

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-85-876

Е.Б.Бальбуцев, З.Вайшвила*, И.Н.Михайлов

ЗАМЫКАНИЕ ЦЕПОЧКИ МОМЕНТОВ
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
И ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЧЕТНОСТИ

Направлено в "Journal of Physics"

* Институт физики АН ЛитССР

1985

В теории коллективного движения в атомных ядрах используются модели, основанные на кинетическом уравнении без учета члена столкновений (уравнении Власова) /1,2/.

В большинстве таких работ осуществляется переход к моментам этого уравнения по скоростям. Несомненным достоинством такого подхода является то, что первые моменты оказываются хорошо известными уравнениями классической гидродинамики: уравнение непрерывности, уравнение Эйлера... Очевидно, однако, и главная трудность метода - получается бесконечная цепочка уравнений, и возникает проблема ее замыкания.

Мы покажем ниже, что для описания коллективных поверхностных колебаний этот вопрос может быть решен конструктивным образом. Нетривиальные результаты при этом получаются для колебательных состояний отрицательной четности, которые будут рассмотрены с некоторой долей подробности.

2. Моменты кинетического уравнения и проблема замыкания

Интегрируя уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (U + \frac{Ze_p}{A} \mathcal{D}) = 0$$

с весами $1, v_i, v_i v_j, v_i v_j v_k$ и т.д., получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0,$$

уравнение движения (обобщение известного уравнения Эйлера)

$$\rho \frac{d u_i}{dt} - \frac{\rho}{m} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

уравнение для тензора давлений

$$\frac{d P_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^3 (P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ijk}}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

уравнение для тензора третьего ранга

$$\frac{d P_{ijk}}{dt} + \sum_{l=1}^3 \left\{ P_{jlkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + P_{iklj} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + P_{ijlk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + P_{ijlk} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{1}{\rho} \left(P_{jk} \frac{\partial P_{il}}{\partial x_l} + P_{ik} \frac{\partial P_{jl}}{\partial x_l} + P_{ij} \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} \right) \right\} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial P_{ijkl}}{\partial x_l} = 0 \quad (3)$$

и т.д. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\rho = m \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad - \text{плотность ядерного вещества,}$$

$$m \quad - \text{масса нуклона,}$$

$$u_i(\vec{r}, t) = \frac{m}{\rho} \int v_i f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad - \text{средняя скорость нуклонов,}$$

P_{ij} - тензор давлений,

$$P_{ij\dots k} = m \int v_i v_j \dots v_k f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad w_i = v_i - u_i,$$

$f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ - функция распределения, дающая вероятность встретить нуклон в точке \vec{r}

в момент времени t со скоростью \vec{v} ;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

U - потенциал ядерных сил,

\mathcal{D} - кулоновский потенциал, $\varphi = \rho \frac{Ze_p}{mA}$,

e_p - заряд протона,

Z - число протонов,

A - число нуклонов.

Все эти уравнения зацеплены друг за друга. Легко видеть, что "зацепляющие" члены входят в уравнения в виде производной по x_i . Так что, если проинтегрировать любое уравнение по объему, то интеграл от "зацепляющего" члена превращается в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, где функция распределения f , а вместе с ней ρ , u_i , $P_{ij\dots k}$ равны нулю. Именно этот факт и может быть использован для замыкания обсуждаемой бесконечной системы уравнений при изучении коллективного движения в ядрах.

Для описания колебаний небольшой мультипольности очень удобен метод вириалов ^{1/3/}. По существу это тот же метод моментов, но уже по координатам X_i . При этом получаются уравнения для характеристик коллективного движения - мультипольных моментов заряда и массы.

Умножая уравнение движения (I) на X_j и интегрируя по объему, получаем уравнение, описывающее изменение со временем тензора инерции $J_{ij} = \int \rho x_i x_j d\vec{r}$. Даст в него вклад и интеграл от "зацепляющего" члена:

$$\int X_j \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} d\vec{r} = - \int P_{ij} d\vec{r} \equiv - \Pi_{ij}.$$

Динамическое уравнение для Π_{ij} получается интегрированием уравнения (2) по объему. При этом интеграл от "зацепляющего" члена $\sum_{k=1}^3 \partial P_{jk} / \partial x_k$ обращается в нуль. Таким образом, происходит естественный обрыв цепочки вириальных уравнений, и мы получаем два связанных динамических уравнения (точных!), содержащих тензоры J_{ij} и Π_{ij} . Изучая вариации этих уравнений, можно довольно просто описать квадрупольные колебания ядра (тензор J_{ij}) с учетом квадрупольной "деформации поверхности Ферми" (тензор Π_{ij}), что и было сделано в работах ^{1/4/}.

