сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-85-496

В.В.Курышкин, Н.В.Сидорков, Э.Энтральго

# НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТНО-ИМПУЛЬСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1985

## Введение

Среди дискутируемых аспектов квантовой механики наиболее важное место занимает утверждение о неполноте квантово-механического описания физической реальности. Серьезное обсуждение этого вопроса, начавшееся с публикации работы Эйнштейна-Подольского-Розена [1] и последовавшей за ней дискуссии с Бором [2] и Фоком [3], не прекращается и в наши дни. На неполноту квантово-механического описания (в той или иной мере) указывается в работах Эйнштейна [4], Бома [5], де-Бройля [6], Шредингера [7], Вигнера [8] и ряда других исследователей.

Сомнения в полноте квантово-механического описания неоднократно приводили к попыткам построить новую ("более глубокую" [4-6]) физическую теорию, которая давала бы более полное описание физической реальности и, кроме того, объясняла бы саму квантовую механику вместе с ее статистической интерпретацией.

Подобные попытки пока не привели к успеху, причем наиболее серьезным препятствием в их реализации является так называемая "неполнота вероятностной интерпретации" квантовой механики. Сущность ее заключается в том, что в квантовой механике нет понятий совместных и условных вероятностей для различных физических величин (например, для координат и импульсов). Поэтому квантовая механика, несмотря на свой очевидный и общепризнанный статистический характер, "не укладывается в рамки последовательной вероятностной схемы" [4-12], и по этой причине не может быть статистикой для какой бы то ни было "более глубокой" физической теории.

Исследования различных аспектов "неполноты вероятностной интерпретации" квантовой механики привели к постановке следующей проблемы: можно ли каждому квантовому состоянию $\rho(t)$ сопоставить совместное нормированное неотрицательное координатно-импульсное распределение $F(q,p,t)$ с тем условием, чтобы все квантово-механические средние $\langle A \rangle$ вычислялись статистическим усреднением соответствующих классических функций $A(q,p,t)$ по распределению $F(q,p,t)$ ?

В подобной формулировке проблема совместной вероятности координат и импульсов в квантовой механике исследовалась, например, в работах Мойэла [9], Боппа [10], Коэна [11], Тяпкина [12]. Положительное решение проблемы сопоставления $\rho \to F \geq 0$ позволило бы интерпретировать $F$ как совместную плотность вероятности координат и импульсов для системы в состоянии $\rho$, на этой основе ввести понятия совместных и условных вероятностей для других физических величин и тем самым свести квантовую механику к "последовательной вероятностной схеме".

Исследования показали, что проблема сопоставления $\rho \to F \geq 0$ тесно связана с теорией координатно-импульсных представлений, начавшейся с работ Вигнера [I3], Терлецкого [I4], Блохинцева [I5] и неоднократно применявшейся (см., например, [I6-27]) как в изучении теоретических положений квантовой механики, так и в решении ее конкретных задач. В свою очередь, теория координатно-импульсных представлений оказалась связанной [9, I7-I9, 24] с проблемой построения квантовых операторов, берущей свое начало с работ Борна-Иордана [28], Дирака [29], Неймана [30], Вейля [31], и несмотря на многочисленные исследования (см., например,[9, II, I7-20, 24, 32-44]), все еще не имеющей своего окончательного и общепризнанного решения - фиксация любого правила построения операторов ведет к квантовой теории, не совпадающей с общепринятой квантовой механикой [I8, I9, 35, 40, 44].

В конечном итоге были строго доказаны следующие утверждения:

I. Совместных координатно-импульсных распределений, трактуемых как совместная плотность вероятности координат и импульсов, в общепринятой квантовой механике не существует [II, 45, 46].

2. Общепринятая квантовая механика может быть модифицирована [40, 47-49] таким образом, что в ней каждому состоянию $\rho$ будет соответствовать требуемое распределение $F \geq 0$.

Указанная модификация квантовой механики фактически сводится к введению специфического правила [40, 49] построения операторов физических величин. Получаемая при этом квантовая теория отличается от общепринятой квантовой механики математическим формализмом [47-49], интерпретацией [48-50], и, главное, результатами конкретных задач (см., например, [5I-57]). Эти отличия в принципе позволяют ставить вопрос о поиске путей экспериментальной проверки получающейся теории.

В настоящей работе мы рассмотрим некоторые следствия простейшего варианта квантовой теории с соответствием $\rho \to F \geq 0$, названного при опубликовании "квантовой механикой с неотрицательной функцией распределения в фазовом пространстве" [48] и частично исследовавшегося в работах [50-57].

Для простоты изложения мы ограничиваемся рассмотрением лишь чистых состояний, задаваемых волновой функцией $\psi$, и опускаем большинство математических выкладок, заменяя их по мере возможности ссылками на цитируемую литературу.



