СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8475

М.Х.Ханхасаев

ТЕОРИЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ И МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8475

М.Х.Ханхасаев

ТЕОРИЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ И МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

1. В последние годы наблюдается повышенное внимание к теории потенциального рассеяния, ибо интенсивно ведущиеся на ускорителях эксперименты по рассеянию частиц высокой энергии на ядрах требуют для своей интерпретации знания амплитуды рассеяния на силовом центре. Наиболее популярным в настоящее время является эйкональное приближение для амплитуды рассеяния [1-3] ($\hbar = 2 \cdot m = 1$)

$$f(\vec{q}) = -\frac{ik}{2\pi} \cdot \int d^2\vec{b} \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}} \left(e^{i\chi_0(\vec{b})} - 1 \right), \qquad /1/$$

где переданный импульс $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, $\vec{k}_1$ - начальный импульс, $\vec{k}_2$ - конечный импульс, а m - масса частицы.

Линейная по потенциалу фаза $\chi_0(\vec{b})$ дается следующим выражением

$$\chi_0(\vec{b}) = -\frac{1}{2k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot V(\vec{b} + \vec{n} z) . \qquad /2/$$

Здесь $V(\vec{r})$ - потенциал взаимодействия. Интегрирование в выражении /2/ проводится по прямолинейной траектории, перпендикулярной переданному импульсу $\vec{q}$, что достигается выбором направления оси z /единичный вектор $\vec{n}$ /, параллельной среднему импульсу $\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$. Выбор такого направления для оси z делает амплитуду /1/ инвариантной относительно обращения времени.

Успех эйкональной формулы /1/ для амплитуды рассеяния в описании взаимодействия частиц высокой энергии с ядрами [2,3] положил начало интенсивным исследованиям точности и пределов применимости этого приближения [4-6]. Строгим и твердо установленным результатом является справедливость эйконального представления /1/ для описания высокоэнергетического рассеяния частицы на гладком потенциале и в области малых углов рассеяния. Однако до сих пор нет ясности в задаче описания высокоэнергетического потенциального рассеяния на конечные углы и, в частности, в вопросе об обобщении представления /1/ на этот случай. В работе /7/ проводилось обсуждение этой проблемы и отмечалась необходимость систематического исследования поправок к эйкональному приближению.

Нам представляется интересным и весьма перспективным новый подход к изучению полной амплитуды высокоэнергетического потенциального рассеяния с помощью обобщения известного метода фазовых функций для случая парциальных амплитуд /8–11/. Эффективность метода фазовых функций для получения приближенных значений парциальных параметров в задаче потенциального рассеяния хорошо известна. Настоящее исследование посвящено анализу эйконального представления /1/ для амплитуды рассеяния в рамках рассматриваемого подхода. В данной работе выводятся основные уравнения теории. В частности, в п. II настоящей работы получено уравнение для функции рассеяния $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$, которая имеет ясный физический смысл амплитуды упругого рассеяния на определенным образом обрезанном потенциале $V_\xi(\vec{r})$ / ξ - параметр обрезания/. В настоящем подходе можно ввести также новую величину $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$, $\vec{s}_0=\frac{1}{2}\vec{q}$, которую, по аналогии с обычным методом фаз/8,9/, назовем полной фазовой функцией. Введение такой величины оказывается весьма эффективным для анализа высокоэнергетического потенциального рассеяния. В п. III для полной фазовой функции выводится точное уравнение. На основе этого уравнения получено приближение /1/ для амплитуды рассеяния.

II. Следуя основной идее метода фазовых функций, представим амплитуду $f(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ упругого рассеяния частицы на заданном потенциале $V(\vec{r})$ как предел последовательности амплитуд рассеяния $f_S(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ для последовательности "обрезанных" потенциалов $V_S(\vec{r})$. Потенциал $V_S(\vec{r})$ представляет собой ту часть потенциала $V(\vec{r})$, которая лежит в области, ограниченной поверхностью S. Таким образом, искомая амплитуда $f(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ является амплитудой рассеяния $f_S(\vec{k},\vec{k})$, когда поверхность S обрезает потенциал на бесконечном удалении от рассеивающего центра, где $V(\vec{r})\to 0$.

