5$ .

В состояниях вращательной полосы с  $K^\pi = 2^-$  параметры  $R_2$ ,  $R_1$  примерно на  $0,2$  Фм меньше, а  $b_1$ ,  $b_2$  на  $0,1$  Фм больше соответствующих значений этих параметров для основного состояния. Такой же, но более ярко выраженный, эффект уменьшения кластеризации наблюдался в расчетах формфактора неупругого рассеяния электронов с возбуждением уровня  $4^+(K = 2)$ .

Но более интересно то, что наряду со значением энергии связи, близкой к экспериментальной, хорошо описывается формфактор упругого рассеяния электронов, рассчитанный с этими же параметрами /кроме параметра  $R_1$ , который следует взять на  $0,2$  Фм больше/.



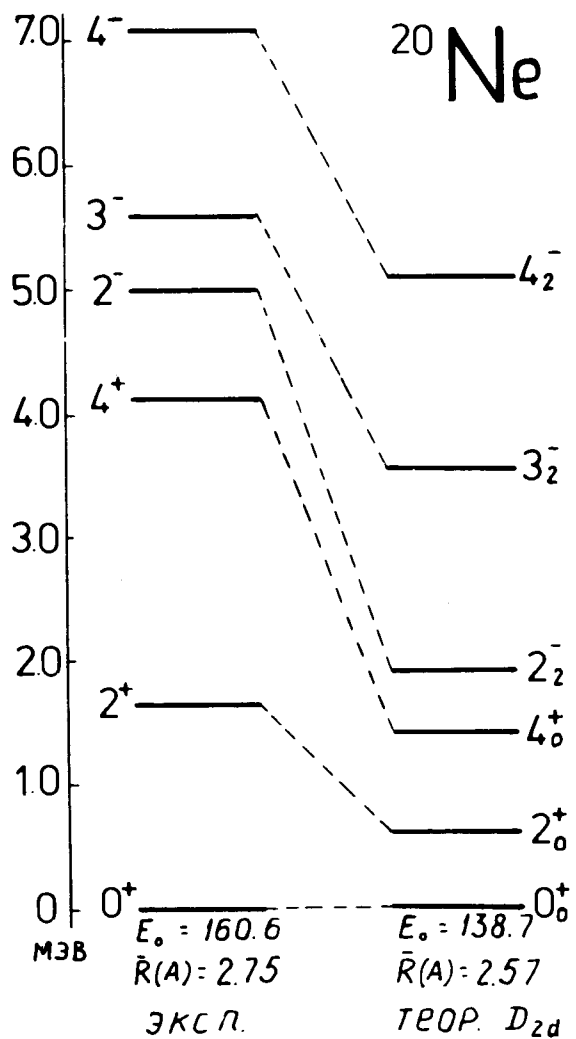


Рис. 3. Энергии нижайших ротационных состояний ядра  $^{20}\text{Ne}$  для  $D_{2d}$ -структуры, рассчитанные с параметрами пробной функции ядра, полученными в вариационном расчете энергии основного состояния с нуклон-нуклонными силами  $V_2$ .

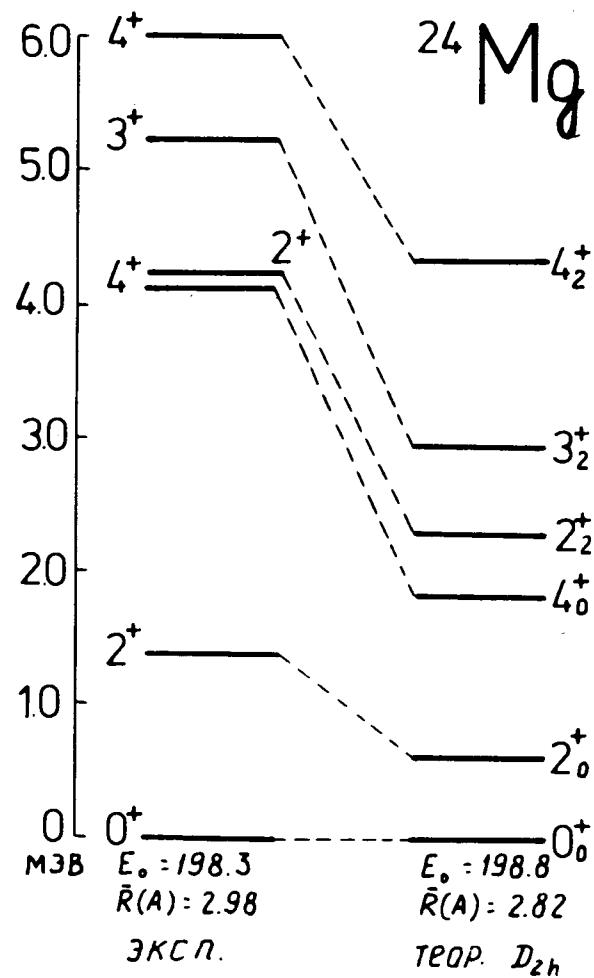


Рис. 4. Вращательные состояния ядра  $^{24}\text{Mg}$ , найденные в вариационных расчетах энергий для  $D_{2h}$ -структуры. В расчетах использовались силы Волкова  $V_2$ .