## I. Правило построения операторов физических величин, квантово-механический формализм

Правило [40] построения операторов, приводящее к "квантовой механике с неотрицательной функцией распределения в фазовом пространстве" [47, 48], в случае системы с $N$ степенями свободы задается нормированным набором квадратично-интегрируемых вспомогательных ("субквантовых" [48-5I]) функций $\varphi_\kappa(\xi,t)$ пространства $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, изоморфного классическому конфигурационному пространству $q = (q_1, \dots, q_N)$, и времени $t$. Нормировка набора $\{\varphi_\kappa\}$ записывается в виде:

$$\sum_\kappa \int |\varphi_\kappa(\xi,t)|^2 d\xi = 1. \qquad \text{(Iа)}$$

Действие оператора $O(A)$, изображающего в рассматриваемой квантовой теории физическую величину $A$, на функцию $\mathcal{U}(q,t)$ координат и времени определяется интегральным преобразованием:

$$O(A)\mathcal{U}(q,t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \varphi(\xi,\eta,t)\, A(q+\xi, p+\eta, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(q-q')p}\, \mathcal{U}(q',t)\, d\xi\, d\eta\, dp\, dq'. \qquad \text{(Iб)}$$

Здесь $A(q,p,t)$ - функция координат $q$, импульсов $p = (p_1, \dots, p_N)$ и времени $t$, изображающая физическую величину $A$ в классической теории, а ядро $\varphi$ связано с набором "субквантовых" функций соотношением:

$$\varphi(\xi,\eta,t) = (2\pi\hbar)^{-N} \sum_\kappa \varphi_\kappa(\xi,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\eta} \int \varphi^*_\kappa(\xi',t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\xi'\eta}\, d\xi'. \qquad \text{(Iв)}$$

Правило (I) можно рассматривать как определенную процедуру квантования (процедуру перехода от классической теории к квантовой). В получающейся при таком квантовании теории предлагается [48] сохранить справедливыми основные положения квантовой механики:

I. Состояние физической системы в любой момент времени задается волновой функцией $\psi(q,t)$, нормированной условием:

$$\int \psi^*(q,t)\,\psi(q,t)\,dq = 1. \qquad \text{(2а)}$$

2. Значение $\langle A \rangle$ физической величины $A$, характеризующей рассматриваемую систему в состоянии $\psi$, определяется формулой:

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(q,t)\, O(A)\, \psi(q,t)\, dq. \qquad \text{(2б)}$$

3. Волновая функция удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\, \partial_t \psi(q,t) = O(H)\,\psi(q,t), \qquad \text{(2в)}$$

где $O(H)$ - оператор, установленный по правилу (I) для функции Гамильтона системы $H(q,p,t)$.

Совокупность операторов (Iб) совместно с положениями (2) определяют квантово-механический формализм теории, отличающейся от общепринятой квантовой механики зависимостью операторов физических величин от априорно выбранных "субквантовых" (не имеющих аналога ни в классической, ни в общепринятой квантовой теориях) функций $\varphi_k$ .

Следует отметить, что изменение количества, или явного вида "субквантовых" функций меняет всю совокупность операторов (Iб), а следовательно, и все результаты теории. Таким образом, под "квантовой механикой с неотрицательной функцией распределения в фазовом пространстве" понимается бесконечная совокупность теорий, каждая из которых соответствует фиксированному набору $\{\varphi_k\}$ .

Перейдем теперь к рассмотрению ряда следствий, вытекающих непосредственно из соотношений (I)-(2).

## 2. Координатно-импульсное распределение, статистический формализм

В теории, базирующейся на положениях (I)-(2), можно рассматривать различные координатно-импульсные представления, например, представления Вигнера [I3, I6, 2I, 27, 43], Терлецкого-Блохинцева [I4, I5, I8], Терлецкого-Маргенау-Хилла [I4, I7, 22] и т.п. Однако здесь, в отличие от общепринятой квантовой механики, всегда существует единственное неотрицательное нормированное координатно-импульсное представление, являющееся функцией распределения. Для доказательства достаточно заменить выражение $O(A)\psi(q,t)$ в интеграле (2б) его конкретным содержанием (Iб). Это дает:

$$\langle A \rangle = \int A(q,p,t)\, F(q,p,t)\, dq\, dp\,, \qquad (3а)$$

где функция $F$ связана с $\psi$ соотношением:

$$F(q,p,t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \varphi(q-\xi, p-\eta, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\xi-\xi')\eta}\, \psi^*(\xi,t)\, \psi(\xi',t)\, d\xi\, d\xi'\, d\eta.$$

Подставляя сюда явный вид ядра (Iв), устанавливаем:

$$F(q,p,t) = (2\pi\hbar)^{-N} \sum_k \left| \int \varphi_k^*(q-\xi,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\xi p}\, \psi(\xi,t)\, d\xi \right|^2 \geq 0. \qquad (3б)$$

Интегрируя $F$ по координатам и импульсам с учетом нормировок (Iа) и (2а), получим:

$$\int F(q,p,t)\, dq\, dp = 1. \qquad (3в)$$

Наконец, дифференцируя $F$ по времени и используя уравнение



(2в) и связь (Iб) между оператором $O(H)$ и функцией $H(q,p,t)$, имеем:

$$\partial_t F(q,p,t) = \mathcal{L}\left[ H(q,p,t), \{\varphi_k(\xi,t)\} \right] F(q,p,t)\,. \qquad (3г)$$

Здесь $\mathcal{L}$ - линейный в классе действительных функций фазового пространства интегральный оператор, функционально зависящий от классической функции Гамильтона и набора "субквантовых" функций (подробнее см., например, [48]).

