СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4 - 8491

Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ИСТОЧНИКАМИ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8491

Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ИСТОЧНИКАМИ

Боголюбов Н.Н. (мл.), Плечко В.Н. **Р4 - 8491**

Об асимптотическом поведении модельных систем с положительным взаимодействием и источниками

Исследован класс модельных задач с положительным взаимодействием вида и источниками в пределе неограниченной системы. Показано, что взаимодействие приводит к ослаблению источников. Обнаружено отсутствие фазовых переходов определенного типа в рассматриваемых модельных системах. Результаты проиллюстрированы на конкретной модели.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Bogolubov N.N. (jr.), Plechko V.N. **P4 - 8491**

On the Asymptotical Behaviour of the Model Systems with Positive Interaction and Sources

The class of the model systems with positive interaction of JJ^+ type and sources is investigated in the endless system limit. It is shown, that the interaction leads to weakening of the sources. Absence of the phase transitions of a certain type is found. The results are illustrated on the concrete model.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

Как известно, значительный прогресс в понимании ряда физических явлений / сверхтекучесть, сверхпроводимость и др. / был достигнут в современной статистической физике благодаря удачно построенным моделям. В настоящее время модельный подход к исследованию квантовых статистических систем общепринят, причём особый интерес представляют решаемые задачи. Исследуя их, можно быть уверенным, что полученные результаты отражают свойства самой модели и не искажены ошибками приближённого расчёта. Но, во-первых, число непосредственно решаемых модельных задач невелико, а во-вторых, этим свойством обладают, как правило, лишь простейшие модели, не всегда достаточно хорошо описывающие реальные физические системы.

В то же время, в соответствии с одной из основных концепций статистической механики, физический интерес представляют лишь предельные при $N \to \infty$ характеристики системы /N - число частиц /.

В этой ситуации эффективным средством исследования ряда модельных систем является математически строгий подход, позволяющий получить асимптотически точное решение x/ задачи. Впервые такой подход был применён Н.Н.Боголюбовым в работе [I], где дано строгое обоснование более ранних работ по теории сверхпро-

---

x/ Т.е. решение, переходящее в точное в термодинамическом пределе $N \to \infty$, $A \to \infty$, $A/N = const$. Здесь A - аддитивные величины /объём и т.д. /.

водимости для особого случая нулевой температуры $\theta = 0$. Впоследствии одним из авторов / Н.Н.Б. / была построена специальная техника исследования такого и других типов задач, охватывающая общий случай $\theta \geqslant 0$ /см, в частности [2-4] /. Эти методы нашли применение при изучении квазиспиновых моделей [5-6], в теории магнетиков [7], при исследовании некоторых моделей ферроэлектриков [8], в теории лазеров [9] и в некоторых других задачах статистической механики.

В данной работе с единой точки зрения рассматривается достаточно широкий класс модельных задач с положительным взаимодействием с источниками. Следует отметить, что некоторые конкретные модели из этого класса исследовались ранее в работах [4,5,IO]. Мы сформулируем и исследуем задачу как математическую, а затем проиллюстрируем полученные результаты на конкретной модели /модель Изинга с дальнодействием [IO] /.

Рассмотрим класс модельных гамильтонианов вида :

$$H_N = T_N + Ng\, J_N \overset{+}{J}_N - N\left(\overset{*}{\nu} J_N + \nu \overset{+}{J}_N\right),\ g>0. \quad /I/$$

Здесь N -или число частиц, или пропорциональная ему величина, g / $g>0$ /, ν и ν^*- параметры взаимодействия; $T_N = T_N^+$, J_N и J_N^+ - операторы, зависящие параметрически от N. В конкретных моделях обычно T_N описывает "собственно систему", второе слагаемое в /I/ - взаимодействие, а последнее слагаемое /источники x/ / - внешнее воздействие на "собственно систему" /например, действие внешнего магнитного поля в моделях магнетиков/. Иногда источники вводят в гамильтониан искусственно для снятия статистического вырождения /квазисредние, [II] /.

x/ "Источниками" мы называем третье слагаемое в /I/ ; такая терминология используется в некоторых конкретных моделях /см. например, [II] /.