Для описания октупольных колебаний нужно вводить в рассмотрение тензоры третьего ранга. Умножая уравнение движения на $X_j X_k$ и интегрируя по объему, получаем динамическое уравнение для тензора $J_{ijk} = \int \rho x_i x_j x_k d\vec{r}$. От зацепляющего члена в него войдет интеграл

$$\int X_j X_k \sum_{l=1}^3 \frac{\partial P_{il}}{\partial x_l} d\vec{r} = - \int (P_{ij} X_k + P_{ik} X_j) d\vec{r} \equiv - \Pi_{ij,k} - \Pi_{ik,j}.$$

Динамическое уравнение для тензора $\Pi_{ij,k}$ получается интегрированием по объему уравнения (2) с весом X_k . "Зацепляющий" член даст в него следующий вклад:

$$\int X_k \sum_{l=1}^3 \frac{\partial P_{jlc}}{\partial x_c} d\vec{r} = - \int P_{ijk} d\vec{r} \equiv - \Pi_{jk}.$$

Наконец, динамическое уравнение для тензора Π_{ijk} можно получить, проинтегрировав по объему уравнение (3), на чем цепочка вириальных уравнений оборвется, так как вклад "зацепляющего" члена $\sum_{l=1}^3 \partial P_{jk} / \partial x_l$ равен нулю. Таким образом, мы имеем три связанных динамических уравнения (точных!), содержащих тензоры J_{ijk} , $\Pi_{ij,k}$ и Π_{ijk} . Вариация этих уравнений позволяет описать октупольные колебания ядра (тензор J_{ijk}) с учетом "деформации поверхности Ферми" вплоть до октупольной (тензор Π_{ijk}), что и будет сделано в следующем разделе.

Пока же подведем итог. Ясно, что описанная процедура получения уравнений для тензоров $J_{ij\dots k}$ и $\Pi_{ij\dots k}$ без особого труда может быть продолжена сколь угодно далеко. Основной вывод: корректное описание тензора $J_{ij\dots k}$, отражающего динамику ядра в конфигурационном пространстве, возможно лишь совместно с тензором того же ранга $\Pi_{ij\dots k}$, отражающего динамику ядра в импульсном пространстве.

3. Колебания отрицательной четности

Выпишем подробно вириальные уравнения, о которых шла речь в предыдущем разделе,

$$\frac{d}{dt} \int \rho u_i x_j x_k d\vec{r} = 2 T_{ij,k} + 2 T_{ik,j} - 2 \sigma_{ij,k} - 2 \sigma_{ik,j} +$$

$$+ \mathcal{M}_{ij,k} + \mathcal{M}_{ik,j} + \Pi_{ij,k} + \Pi_{ik,j} + d_{ij}^k \mathcal{U}_k + d_{ik}^j \mathcal{U}_j,$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_{ij,k} - \int P_{ij} u_k d\vec{r} + \sum_{l=1}^3 \int (P_{jlc} \frac{\partial u_i}{\partial x_c} + P_{ilc} \frac{\partial u_j}{\partial x_c}) x_k d\vec{r} - \Pi_{ijk} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_{ijk} + \sum_{l=1}^3 \int (P_{jlc} \frac{\partial u_i}{\partial x_c} + P_{ilc} \frac{\partial u_j}{\partial x_c} + P_{jlc} \frac{\partial u_k}{\partial x_c} -$$

$$- \frac{1}{\rho} (P_{jk} \frac{\partial P_{ilc}}{\partial x_c} + P_{ilc} \frac{\partial P_{jlc}}{\partial x_c} + P_{jlc} \frac{\partial P_{ilc}}{\partial x_c})) d\vec{r} = 0.$$

Обозначения: $T_{ij,k} = \frac{1}{2} \int \rho u_i u_j x_k d\vec{r}$; $\mathcal{M}_{ij,k} = -\frac{1}{2} \int \rho \mathcal{D}_{ij} x_k d\vec{r}$;
 $\mathcal{U}_i = \int \frac{\rho}{m} x_i U d\vec{r}$; $2(\sigma_{ij,k} + \sigma_{ik,j}) = \int \frac{\rho}{m} x_j x_k U dS_i = T/x_j x_k \text{div} \vec{s} dS_i$, \vec{s} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , T — коэффициент поверхностного натяжения /4,5/.