Совокупность классических функций $A(q,p,t)$ совместно с положениями (3) определяют статистический формализм рассматриваемой теории. Здесь состояние физической системы задается нормированным (3а) неотрицательным (3б) координатно-импульсным распределением $F(q,p,t)$ , удовлетворяющим уравнению (3г) и определяющим значения $\langle A \rangle$ физических величин по формуле статистического усреднения (3а).

## 3. Вероятностная интерпретация

"Квантовая механика с неотрицательной функцией распределения в фазовом пространстве" допускает лишь одну последовательную и непротиворечивую интерпретацию [48-5I], вытекающую из соотношений (3а)-(3в) статистического формализма: представление $F(q,p,t)$ , связанное с волновой функцией соотношением (3б), есть совместная плотность вероятности координат и импульсов системы в состоянии $\psi$ .

Интегрирование $F$ по импульсам (по координатам) приводит к выражению для плотности вероятности координаты $\alpha$ (импульса $\beta$ ):

$$\alpha(q,t) = \int \alpha_0(\xi,t)\, |\psi(q-\xi,t)|^2 d\xi\,, \qquad \beta(p,t) = \int \beta_0(\eta,t)\, |\tilde{\psi}(p-\eta,t)\, d\eta|^2. \qquad (4а)$$

Здесь $\alpha_0$ и $\beta_0$ - следующие, часто появляющиеся в теории, конструкции "субквантовых" функций:

$$\alpha_0(\xi,t) = \sum_k |\varphi_k(\xi,t)|^2, \qquad \beta_0(\eta,t) = \sum_k |\tilde{\varphi}_k(\eta,t)|^2, \qquad (4б)$$

знак " $\sim$ " в соотношениях (4) означает фурье-образ вида:

$$\tilde{u}(y,t) = (2\pi\hbar)^{-N/2} \int u(x,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}xy}\, dx\,.$$

Выражения (4а) показывают, что в исследуемой теории величины $|\psi|^2$ и $|\tilde{\psi}|^2$ в общем случае не имеют (в отличие от общепринятой квантовой механики) физического смысла плотностей вероятности.

## 4. Основные свойства операторов

Детальное исследование правила соответствия (I) изложено в работах

[40, 44, 47-51]. Здесь мы приведем лишь некоторые свойства получающихся операторов:

1. Стандартные перестановочные соотношения для операторов координат и импульсов (независимо от явного вида и количества "субквантовых" функций $\varphi_\kappa$ ), т.е.:

$$[O(q_j), O(p_\kappa)]_- = i\hbar\,\delta_{j\kappa} . \qquad (5)$$

2. Самосопряженность $O(A)$ для действительных $A(q,p,t)$ .

3. Положительная определенность $O(A)$ для $A(q,p,t) \geq 0$ .

4. Дифференциальная форма $O(A)$ для полиномиальных по компонентам импульса функций $A(q,p,t)$ , в частности,

$$O(A) = \int \alpha_0(\xi,t)A_1(q+\xi,t)d\xi + \int \beta_0(\eta,t)A_2(\eta - i\hbar\nabla_q)d\eta \qquad (6а)$$

( $\alpha_0$ и $\beta_0$ есть конструкции (4б)), если

$$A(q,p,t) = A_1(q,t) + A_2(p,t) \in \{A\}_0 . \qquad (6б)$$

Отметим еще, что здесь в общем случае $O(A^2) \neq O(A)O(A)$, т.е. правило (1) относится к классу не-неймановских правил соответствия, общие следствия которых (см., в частности (7)) изложены в работе [44].

## 5. "Субквантовые" неопределенности координат и импульсов

Записывая неопределенность значения компоненты координаты $\langle(\Delta q_j)^2\rangle$ в состоянии $\psi$ с помощью плотности вероятности (4а), или, что то же самое, в виде значения (2б) оператора $O((q_j - \langle q_j\rangle)^2)$ , и минимизируя ее варьированием состояния $\psi$, можно показать [48-51] справедливость следующего ограничения:

$$\sqrt{\langle(\Delta q_j)^2\rangle} \geq \delta q_j = \sqrt{\int\left[\xi_j - \int \xi_j' \alpha_0(\xi',t)d\xi'\right]^2 \alpha_0(\xi,t)d\xi} . \qquad (7а)$$

Постановка аналогичной задачи для импульсов дает:

$$\sqrt{\langle(\Delta p_j)^2\rangle} \geq \delta p_j = \sqrt{\int\left[\eta_j - \int \eta_j' \beta_0(\eta',t)d\eta'\right]^2 \beta_0(\eta,t)d\eta} . \qquad (7б)$$

Таким образом, в рассматриваемой теории в общем случае не существует состояний с заданной координатой, как и состояний с заданным импульсом. "Субквантовые" неопределенности координаты (7а) и импульса (7б) приводят [48] к соотношению неопределенностей:

$$\langle(\Delta q_j)^2\rangle\cdot\langle(\Delta p_\kappa)^2\rangle \geq \delta_{j\kappa}\frac{\hbar^2}{4} + (\delta q_j)^2\cdot(\delta p_\kappa)^2 . \qquad (7в)$$

Следует отметить, что равенство (7а) (равенство (7б)) достигается лишь в состояниях с собственными функциями оператора $O(q_j)$ ( $O(p_j)$ ).