В соответствии с общими принципами подхода [2], построим для модельного гамильтониана /I/ "аппроксимирующий" гамильтониан $H_N^o(C)$, зависящий от комплексного параметра C x/ :

$$H_N^o(C) = T - N\left(\overset{*}{z} J + z \overset{+}{J}\right) - Ng\, C\overset{*}{C}, \quad /2/$$

где $z = \nu - gC$. Отметим, что оператор /2/ имеет более простую структуру, чем /I/, поскольку не содержит уже слагаемого типа $J\overset{+}{J}$, в частности, он может быть "точнорешаемым" при конечных N, даже если /I/ этим свойством и не обладает. При специальном выборе параметра С и при некоторых дополнительных предположениях мы докажем асимптотическую близость свободных энергий $f_N = f[H_N]$ и $f_N^o = f[H_N^o]$ и средних $\langle J \rangle_H$ и $\langle J \rangle_{H^o}$, где, как обычно :

$$f[\mathcal{U}] = -\frac{\theta}{N} \ln \operatorname{Tr} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\theta}},\ \mathcal{U} = \overset{+}{\mathcal{U}}, \quad /3/$$

$$\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathcal{U}} = \frac{\operatorname{Tr} \mathcal{B} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\theta}}}{\operatorname{Tr} e^{-\frac{\mathcal{U}}{\theta}}},\ \mathcal{U} = \overset{+}{\mathcal{U}}. \quad /4/$$

Описанная схема характерна для всего подхода [I-IO]. В этой связи следует сказать, что термодинамическая эквивалентность модельного и аппроксимирующего гамильтонианов может исследоваться и непосредственно на уровне операторов Гамильтона и сразу при неограниченном числе частиц [I2-I4]. В таком подходе приходится иметь дело, в частности, с пространством состо-

x/ Индекс N иногда для краткости опускаем.

яний, на котором действует гамильтониан.

Сформулируем дополнительные условия. Будем предполагать ограниченными следующие средние:

$$\langle J_N \rangle_{\bar{H}_N^\circ} \leq M_1 , \qquad /5/$$

$$\langle K_N \overset{+}{K}_N + \overset{+}{K}_N K_N \rangle_{\bar{H}_N^\circ} \leq 2M^2, \qquad /6/$$

где $K_N = \bar{H}_N^\circ J_N - J_N \bar{H}_N^\circ$, $\bar{H}_N^\circ = H_N^\circ(\bar{C}_N)$.
Здесь M_1 и M предполагаются не зависящими от N , а $\bar{C}_N$ – специально выбранное значение параметра С /см./I7/,/26//, $\bar{H}_N^\circ = H_N^\circ(\bar{C}_N)$. Условия /5-6/ автоматически выполняются, в частности, если операторы, там фигурирующие, удовлетворяют следующим ограничениям по норме :

$$\| J_N \| \leq M_1 , \| T_N J_N - J_N T_N \| \leq M_2 , \| J_N \overset{+}{J}_N - \overset{+}{J}_N J_N \| \leq \frac{M_3}{N} . \qquad /7/$$

При этом для величины M из /6/ находим, используя полученное ниже независимым образом неравенство /37/ :

$$M = M_2 + M_3 |\nu| . \qquad /8/$$

Для дальнейшего удобно ввести специальное обозначение $\tilde{H}$ для H при $g = 0$:

$$\tilde{H} = T - N(\nu \overset{+}{J} + \overset{*}{\nu} J). \qquad /9/$$

Заметим, кстати, что

$$H_N^\circ(c) = \tilde{H}_N(z) - gN|c|^2; \quad f[H^\circ(c)] = f[\tilde{H}(z)] - g|c|^2. \qquad /10/$$

Будем считать, что гамильтониан /9/ имеет достаточно простую структуру, так что соответствующая плотность свободной энергии $\tilde{f}_N = f[\tilde{H}_N]$ /а вместе с тем и $f[H_N^\circ]$/ существует, может быть вычислена в явном виде x/ и обладает следующим свойством

---

x/ Или по каким либо иным причинам $f[\tilde{H}]$ удобнее для изучения, чем $f[H]$ при $g \neq 0$.