О собственных частотах системы можно судить по ее реакции на малое отклонение от состояния векового равновесия.

Такие отклонения описываются вариацией вириальных уравнений (4-6). Следуя правилам варьирования интегральных величин /3/, приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений для следующих вариаций: $\delta \Pi_{ij,k}$, $\delta \Pi_{ij}$, δP_{ij} и $\delta \xi_i$. Следов очевидные физические предположения, эти уравнения можно свести к дифференциальным.

В общем случае малые смещения элементов жидкости

$\xi_i(\vec{r}, t) = \Delta x_i$ можно представить в виде ряда

$$\xi_i(\vec{r}, t) = L_i(t) + \sum_{j=1}^3 L_{ij}(t) x_j + \sum_{j,k=1}^3 L_{ijk}(t) x_j x_k + \dots$$

Ведущую роль в описании октупольных колебаний играет член с L_{ijk} — остальные члены ряда ответственны, в основном, за колебания более высокой мультипольности. Пренебрегая их влиянием, ограничимся только выписанными членами ряда для ξ_i . Руководствуясь аналогичными соображениями, сделаем точно такое же приближение и для лагранжевой вариации тензора давлений:

$$\Delta P_{ij}(\vec{r}, t) = D_{ij}(t) + \sum_{k=1}^3 D_{ijk}(t) x_k$$

Равновесную форму ядра считаем сферической. Тогда из-за симметрии за нуль выйдут все интегралы с L_{ij} и D_{ij} . Чтобы исключить движение центра тяжести, достаточно положить $\int \vec{s} d\vec{r} = 0$, откуда возникает линейная связь между L_i и L_{ijk} . В результате вариации вириальных уравнений принимают вид

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}_{ij,k} = & -2\delta \sigma_{ij,k} - 2\delta \sigma_{ik,j} + \delta \mathcal{M}_{ij,k} + \delta \mathcal{M}_{ik,j} + \\ & + \delta \Pi_{ij,k} + \delta \Pi_{ik,j} + \delta \dot{U}_i \cdot \delta x_k + \delta \dot{x}_i \cdot \delta U_j, \\ \delta \dot{\Pi}_{ij,k} + \frac{2}{25} m A v_F^2 R^2 (L_{i,jk} + L_{j,ik}) - \delta \Pi_{ij,k} = & 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta \dot{\Pi}_{ij,k} - \sum_{\ell=1}^3 (\delta_{jk}^{\ell} \cdot \delta \Pi_{i,\ell,\ell} + \delta_{ik}^{\ell} \cdot \delta \Pi_{j,\ell,\ell} + \delta_{ij}^{\ell} \cdot \delta \Pi_{\ell,\ell,\ell}) v_F^2 / R^2 = 0.$$

Здесь $V_{ij,k} = \int \rho \xi_i x_j x_k d\vec{r}$ — линейные комбинации $L_{ij,k}$; $\delta \sigma_{ij,k}$ и $\delta \mathcal{M}_{ij,k}$ — вариации тензоров поверхностной и кулоновской энергии, представляющие собой также линейные комбинации $V_{ij,k}$ (все необходимые соотношения приведены в /3,5/); далее: $D_{ij,k} = \frac{15}{4\pi R^2} \delta \Pi_{ij,k}$.

Заметим, что среди коллективных переменных ядра имеется $\delta \mathcal{J}_{ijk} = V_{i,jk} + V_{j,ki} + V_{k,ij}$. В уравнениях присутствуют $R = 1.2 A^{1/3} \text{ф}$ — радиус ядра и v_F — скорость нуклона на поверхности ферми, определяющая тензор давлений в равновесном состоянии $\Pi_{ij}^0 = \delta_{ij}^0 m A v_F^2 / 5$. Вариации среднего поля $\delta \mathcal{U}_i$ можно найти из условий соленоидальности /3/

$$\sum_{j=1}^3 V_{ij} / a_j^2 = 0, \quad (9)$$

справедливых для несжимаемой ядерной материи.