## 6. Предельные переходы. Схема преемственности

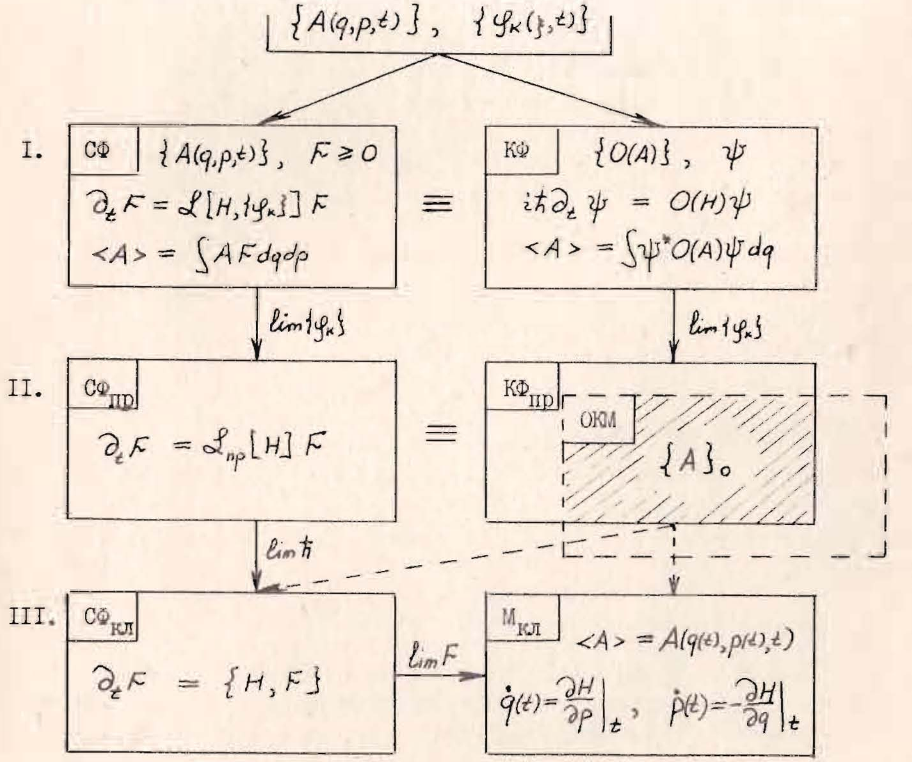
Предельные случаи рассматриваемой теории, близкие к общепринятой квантовой механике, где существуют состояния с заданной координатой и состояния с заданным импульсом, определяются наборами $\{\varphi_\kappa\}$ , зануляющими "субквантовые" неопределенности $\delta q_j$ и $\delta p_j$ , что возможно лишь при условии:

$$\alpha_0(\xi,t) \to \delta(\xi), \qquad \beta_0(\eta,t) \to \delta(\eta). \qquad (8)$$

Последовательности наборов $\{\varphi_\kappa\}$ , обеспечивающие предельный переход (8) (переход неоднозначен), приведены в работе [54].

Предельные случаи классического типа определяются совокупностью условий (8) и условия $\hbar \to 0$ , что разрешает, согласно (7), состояния с одновременно заданными координатой и импульсом.

Основные результаты по предельным переходам для наглядности изображены на упрощенной Схеме преемственности, включающей в себя три уровня теорий, выделенных конкретным содержанием соотношений (7):



Уровень I включает в себя множество теорий (записанных в виде квантово-механического (КФ), либо статистического (СФ) формализма), каждая из которых построена с помощью фиксированного набора "субквантовых" функций, и обладает свойствами, изложенными в §§ 2-6.

Полный предельный переход (8) выделяет в I подмножество теорий уровня II, квантово-механический формализм ($КФ_{пр}$) которых близок к общепринятой квантовой механике, а эквивалентный ему статистический формализм ($СФ_{пр}$) отличается от (СФ) лишь видом оператора в уравнении для $F$. В полном предельном переходе (8):

1. Исчезают "субквантовые" ограничения (7а) и (7б).
2. Ограничение (7в) переходит в известное соотношение неопределенностей Гайзенберга.
3. Операторы (6а) физических величин множества $\{A\}_o$, определенного соотношением (6б), становятся общепринятыми.
4. Уравнение (2в) при функциях Гамильтона из множества $\{A\}_o$ переходит в обычное уравнение Шредингера.
5. Соотношения (4а) определяют стандартную интерпретацию $\psi$.

Таким образом, любая теория уровня II совпадает с общепринятой квантовой механикой (ОКМ) во множестве физических величин $\{A\}_o$, что позволяет включить последнюю в Схему в виде пунктирного прямоугольника, частично перекрывающего прямоугольник ($КФ_{пр}$).

Предельный переход к уровню III ( $\hbar \to 0$ ) в ($СФ_{пр}$) дает однозначный результат - классическую статистическую теорию ($СФ_{кл}$) с уравнением Лиувилля. Наконец, предельный переход по $F$ (выбор плотности вероятности в виде $F(q,p,t) = \delta(q-q(t))\cdot\delta(p-p(t))$, что возможно лишь на уровне III) приводит к классической механике ($М_{кл}$) с уравнениями Гамильтона. Классические теории уровня III могут быть получены и из ($КФ_{пр}$) методами (пунктирные линии), известными из общепринятой квантовой механики.