симметрии:

$$\tilde{f}_N(\nu, \overset{*}{\nu}) = \tilde{f}_N(|\nu|^2) = \tilde{f}_N(\tau^2), \text{где } \tau = |\nu| . \qquad /11/$$

Очевидно, можно рассматривать $\tilde{f}_N$ как чётную функцию τ , $\tilde{f}_N(\tau) = \tilde{f}_N(-\tau)$, заданную на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$. При этом будем предполагать, что $\tilde{f}_N(\tau)$ принадлежат классу дважды непрерывно дифференцируемых во всей области определения функций[5/] и существует предельная функция $\tilde{f}_\infty(\tau) = \tilde{f}_\infty(-\tau)$ из того же класса, причём на всяком замкнутом множестве $|\tau| \leq R$, $R > 0$, последовательности $\tilde{f}_N$, $\tilde{f}_N'$ и $\tilde{f}_N''$ равномерно сходятся соответственно к $\tilde{f}_\infty$, $(\tilde{f}_\infty)'$, $(\tilde{f}_\infty)''$. Обозначим, в частности, через η_N оценку модуля разности $\tilde{f}_N$ и $\tilde{f}_\infty$:

$$| \tilde{f}_N(\tau) - \tilde{f}_\infty(\tau) | \leq \eta_N \to 0 \quad \text{при } N \to \infty . \qquad /12/$$

Отметим **также**, что из сделанных предположений вытекает равностепенная ограниченность последовательности $\{\tilde{f}_N''(\tau)\}$ на множестве $|\tau| \leq R$:

$$| \tilde{f}_N''(\tau) | \leq B . \qquad /13/$$

Следует сказать, что перечисленные условия на функции $\tilde{f}_N(\nu, \overset{*}{\nu})$ не ограничивают общности рассматриваемой задачи, поскольку являются либо строго доказанными при достаточно естественных предположениях[12,15], либо выполняются, когда $\tilde{f}_N$ может быть вычислена явно.

Несомненную эвристическую ценность представляет знание следствий, к которым приводит добавление в гамильтониан того или другого слагаемого. В нашем случае мы покажем, что в пределе $N \to \infty$ добавление в /9/ положительного взаимодействия $gNJ\overset{+}{J}$ приводит к ослаблению источников /в смысле неравенства /37//, что, в свою очередь, ведёт к специальному неравенству для средних /44/; в случае же отсутствия источников / $|\nu| = 0$ / взаимодействие оказывается несущественным при $N \to \infty$.

5/ Требованиям симметрии и дифференцируемости удовлетворяют, например, функции, представимые в виде ряда $\tilde{f}(\nu, \overset{*}{\nu}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\nu|^{2n}$.

Вернёмся к нашей задаче. Введём обозначение:

$$H^1(c) = H - H^\circ(c) = \mathcal{N} g(J-c)(\overset{+}{J}-\overset{*}{c}) \qquad /14/$$

и рассмотрим вспомогательный гамильтониан

$$H_t = H^\circ(c) + t\, H^1(c). \qquad /15/$$

Для соответствующей свободной энергии непосредственным дифференцированием можно доказать соотношения, не зависящие, кстати, от конкретной структуры операторов H° и H^1 [2]:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{N}}\langle H_1(c)\rangle_{H_t}, \quad \frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} \le 0; \qquad /16/$$

отсюда непосредственно следует

$$0 \le f_{\mathcal N} - f_{\mathcal N}^\circ(c) \le \frac{1}{\mathcal N}\langle H^1(c)\rangle_{H^\circ(c)}. \qquad /17/$$

Очевидно, центральная часть неравенств /17/ минимальна при выборе C из условия абсолютного максимума функции $f_{\mathcal N}^\circ(c)$, что приводит к комплексному уравнению:

$$C = \langle J_{\mathcal N}\rangle_{H_{\mathcal N}^\circ(c)}. \qquad /18/$$

Ниже показано, что оно всегда имеет единственное и ограниченное по модулю решение, которое мы обозначим $\overline{C}_{\mathcal N}$. Полагая $C = \overline{C}_{\mathcal N}$ в /17/, находим x/

$$0 \le f_{\mathcal N} - f_{\mathcal N}^\circ(\overline{C}_{\mathcal N}) \le g\left\langle (J-\langle J\rangle_{\overline{H}_{\mathcal N}^\circ})(\overset{+}{J}-\langle \overset{+}{J}\rangle_{\overline{H}_{\mathcal N}^\circ})\right\rangle_{\overline{H}_{\mathcal N}^\circ}. \qquad /19/$$