Переменные, описывающие вибрационные степени свободы ядра, должны зависеть от времени как $e^{i\nu t}$, где ν — искомые нормальные частоты. Уравнения (8) в таком случае превращаются в систему алгебраических однородных уравнений, детерминант которой дает характеристическое уравнение на частоты:

$$\nu^4 (\nu^2 - \nu^2)^5 (\nu^2 - \nu^2)^3 \cdot [\nu^2 - \nu^2 (\beta + \nu^2 \beta) + 15 \nu^2 \beta]^2 = 0. \quad (10)$$

Здесь $\gamma = \frac{qF}{5R^2}$, $\beta = \frac{16}{7} 10\pi T (\frac{7}{4} - X) / mA$, X - параметр делимости. По степени вырождения корня можно судить о ℓ -мультипольности возбуждения. Так, четыре семикратно вырожденных уровня, несомненно, имеют $\ell = 3$, два пятикратно вырожденных уровня имеют $\ell = 2$, два трехкратно вырожденных уровня имеют $\ell = 1$. Поскольку все фигурирующие здесь тензоры меняют знак при пространственной инверсии, всем возбуждениям можно приписать отрицательную четность.

Энергия высоколежащего возбуждения 3^- равна

$$\hbar\nu_{3^-}(\theta) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} [\beta + 4\gamma + \sqrt{(\beta + 4\gamma)^2 - 60\gamma\beta}]^{1/2} \approx \hbar\sqrt{4\gamma} = 130 A^{-1/3} \text{ МэВ}, \quad (\text{II})$$

что несколько превышает экспериментальное значение энергии гигантского октупольного резонанса (ГОР) (I05 - I20) $\cdot A^{-1/3}$ МэВ. Этому расхождению, однако, не следует придавать слишком большого значения, так как небольшого увеличения Z_0 (до 1,25 фм) уже достаточно, чтобы войти в рамки экспериментальных ошибок. Кроме того, учет сжимаемости ядерного вещества также должен понизить теоретическое значение $\hbar\nu_{3^-}(\theta)$.

Энергия низколежащей тройки минус равна

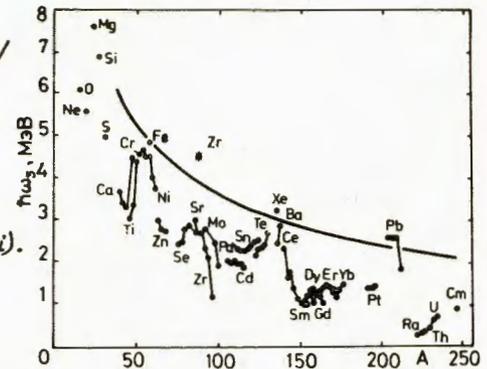
$$\hbar\nu_{3^-}(\theta) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} [\beta + 4\gamma - \sqrt{(\beta + 4\gamma)^2 - 60\gamma\beta}]^{1/2} \approx \hbar\sqrt{\frac{15}{43}\beta} \approx 31,4 \sqrt{\frac{3}{4} - X} \cdot A^{-1/2} \text{ МэВ}. \quad (\text{I2})$$

Судя по рисунку, где представлена систематика экспериментальных низколежащих состояний 3^- , $\hbar\nu_{3^-}(\theta)$ является скорее всего средним между этим состоянием и состояниями низкоэнергетического октупольного резонанса /6/.

Модель дает еще уровни 2^- с энергией $E_2 \approx 52,3 \cdot A^{-1/3}$ МэВ и 1^- с энергией $E_1 \approx 65,6 \cdot A^{-1/3}$ МэВ. Судя по симметрии и размерности связанных с ними переменных, они описывают магнитные квадрупольные и тороидальные дипольные колебания. Полученная нами оценка положения M2-резонанса близка к тому, что сле-

Систематика энергий коллективных октупольных колебаний /II/ в сопоставлении с результатами расчета по нашей модели. Звездочкой указано средневзвешенное значение энергий нижайших 3^- состояний ядра $^{90}\text{Zr}/\text{U}$:

$$E_* = \frac{\sum E_i \cdot B(E3, \gamma \rightarrow i)}{\sum B(E3, \gamma \rightarrow i)}.$$



дует из расчетов, выполненных в рамках микроскопических подходов: $E(M2) = 44 \cdot A^{-1/3}$ МэВ (см /7,8/). Все теоретические подходы завышают положение центра M2 резонанса по сравнению с экспериментом /8/.