### 7. Постановка простейших задач

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением простейших физических систем, представляющих собой (с точки зрения классической теории) частицу массы $\mu$ и заряда $ke$ в центральном потенциальном поле $V(|\vec{r}|)$, т.е.:

$$H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2} + V(|\vec{r}|). \qquad (9)$$

При задании "субквантовых" функций естественно [49-51] требовать сохранения группы симметрий исходной классической задачи в получающейся в силу правила (I) квантовой задаче. В случае систем (9) инвариантность относительно трансляций времени и поворотов пространства сохраняется, если [51]:

$$\varphi_\kappa(\vec{\xi},t) = \varphi_\kappa(|\vec{\xi}|), \qquad \int \alpha_o(|\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi} = 1. \qquad (10)$$

(Последнее равенство есть нормировка (Iа)). Изотропные, стационарные, нормированные на единицу конструкции

$$\alpha_o(|\vec{\xi}|) = \sum_\kappa |\varphi_\kappa(|\vec{\xi}|)|^2, \qquad \beta_o(|\vec{\eta}|) = \sum_\kappa |\tilde{\varphi}_\kappa(|\vec{\eta}|)|^2. \qquad (11а)$$

определяют, согласно (7а) и (7б), "субквантовые" неопределенности компонент координаты и импульса:

$$\delta r_j = \delta r = \sqrt{\frac{1}{3}\int \xi^2 \alpha_o(|\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi}}, \qquad \delta p_j = \delta p = \sqrt{\frac{1}{3}\int \eta^2 \beta_o(|\vec{\eta}|)\,d\vec{\eta}}. \qquad (11б)$$

Подставляя набор функций (10) в правило построения операторов (I), с учетом обозначений (11) для оператора $O(H)$, соответствующего функции Гамильтона (9), получим:

$$O(H) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{3}{2\mu}(\delta p)^2 + \int \alpha_o(|\vec{\xi}|)\,V(|\vec{r}+\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi}. \qquad (12)$$

Решение уравнения (2в), как и в общепринятой квантовой механике, фактически сводится теперь к решению задачи на собственные значения оператора (12),

$$O(H)\,\psi_{(n)}(\vec{r}) = \langle E\rangle_{(n)}\,\psi_{(n)}(\vec{r}), \qquad (13)$$

определяющей стационарные состояния системы и соответствующий им спектр значений энергии.

### 8. Операторы компонент координаты и импульса, механический (орбитальный) и магнитный моменты

Подстановка классических компонент координаты и импульса в правило (I) при функциях (10) приводит к операторам:

$$O(r_j) = r_j, \qquad O(r_j^2) = r_j^2 + (\delta r)^2, \qquad (14а)$$

$$O(p_j) = -i\hbar\partial_{r_j}, \qquad O(p_j^2) = -\hbar^2(\partial_{r_j})^2 + (\delta p)^2. \qquad (14б)$$

Здесь хорошо виден смысл "субквантовых" неопределенностей, например: $\delta r$ - есть минимально возможная неопределенность значения $\langle r_j\rangle$, достигаемая в состояниях с собственной функцией оператора $O(r_j)$.

Оператор орбитального момента $O(\vec{L})$ легко устанавливается по правилу (I) с помощью известной классической зависимости $\vec{L}(\vec{r},\vec{p}) = [\vec{r}\times\vec{p}]$. При "субквантовых" функциях (10) это дает:

$$O(\vec{L}) = -i\hbar\,[\vec{z}\times\nabla]\,. \qquad (14в)$$

Для вычисления значения магнитного момента в состоянии $\psi$ поступим следующим образом. Продифференцировав плотность вероятности координаты (4а) по $t$ с учетом свойств набора (10), уравнения (2в) и оператора (12), получим уравнение непрерывности: $\partial_t \alpha = -\nabla\vec{j}$, где плотность тока вероятности дается соотношением:

$$\vec{j}(\vec{z},t) = \frac{i\hbar}{2\mu}\int \alpha_0(|\vec{z}-\vec{\xi}|)\{\psi(\vec{\xi},t)\nabla_{\xi}\psi^*(\vec{\xi},t) - \psi^*(\vec{\xi},t)\nabla_{\xi}\psi(\vec{\xi},t)\}\,d\vec{\xi}\,. \qquad (15)$$

Теперь значение $\langle\vec{M}\rangle$ магнитного момента в состоянии $\psi$ можно определить [58] как магнитный момент, создаваемый распределенным электрическим током с плотностью $\vec{J} = ke\vec{j}$, т.е.:

$$\langle\vec{M}\rangle = \frac{1}{2c}\int[\vec{z}\times\vec{J}(\vec{z},t)]\,d\vec{z} = k\frac{e}{2c}\int[\vec{z}\times\vec{j}(\vec{z},t)]\,d\vec{z}. \qquad (16)$$

Подставляя сюда выражение (15), после замены переменных и интегрирования по частям, в силу изотропности функций (10) получим:

$$\langle\vec{M}\rangle = -\frac{ike\hbar^2}{2\mu c}\int\psi^*[\vec{z}\times\nabla]\psi\,d\vec{z} = k\frac{e\hbar}{2\mu c}\langle\vec{L}\rangle\,. \qquad (17)$$

Таким образом, в системах с функцией Гамильтона (9) значения механического и магнитного моментов связаны магнетоном Бора.