Используя далее специальное вспомогательное неравенство [2], можно оценить правую часть /19/ через вторые производные от свободной энергии; получаем

$$0 \le f_{\mathcal N} - f_{\mathcal N}^\circ(\overline{C}_{\mathcal N}) \le g\frac{1}{\mathcal N}\left(-\frac{\partial^2 f^\circ}{\partial\nu\partial\nu^*}\right) + g\left(-\frac{\partial^2 f^\circ}{\partial\nu\partial\nu^*}\right)^{2/3}\frac{(2M^2)^{1/3}}{\mathcal{N}^{2/3}}, \qquad /20/$$

где $2M^2$ определяется формулой /6/ или /8/.

x/ Для определённого класса модельных систем можно непосредственно показать, что коррелятор в правой части /19/ суть величина порядка $1/\mathcal N$ при $\mathcal N \to \infty$.

Специально оговоримся, что в правой части /20/ при дифференцировании $f_{\mathcal N}^\circ(\nu,\overset{*}{\nu};\overline{C}_{\mathcal N})$ параметр $\overline{C}_{\mathcal N}$ считается фиксированным. Другими словами, в формуле /20/

$$\partial^2 f/\partial\nu\partial\nu^* = \left[\partial^2\tilde{f}(z,\overset{*}{z})/\partial z\,\partial\overset{*}{z}\right]_{z=\nu-\overline{C}_{\mathcal N}(\nu,\nu^*)}. \qquad /21/$$

В соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями относительно функций $\{f_{\mathcal N}\}$ величины /21/ ограничены при всех $\mathcal N$:

$$\left|(\partial^2 f_{\mathcal N}^\circ/\partial\nu\partial\nu^*)\big|_{c=\overline{c}_{\mathcal N}(\nu,\overset{*}{\nu})}\right| \le B. \qquad /22/$$

Таким образом, имеем следующую оценку для разности свободных энергий, вычисляемых по модельному и аппроксимирующему гамильтонианам:

$$0 \le f_{\mathcal N} - f_{\mathcal N}^\circ(\overline{C}_{\mathcal N}) \le \frac{gB}{\mathcal N} + \frac{g(2M^2B^2)^{1/3}}{\mathcal{N}^{2/3}}, \qquad /23/$$

где $2M^2$ определяется формулой /6/ или /8/.

Следует сказать, что требование ограниченности вторых производных /22/ является принципиальным и обусловлено положительностью взаимодействия. В случае отрицательного взаимодействия имеет место неравенство, аналогичное /20/ [2], где в правую часть входит

$$\partial^2 f_{\mathcal N}/\partial\nu\,\partial\overset{*}{\nu}, \qquad /24/$$

которая для многих конкретных моделей, представляющих существенный интерес, неограничена в точке фазового перехода при $\mathcal N\to\infty$. Вместе с тем, производная /24/ по сравнению с производной /21/ "проще" зависит от ν, ν^*, поскольку в /21/ есть ещё сложная зависимость от ν, ν^* через $\overline{C}_{\mathcal N}(\nu,\overset{*}{\nu})$. "Нормальная" зависимость $f_{\mathcal N}$ от ν, ν^* и позволяет в случае отрицательного взаимодействия $(g<0)$ получить /специальным образом усредняя аналог неравенства /20// близость свободных энергий, несмотря на неограниченность вторых производных. Но для положительного взаимодействия в случае неограниченности $\partial^2\tilde{f}/\partial z\,\partial z^*$ при $\mathcal N\to\infty$ для некоторых значений параметров, можно привести примеры, когда близости свободных энергий модельной и аппроксимирующей систем вообще нет. В случае же ограниченных $\partial^2 \tilde{f}_N / \partial z \partial z^*$, когда близость свободных энергий имеет место /23/, было бы интересно попытаться обобщить схему работы [2] с целью получить для случая положительного взаимодействия оценку близости f_N и f_N°, не зависящую от B /22/. Однако на этом пути возникают существенные трудности, связанные со сложной зависимостью производных в правой части /20/ от ν, ν^*.