И в заключение приведем результаты решения системы уравнений /4/ для состояний  $2^+(K=0, \pm 2)$  в  $^{24}\text{Mg}$  /табл. 4/.

Таблица IV

Собственные значения и собственные векторы состояний  $2^+$  ядра  $^{24}\text{Mg}$ , рассчитанные по формуле (I) (вторая строка), и полученные в результате решения системы уравнений (4) (третья строка таблицы). В расчёте использовались силы Волкова №2.

$E_0^2$	$C_0^2$	$C_2^2$	$E_2^2$	$C_0^2$	$C_2^2$
198.26	1.0	0.0	196.50	0.0	1.0
198.26	10.3	1.0	196.49	0.0021	1.0

Расчет производился для параметров пробной функции, дающих минимум энергии связи состояния  $2_2^+$ . Из данной таблицы видно, что собственные значения системы уравнений совпадают с найденными по формуле /1/, а примеси компонент с другим значением  $K$  незначительны.

#### §4. Выводы

1. В рамках альфа-кластерной модели Бринка рассчитаны энергии связи ядер  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{32}\text{S}$  и энергии нижайших вращательных полос  $^{20}\text{Ne}$  и  $^{24}\text{Mg}$ .

2. Для выбранных альфа-конфигураций силы Волкова № 2 дают лучшее описание энергий связи и размеров рассматриваемых ядер по сравнению с силами Бринка.

3. Оказывается, что для ядра  $^{20}\text{Ne}$  более предпочтительной является треугольная бипирамидальная конфигурация альфа-кластеров. Для сил Волкова №2  $D_{2h}$ -структура  $^{24}\text{Mg}$ /битетраэдр/ предсказывает энергию связи и среднеквадратичный радиус, близкие к экспериментальным значениям. Полученная в этих расчетах вытянутая конфигурация альфа-кластеров для ядра  $^{28}\text{Si}$  не согласуется с результатами анализа неупругих формфакторов. Обнаружено метастабильное состояние  $D_{3h}$ -структуры ядра  $^{32}\text{S}$ .

4. Вариационные расчеты энергий связи нижайших состояний ядра  $^{24}\text{Mg}$  показывают, что чистота этих состояний по квантовому числу  $K$  нарушается незначительно.

Автор признателен В.К.Лукьянову за ряд замечаний и А.И.Салтыкову - за консультации по составленной им программе многомерного интегрирования.

#### Литература

1. D.M.Brink. Intern. School of Physics "Enrico Fermi", course XXXVI (1965).  
D.M.Brink, H.Friedrich, A.Weiguny, C.W.Wong. Phys.Lett., 33B, 143 (1970).  
D.M.Brink, A.Weiguny. Nucl.Phys., A120, 59 (1968).
2. Е.В.Инопин, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль. ЯФ, 19, 987 /1974/.
3. Е.В.Инопин, В.С.Кинчаков, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль. Препринт ОИЯИ Р4-7741, Дубна, 1974.
4. Y.Abgrall, P.Gabinski, L.Labarsouque. Preprint PTB-55, Lab. de Phys. Theor., Univ. de Bordeaux, 1974.
5. H.Horiuchi, Y.Suzuki. Prog. Theor. Phys., 49, 1974 (1973).
6. N.Takigawa, A.Arima. Nucl.Phys., A168, 593 (1971).
7. И.Ш.Вашакидзе, Т.Р.Джалагания. ЯФ, 16, 941 /1972/.
8. N.de Takacsy. Nucl.Phys., A178, 469 (1972).
9. R.E.Peierls, J.Yoccoz. Proc.Roy. Soc., A70, 381 (1957).
10. A.V.Volkov. Nucl.Phys., 74, 33 (1965).
11. D.M.Brink, E.Boeker. Nucl.Phys., A91, 1 (1967).
12. Y.Abe, J.Hiura, H.Tanaka. Prog. Theor. Phys., 49 (1973).
13. А.И.Салтыков. В сб. Труды совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, Д10-7707, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 января 1975 года.