## 9. Свободная частица

При $V(|\vec{z}|) \equiv 0$ уравнение (13) определяет множество стационарных состояний свободной частицы,

$$\psi_{\vec{P}} = \tau^{-1/2}\exp\{\tfrac{i}{\hbar}\vec{P}\vec{z}\}\,, \qquad \tau = \int d\vec{z}\,, \qquad (18а)$$

которым соответствуют следующие значения энергии и импульса:

$$\langle E\rangle_{\vec{P}} = \frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \frac{3}{2\mu}(\delta p)^2, \qquad \langle\vec{p}\rangle_{\vec{P}} = \vec{P}. \qquad (18б)$$

Соотношения (18б) устанавливают физический смысл слагаемого $3(\delta p)^2/2\mu$ в операторе (12) – энергия свободной частицы с нулевым значением импульса ("субквантовая" энергия свободной частицы).

## 10. Гармонический осциллятор

При $V(|\vec{z}|) = \mu\omega^2\vec{z}^2/2$ из (12) следует оператор,

$$O(H) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{\mu\omega^2}{2}\vec{z}^2 + \varepsilon\,, \qquad \varepsilon = \frac{3}{2\mu}(\delta p)^2 + \frac{3\mu\omega^2}{2}(\delta z)^2, \qquad (19а)$$

отличающийся от соответствующего оператора общепринятой квантовой механики лишь постоянной $\varepsilon$. Поэтому задача (13) имеет известные собственные функции [58, 59], например, $\psi_{n_1 n_2 n_3}(z_1,z_2,z_3)$, $n_j = 0,1,\ldots$, при собственных значениях

$$\langle E\rangle_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega(n_1+n_2+n_3+\tfrac{3}{2}) + \varepsilon\,. \qquad (19б)$$

"Субквантовый" вклад $\varepsilon$, единый для всех собственных значений, не влияет на разность энергетических уровней.

## 11. Электрон в кулоновском поле

При $V(|\vec{z}|) = -Ze^2/|\vec{z}|$ из (12) следует:

$$O(H) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{3}{2\mu}(\delta p)^2 - Ze^2 v(z)\,. \qquad (20а)$$

Здесь $z = |\vec{z}|$, а функция $v$ определяется конструкцией $\alpha_0$:

$$v(z) = \frac{4\pi}{z}\int_0^z \xi^2\alpha_0(\xi)\,d\xi + 4\pi\int_z^\infty \xi\,\alpha_0(\xi)\,d\xi\,. \qquad (20б)$$

Задача (13) для оператора (20а) может быть приближенно решена в предположении о малости "субквантовой" неопределенности $\delta z$. При этом, как следует из (11б), $\alpha_0(\xi)$ существенно отлична от нуля лишь при малых $\xi$, что позволяет оценить функцию (20б): $v(z\to\infty)\to z^{-1}$, $v(0)\sim(\delta z)^{-1}$. Поэтому при малых $\delta z$ функция $v(z)$ может быть представлена в виде суммы невозмущенной части $z^{-1}$ и возмущения $(v(z)-z^{-1})$. В таком подходе задача (13) определяет (в 0-м приближении) стационарные состояния $\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(z)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$, известные из соответствующей задачи общепринятой квантовой механики [58, 59], и (в 1-м порядке) спектр значений энергии (подробнее см. [52, 57]):

$$\langle E\rangle_{n\ell m} = -\frac{Ze^2}{2an^2} + \frac{3}{2\mu}(\delta p)^2 + \frac{Ze^2}{2an^2}\varepsilon_{n\ell}\,, \qquad (21а)$$

$$\varepsilon_{n\ell} \approx 2\pi\left(\frac{2Z}{n}\right)^{2(\ell+1)}\frac{C_{n+\ell}^{2\ell+1}}{(2\ell+3)!}\int_0^\infty\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2(\ell+1)}\xi^2\alpha_0(\xi)\,d\xi\,. \qquad (21б)$$

Здесь $a = \hbar^2/\mu e^2$ – боровский радиус, $C_k^m$ – биномиальные коэффициенты, $n = 1,2,\ldots$; $\ell = 0,1,\ldots,n-1$; $m = -\ell,\ldots,\ell$.

В (21а) первое слагаемое есть $n^2$-кратно вырожденный уровень энергии водородоподобного атома в общепринятой квантовой механике. Второе слагаемое не влияет ни на разность уровней, ни на энергию ионизации (следствие (18б)). Наконец, третье снимает вырождение по $\ell$, что изменяет разность уровней. В частности, из (21) следует:

$$\Delta E_{ns,np} = \langle E\rangle_{n00} - \langle E\rangle_{n1m} \approx \frac{2e^2Z^4}{an^3}\left(\frac{\delta z}{a}\right)^2, \qquad (22)$$

что по зависимости от $Z$ и $n$ напоминает лэмбовский сдвиг. Это позволяет сделать оценку "субквантовой" неопределенности компоненты координаты: $\delta z \approx 4{,}26 \cdot 10^{-12}$ см, если (22) равно лэмбовскому сдвигу ($\Delta E_{2s,2p}/\hbar$ = 1057,90 МГц при $Z$ = 1 [60]), и $\delta z < 10^{-14}$ см, если смещение (22) отражает эффект, выходящий за пределы точности измерений [60].