Итак, справедлива оценка /23/. С другой стороны, учитывая /10/ и /12/, имеем :

$$|f_\infty^\circ(c) - f_N^\circ(c)| \leq \eta_N \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \qquad /25/$$

Используя определение параметров $\bar{c}_N$ и $\bar{c}_\infty$:

$$f_N^\circ(\bar{c}_N) = \underset{(c)}{\overset{abs}{\max}} f_N^\circ(c), \quad f_\infty^\circ(\bar{c}_\infty) = \underset{(c)}{\overset{abs}{\max}} f_\infty^\circ(c) \qquad /26/$$

и учитывая /23/, находим окончательно :

$$|f_N - f_\infty^\circ(\bar{c}_\infty)| \leq \varepsilon_N + \eta_N = \varepsilon_N' \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \qquad /27/$$

Здесь ε_N определяется правой частью /23/. Асимптотическая близость свободных энергий, таким образом, доказана.

Ниже нам потребуются некоторые общие свойства функций $\tilde{f}$ и f. При этом, наряду с ν и ν^*, мы будем использовать вещественные независимые переменные τ и φ :

$$\tau = |\nu| = (\nu\nu^*)^{1/2}, \quad \tau \geq 0,$$
$$e^{i\varphi} = (\nu/\nu^*)^{1/2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \qquad /28/$$

В дальнейшем важную роль будут играть следующие фундаментальные неравенства /свойство выпуклости/ :

$$-\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau^2} \geq 0, \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \geq 0, \qquad /29/$$

представляющие собой разновидность неравенства /16/.

В силу чётности и непрерывной дифференцируемости функции $\tilde{f}(\tau)$ имеем

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0. \qquad /30/$$

С учётом /29/ отсюда немедленно следует :

$$-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} = \left[\begin{matrix}\text{монотонно неубывающая} \\ \text{функция}\end{matrix}\right] \geq 0. \qquad /31/$$

Отметим ещё следующие очевидные равенства :

$$\langle J \rangle_H = -\frac{\partial f}{\partial \nu^*} = -\frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{e^{i\varphi}}{2},$$
$$\langle J \rangle_{\tilde{H}} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu^*} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}\frac{e^{i\varphi}}{2}. \qquad /32/$$

Рассмотрим теперь уравнение /18/, которое удобно записать как уравнение для определения комбинации $\bar{z} = \nu - g\bar{c}$:

$$\bar{z} + g\left(-\frac{\partial \tilde{f}(|\bar{z}|)}{\partial \bar{z}^*}\right) = \nu. \qquad /33/$$

Из /33/ и /32/ видно, что фазы чисел $\bar{z}$, $\bar{c}$ и ν совпадают, в частности, при вещественных источниках / $\nu = \pm\tau$ /, $\bar{z}$ и $\bar{c}$ вещественны. Для определения $\bar{\rho} = |\bar{z}|$ остаётся уравнение :

$$\rho + \frac{g}{2}\left(-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) = \tau, \qquad /34/$$

левая часть которого является непрерывной и монотонно возрастающей функцией от ρ /см./31//, при этом :

$$[\text{левая часть /34/}] = \begin{cases} 0, & \text{при } \rho = 0 \\ \geq \tau, & \text{при } \rho = \tau \end{cases}.$$

Следовательно, справедливы утверждения :

а/ уравнение /34/ всегда имеет единственное решение $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\tau)$, причём $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\tau)$, где $\tau \geq 0$, монотонно возрастающая непрерывная функция; $\bar{\rho}(0) = 0$. /35/

б/ выполняются неравенсва

$$0 \le \rho(\tau) \le \tau \quad \text{или} \quad |\bar{z}| \le |\nu|,^{x/} \qquad /36/$$