Положение изоскалярного резонанса 1^- , полученное нами близко к результату теоретического рассмотрения в работе /9/:

$$E(1^-) = 68 \cdot A^{-1/3} \text{ МэВ}.$$

В заключение обсудим одно общепринятое приближение, без которого нам удалось обойтись. Речь идет о насильственном обрывании цепочки моментов уравнения Власова на уравнении (2), когда пренебрегают тензорами P_{ijk} , P_{ijkl} и т.д. в надежде, что с ростом ранга тензоров $P_{ij\dots k}$ их влияние быстро убывает, т.е. существует некая "сходимость по рангу". Если мы положим $P_{ijk} = 0$, то для энергии ГОР, получим

$$\hbar\nu_{3^-}(\theta) = \hbar\sqrt{28\gamma} = 104,5 \cdot A^{-1/3} \text{ МэВ},$$

что в точности совпадает с формулой Никса /2/, но слишком заметно отличается от (II), чтобы можно было говорить о какой бы то ни было "сходимости", что согласуется с выводами работы /10/. Однако точного совпадения между результатами работы /10/ и нашей нет: все-таки в /10/ обрывание цепочки уравнений выполнено произвольным образом, а также используются граничные условия, не очевидные в применении к ферми-жидкости.

Отметим также, что тензор P_{ijk} появляется в нашей теории как новая независимая переменная, а вместе с ней и новые моды возбуждения. Именно таково происхождение низколежащего возбуждения 3^- , хотя его энергия и определяется практически только кулоновскими и поверхностными силами. (См. формулу (12)).

Литература:

- I. Bertsch G.F. In.: Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons. 1977, Les Houches Lectures, edited by Balian R. et al, North Holland, Amsterdam, 1978, v.I, p. 175.
2. Nix J.R., Sierk A.J. Phys. Rev., 1980, C21, p. 396.
3. Chandrasekhar S., Ellipsoidal Figures of Equilibrium, Yale University Press, 1969.
4. Balbutsev E.B., Dymarz R., Mikhailov I.N., Vaishvila Z. Phys. Lett., 1981, 105B, p. 84.
Бальбуцев Е.Б., Вайшвила З., Михайлов И.Н. ЯФ, 1982, 35, с. 836.
Бальбуцев Е.Б., Вайшвила З., Михайлов И.Н. ЯФ, 1983, 38, с. 591.
5. Rosenkilde C.E., J. Math. Phys., 1967, 8, pp. 84, 88, 98.
6. Youngblood D.H. et al Phys., Rev., 1976, C13, p. 994.
7. Ponomarev V.Yu. et al, Nucl. Phys., 1979, A323, p. 446.
8. Richter A. in Int. School on Nucl. Str., Alushta, 1980, Publ JINR D4-80-385, p. 89.
9. Семенко С.Ф. ЯФ, 1981, 34, с. 639.
10. Hesse R.W. et al Phys. Rev. C, 1982, v. 25, p. 2771.
- II. Бор О., Моттельсон Б.Р. Структура атомного ядра, т. II, Мир, М., 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 декабря 1985 года.

Бальбуцев Е.Б., Вайшвила З., Михайлов И.Н. P4-85-876

Замыкание цепочки моментов кинетического уравнения
и описание коллективных возбуждений отрицательной четности

Показано, что для корректного описания эволюции тензора $J_{i_1 i_2 \dots i_n} = \int \rho x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} d\vec{r}$ с помощью кинетического уравнения необходимо учитывать деформацию поверхности Ферми /ДПФ/ с мультипольностью вплоть до ранга n . Учет октупольной ДПФ заметно влияет на оценку энергии гигантского октупольного резонанса и приводит к появлению низколежащих октупольных возбуждений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Balbutsev E.B., Vaishvila Z., Mikhailov I.N. P4-85-876

Closure of the Chain of the Kinetic-Equation-Moments
and Description of the Negative-Parity Collective Excitations

It is shown that for a consistent description of the evolution of tensor $J_{i_1 i_2 \dots i_n} = \int \rho x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} d\vec{r}$ by means of the kinetic equation it is necessary to take into account the Fermi surface deformation (FSD) with multipolarity up to rank n . Inclusion of the octupole FSD considerably influence the estimation of the energy of the giant octupole resonance and allows one to describe the low-lying octupole excitations.

The investigation has been performed at the
Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985