## 12. Проблема дисперсий

До сих пор мы говорили о значениях $\langle A \rangle$ физических величин, понимаемых в смысле средних (2б), или, что то же самое, (3а). Такое значение должно характеризоваться дисперсией $\langle (\Delta A)^2 \rangle$, представляющей собой среднее квадрата отклонения величины $A$ от ее среднего значения $\langle A \rangle$. В рассматриваемых модификациях квантовой механики математическим образом величины $A$ является оператор $O(A)$, и одновременно классическая функция $A(q,p,t)$. Поэтому логично записать: в квантово-механическом формализме –

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \int \psi^*(q,t) \{ O(A) - \langle A \rangle_\psi \}^2 \psi(q,t) dq, \quad (23а)$$

а в статистическом формализме –

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \int \{ A(q,p,t) - \langle A \rangle_F \}^2 F(q,p,t) dq dp. \quad (23б)$$

Проблема состоит в том, что выражения (23а) и (23б) не эквивалентны. Это вытекает непосредственно из взаимосвязей (1б) и (3б) и является прямым следствием не-неймановости [44] правила (1).

Выбор определения (23а) приводит к тому, что максимальная определенность значения $\langle A \rangle$ (минимальная, равная нулю дисперсия) достигается в состояниях $\psi_\alpha$, удовлетворяющих задаче на собственные значения:

$$O(A)\psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha, \qquad \alpha = \alpha^*. \quad (24а)$$

Этот вывод при $A = H$ согласуется с понятием стационарных состояний, определяемых уравнением (3в). Однако выбор (23а) ведет к частичному нарушению "последовательной вероятностной схемы" теории.

Выбор определения (23б) сохраняет "последовательную вероятностную схему". Однако теперь дисперсия в состояниях $\psi_\alpha$ в общем случае не равна нулю (и даже не минимальна), т.е. задача (24а) перестает играть фундаментальную роль. Состояния $\psi_D$ максимальной определенности значения $\langle A \rangle$ в этом случае будут удовлетворять уравнению [44]:

$$\left[ O(A^2) - 2\langle A \rangle_D O(A) + (\langle A \rangle_D)^2 \right] \psi_D = D\psi_D, \quad D \geq 0. \quad (24а)$$



В случае $A = H$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (24б) содержит оператор $\nabla^4$, что в сочетании с недоопределенностью "субквантовых" функций значительно затрудняет дальнейшие исследования.

Следует отметить, что проблема дисперсий существенно связана со свойствами "субквантовых" функций. В частности, если набор $\{\varphi_k\}$ таков, что $O(A^2) \approx (O(A))^2$, или $[O(A^2), O(A)]_- = 0$, то состояния $\psi_\alpha$ и $\psi_D$ практически сопадают (в последнем случае точно). Тем не менее, проблема выбора выражения для количественного подсчета дисперсии ((23а), или (23б)) остается.

## Заключение

Прежде всего подчеркнем: все исходные постулативные положения, на которых базируется настоящая работа, изложены в § 1. Результаты §§ 2–13 являются их прямыми следствиями. По ходу исследования были сделаны лишь два упрощающих предположения – сохранение группы симметрий при квантовании (§ 8) и малость "субквантовой" неопределенности координаты (§ 12).

Следует отметить еще, что часто встречающийся в тексте термин "субквантовый" в данной работе отражает лишь тот факт, что соответствующее ему понятие, во-первых, не имеет аналога ни в классической, ни в общепринятой квантовой теории, во-вторых, определяется набором функций $\{\varphi_k\}$, задание которого требуется до квантования.

Совокупность следствий, выявленных в §§ 2–13, показывает, что введение совместных неотрицательных координатно-импульсных распределений в квантовую механику может приводить к теориям, изучение которых по крайней мере не бессмысленно. Основываясь на результатах §§ 2–13, уже сейчас можно сделать ряд осторожных выводов, основными из которых, на наш взгляд, являются следующие:

1. Существование $F \geq 0$ в модифицированных вариантах квантовой механики позволяет вычислять вероятность попадания системы в сколь угодно малый объем фазового пространства, что фактически соответствует точке зрения де-Бройля, Эйнштейна и др., рассматривавших координату и импульс системы как одновременно существующие физические реальности. Как ни странно, это не противоречит соотношению неопределенностей Гайзенберга. Более того, понятия неопределенностей (см. § 6) становятся обширнее и принципиальнее, чем в общепринятой квантовой механике.

2. Введение в квантовую механику неотрицательных координатно-импульсных распределений сказывается (§§ 10–12) на результатах конкретных задач. Это дает надежду на то, что правомерность подобных модификаций квантовой механики можно проверить экспериментально.