отсюда и из /5/, /18/следует также :

$$|\bar{c}| \le \min\{M_1, |\nu|/g\}, \qquad /37/$$

$$\max\{0, |\nu| - gM_1\} \le |\bar{z}| \le |\nu|.$$

Перейдём сейчас к доказательству асимптотической близости производных:

$$-\frac{\partial f_N}{\partial \nu^*} = \langle J_N \rangle_{H_N} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial f_\infty^\circ}{\partial \nu^*} = \bar{C}_\infty. \qquad /38/$$

Используя /38/ и /32/, находим :

$$-\frac{\partial^2 f_\infty^\circ}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{f}(\rho)}{\partial \rho^2}\Big|_{\rho=\bar{\rho}} \left(1 + \frac{g}{2}\frac{\partial^2 f_\infty^\circ}{\partial \tau^2}\right), \qquad /39/$$

следовательно,,

$$0 \geqslant \frac{\partial^2 f_\infty^\circ}{\partial \tau^2} \geqslant -\frac{2}{g}. \qquad /40/$$

Из /40/ с учётом /27/ получаем для функции $\Delta_N(\tau) = f_\infty^\circ - f_N$:

$$|\Delta_N(\tau)| \le \varepsilon_N, \quad \Delta''(\tau) \geqslant -\frac{2}{g}. \qquad /41/$$

Отсюда непосредственно следует [3,7] :

$$|\langle J_N \rangle_H - \bar{C}_\infty| \le 2(\varepsilon_N'/g)^{1/2}. \qquad /42/$$

С точностью до "с-числа" $H_N^\circ(\bar{C})$совпадает с $\tilde{H}_N(\bar{z})$, где $|\bar{z}|$ удовлетворяет /36/. Поэтому, в силу свойства монотонности /31/,неравенство /36/ приводит к следующему факту :

$$0 \le -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\bar{\rho}} \le -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\tau}, \qquad /43/$$

или $\quad |\langle J \rangle_{H_0}^{(N)}| \le |\langle J \rangle_{\tilde{H}}^{(N)}|.$

Переходя здесь к пределу $N \to \infty$ и учитывая /42/, имеем ещё

---

x/ Формулы /29/-/37/ справедливы как при „ $N < \infty$ ", так и в случае „ $N = \infty$ " .

одну форму проявления свойства ослабления источников /36/ :

$$|\langle J \rangle_H^{(\infty)}| \le |\langle J^* \rangle_{\tilde{H}}^{(\infty)}|. \qquad /44/$$

Как нетрудно видеть, при $\nu = \overset{*}{\nu} = 0$ решением уравнения /33/-/34/ является $\bar{z} = \bar{C} = 0$. В соответствии с определением /2/ в этом случае $H^\circ(\bar{C}) = T$, т.е. в пределе $N \to \infty$ положительное взаимодействие здесь оказывается несущественным при вычислении f_∞ и $(\partial f/\partial \nu)_{N\to\infty}$. Этот результат для некоторых конкретных моделей был получен ранее в работах [4,5,10] . Следует отметить, что в отличие от моделей с отрицательным взаимодействием [2], случай $|\nu| = 0$ для моделей класса /I/ может рассматриваться эквивалентным образом как в смысле „$\lim\limits_{\nu\to 0}\lim\limits_{N\to\infty}$", так и в смысле „$\lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{\nu\to 0}$" , т.е. квазисредние [II] здесь совпадают со средними.

В качестве примера модельной задачи, входящей в рассмотренный выше класс, приведём одномерную модель Изинга с положительным дальнодействием во внешнем поле, подробно исследованную в работе [10.]. Гамильтониан этой задачи имеет вид :

$$H_N = I\sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} + \frac{g}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N S_i S_j - h_0 \sum_{i=1}^N S_i, \qquad /45/$$

где $S_{N+1} = S_1$, $S_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g > 0$.