Литература


1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Phys. Rev., 1935, 47, 777.
2. Bohr N. Phys. Rev., 1935, 48, 696.
3. Фок В.А. УФН, 1936, XVI, вып. 4, 436.
4. Einstein A. Dialectica, 1948, II, 320.
5. Bohm D. Phys. Rev., 1952, 85, 166.
6. De-Broglie L. La Physique Quantique Reatera-t-elle Indeterministe?, Paris, 1953, 1.
7. Schrödinger E. Nuovo Cim., 1955, 1, Ser. 10, 5.
8. Wigner E.P. Amer. J. Phys., 1963, 31, 6.
9. Moyal I.E. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1949, 45, 99.
10. Bopp F. Ann. Inst. H. Poincaré, 1956, XV, 81.
11. Cohen L. Philos. Sci., 1966, 33, 317.
12. Tyapkin A.A. Development of statistical interpretation of quantum mechanics by means of the joint coordinate-momentum representation, JINR, E4-3687, Dubna, 1968.
13. Wigner E.P. Phys. Rev., 1932, 40, 749.
14. Терлецкий Я.П. ЖЭТФ, 1937, 7, 1290.
15. Blokhintsev D.I. Journ. of Phys., 1940, 2, 71.
16. Климонтович Ю.Л., Силин В.П. ДАН, 1952, 82, 361.
17. Margenau H., Hill R.N. Prog. Theor. Phys., 1961, 26, 722.
18. Mehta C.L. J. Math. Phys., 1964, 5, 677.
19. Cohen L. J. Math. Phys., 1966, 7, 781.
20. Shankara T.S. Prog. Theor. Phys., 1967, 37, 1335.
21. Imre K., Ozizmir E., Rosenbaum M., Zweifel P.F. J. Math. Phys., 1967, 8, 1097.
22. Аринштейн Э.А., Гитман Д.М. Известия вузов,1967,Физика № 9, 113.
23. Коньков В.Л., Горшенков В.Н. Известия вузов,1968,Физика № 3, 135.
24. Курышкин В.В. Известия вузов, 1969, Физика № 4, 111.
25. Zlatev I.S. J. Phys., 1977, 6, 583.
26. Jannussis A., Streclass A., Vlachas A. Physika, 1981, A,107, 587.
27. Татарский В.Н. УФН, 1983, 139, 587.
28. Born M., Jordan P. Z. Physik, 1925, 34, 858.
29. Dirac P.A.M. Proc. Roy. Soc.(London), 1926, A, 110, 561.
30. Neuman J.Von. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. Physik, Kl, 1927, 245.
31. Weyl H. Z. Physik, 1927, 46, 1.
32. Temple G. Nature, 1935, 136, 179.
33. Tolman R.C. The Principles of Statistical Mechanics, N.Y., 1938.
34. Groenewold H.J. Physica, 1946, 12, 405.
35. Shewell J.R. Am. J. Phys., 1959, 27, 16.





36. Jordan T.F., Sudarshan E.C.G. Rev. Mod. Phys., 1961, 33, 515.
37. Agarwal G.S., Wolf E. Phys. Rev., 1970, 2D, 2161.
38. Cohen L. J. Math. Phys., 1970, 11, 3296.
39. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, 194.
40. Курышкин В.В. Известия вузов, 1971, Физика № 11, 103.
41. Зайцев Г.А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики, М.,"Наука", 1974.
42. Abellanas L., Alonzo L.H. J. Math. Phys., 1976, 17, 1363.
43. Широков Ю.М. ЭЧАЯ, 1979, 10, вып. 1, 5.
44. Kuryshkin V.V., Lyabis I.A., Zaparovanny Yu.I. Ann. Fond. L. de Broglie, 1978, 3, 45.
45. Wigner E.P. Perspectives in Quantum Theory, Cambridge, 1971, 25.
46. Курышкин В.В. Теоретическая физика, М., УДН, 1974, 78.
47. Kuryshkin V.V. Compt. Rend., 1972, 274, Seriè B, 1107.
48. Kuryshkin V.V. Ann. Inst. H.Poincaré, 1972, XVII, 81.
49. Kuryshkin V.V. The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics, London, 1977, 61.
50. Курышкин В.В., Терлецкий Я.П. Проблемы статистической физики и теории поля, М., УДН, 1976, 70.
51. Kuryshkin V.V. Int. J. Theor. Phys., 1973, 7, 451.
52. Kuryshkin V.V., Zaparovanny Yu.I. Compt. Rend., 1974, 277, Serié B, 17.
53. Lyabis I.A. Ann. Fond. L. de Broglie, 1978, 3, 177.
54. Запарованный Ю.И., Курышкин В.В. Проблемы статистической и квантовой физики, М., УДН, 1980, 107.
55. Самсоненко Н.В., Дубков С.Л. Известия вузов,1980, Физика № 4, 16.
56. Basu S., Lyabis I.A. Proc. Indian natn. Acad., 1983, A, 49, 509.
57. Сидорков Н.В. Известия вузов, 1983, Физика № 4, 107.
58. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики, М.,"Наука", 1976.
59. Давыдов А.С. Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
60. Taylor B.N., Parker W.H., Langenberg D.N. The Fundamental constants and Quantum Electrodynamics, N.Y., 1969.


Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1985 года