Очевидно, это выражение приводится к форме /I/ при $J = \overset{+}{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N S_i$; при этом выполняются условия /7/, где $M_1 = 1$, $M_2 = M_3 = 0$; $\nu = \overset{*}{\nu} = \frac{h_0}{2}$. В области $\theta \geqslant \theta_1 > 0, -\infty < h_0 < +\infty$ выполнены условия симметрии и дифференцируемости, налагаемые на $\tilde{f}_N(h_0)$, которая может быть вычислена явно. Неравенство/36/ означает здесь, что переход от $\tilde{H}_N(h_0)$к $H_N(h_0)$ в пределе $N \to \infty$ сводится к замене h_0 эффективным полем $\bar{h} = \bar{h}(h_0)$,

$|\bar{h}| \leq |h_0|$. Как и следовало ожидать из физических соображений, это приводит, в соответствии с /44/, к размагничиванию цепочки / $\langle J \rangle$ имеет физический смысл средней намагниченности/.

В заключение сделаем несколько замечаний.

Центральными результатами этой работы являются оценки /27/,/42/, неравенства /36/,/40/,/44/ и утверждение /35/. Интересно, что столь конкретные результаты получены сразу для целого класса модельных систем /I/. При этом фундаментальную роль сыграло свойство выпуклости /29/. Кроме того, мы существенно использовали положительность взаимодействия / $g > 0$ /. В случае $g < 0$ левая часть уравнения, аналогичного /34/, вообще говоря, не монотонна, вследствие чего это уравнение может иметь несколько решений, а утверждение /35/ - не иметь места; неравенство /40/ здесь нарушается и т.д. Тем не менее, можно ожидать, что подход с общих позиций и к таким задачам окажется полезным.

Физический смысл, который могут иметь неравенства /36/, /44/, уже показан. Важные выводы следуют и из утверждения /35/. Единственность и непрерывность решения $\bar{C}_\infty$ вдоль любой непрерывной кривой на плоскости ν означает, что если модель /9/ не имеет фазового перехода, при котором появляется "спонтанная упорядоченность" / $\lim\limits_{\nu \to 0} \lim\limits_{N \to \infty} \langle J \rangle_{\hat{H}} = 0$ /, то и модель с положительным взаимодействием/I/ не даёт такого фазового перехода. Эти соображения относятся самым непосредственным образом и к упомянутой модели Изинга с дальнодействием.

Авторы искренне признательны В.К.Федянину, Й.Г.Бранкову и В.А.Загребнову за полезные дискуссии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I.Н.Н.Боголюбов. "К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости". Препринт ОИЯИ, Р-5II, Дубна, I960.

2.Н.Н.Боголюбов /мл./. Вестник Моск. Унив., сер. физ., астр., №I, I966; Physica, , 32, 933, I966.

3.Н.Н.Боголюбов /мл./. ДАН СССР, I68, 4, I966.

4.Н.Н.Боголюбов /мл./. Препринты ИТФ-68-65, ИТФ-68-67,Киев,I968.

5. N.N.Bogoljubov(jr.), A.S.Shumovsky.Phys.Lett., 35A,380, 1971.

6.А.С.Шумовский. Препринт ИТФ-7I-56Р, Киев, I97I.

7.Й.Г.Бранков. Препринт ОИЯИ, Р4-7000, Дубна, I973.

8.А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. Препринт ОИЯИ,Р4-8403 ,Дубна,I974.

9.Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Точнев. Препринт ОИЯИ, Р4-7735, Дубна, I974.

I0.С.С.Лапушкин, В.Н.Плечко. Препринт ИТФ-73-I49Р,Киев,I973.

II.Н.Н.Боголюбов. " Квазисредние в задачах статистической механики". Препринт ОИЯИ, Р-78I, Дубна, I96I. Избранные труды, том 3, " Наукова Думка", Киев, I97I.

I2.Д.Рюэль. " Статистическая механика. Строгие результаты". Издательство "Мир", Москва, I97I.

I3. R.Haag, N.M.Hugenholtz, M.Winnik.Comm.Math.Phys., 5, 215, 1967.

I4.Д.Я.Петрина. ТМФ, том 4, 389, I970.

I5.N.N.Bogoljubov (jr.).Physica, 41, 601, 1969.

I6. С.С.Лапушкин. Препринт ОИЯИ Р4-7738, Дубна, I974.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря I974 года.