Такой подход был предложен в работе /10/, где амплитуда f рассматривалась как предел последовательности амплитуд $f(R,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ для последовательности обрезанных потенциалов $(0\le R<\infty)$

$$V_R(\vec{r}) = V(\vec{r})\cdot\theta(R-r)\,, \qquad /3/$$

где $\theta(x)$ - обычная θ-функция

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\,.\end{cases} \qquad /4/$$

Для амплитуды $f(R,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ в работе /10/ было получено точное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

В основе данного подхода, как показано в работе /11/, лежит определенная свобода в выборе формы поверхностей S, "послойно" обрезающих потенциал. Оказывается, можно получить некоторое уравнение для амплитуды $f_S(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$, не конкретизируя способ обрезания потенциала. Будем исходить из следующих интегральных уравнений для волновой функции, соответствующей потенциалу $V(\vec{r})$:

$$\psi_S(\vec{r},\vec{k}_1) = \exp(i\vec{k}_1\cdot\vec{r}) + \int d\vec{r}\,'G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',k)\cdot V_S(\vec{r}\,')\cdot\psi_S(\vec{r}\,',\vec{k}_1)\,, \qquad /5/$$

и из выражения для амплитуды рассеяния

$$f_S(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\cdot\exp(-i\vec{k}_2\cdot\vec{r})V_S(\vec{r})\cdot\psi_S(\vec{r},\vec{k}_1)\,. \qquad /6/$$

Беря вариационные производные по поверхности S в уравнениях /5/ и /6/ и используя симметрию функции Грина

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',k) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = G^{(+)}(\vec{r}\,',\vec{r},k)\,, \qquad /7/$$

нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$\frac{\delta}{\delta S}\cdot f_S(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\cdot\psi_S(\vec{r},\vec{k}_1)\cdot\psi_S(\vec{r},-\vec{k}_2)\cdot\frac{\delta}{\delta S}V_S(\vec{r}). \quad /8/$$

В общем случае выражение /8/ устанавливает связь между вариациями амплитуды и некоторыми вариациями потенциала, поскольку под S можно понимать произвольную совокупность параметров, характеризующих потенциал. Для нас существенно, что если вариации потенциала представляют собой "послойное" обрезание последнего некоторой последовательностью поверхностей S, то соотношение /8/ является уравнением для величины $f_S(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$.

С целью исследования эйконального представления /1/ для амплитуды рассеяния выберем способ обрезания потенциала, учитывающий цилиндрическую симметрию задачи $(0 \le \xi < \infty)$

$$V_\xi(\vec{r}) = V(\vec{r})\cdot\theta(\xi - |z|), \quad /9/$$

где $\theta(x)$ - обычная θ-функция /4/.

Следовательно, потенциал $V_\xi(\vec{r})$ представляет собой часть потенциала $V(\vec{r})$, расположенную между двумя плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой, которую выберем за ось z, и отстоящими от начала координат симметрично на расстоянии $z = \pm\xi$.

Для такого способа обрезания /9/ потенциала $V(\vec{r})$ $\frac{\delta}{\delta S} = \frac{\partial}{\partial \xi}$, и уравнение /8/ примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d^2\vec{b}\{V(\vec{r}^{(+)})\cdot\psi_\xi(\vec{r}^{(+)},\vec{k}_1)\cdot\psi_\xi(\vec{r}^{(+)},-\vec{k}_2)+$$

$$+V(\vec{r}^{(-)})\cdot\psi_\xi(\vec{r}^{(-)},\vec{k}_1)\cdot\psi_\xi(\vec{r}^{(-)},-\vec{k}_2)\}. \quad /10/$$

Здесь $\vec{b}$ - прицельный параметр, векторы $\vec{r}^{(\pm)} = (\vec{b}, \pm\xi)$, а интегрирование ведется по всей плоскости прицельного параметра.

Будем предполагать теперь, что потенциал является сферически симметричным. Воспользуемся свободой выбора направления оси z и направим ее по среднему импульсу $\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$. Такая система координат оказывается выделенной в рассматриваемом подходе. Действительно, нетрудно показать, что в этом случае уравнение /10/ существенно упрощается и приводится к форме

$$\frac{\partial}{\partial\xi}f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int d^2\vec{b}\cdot V(r)\cdot\psi_\xi(\vec{r},\vec{k}_1)\cdot\psi_\xi(\vec{r},-\vec{k}_2), \quad /11/$$

где теперь $\vec{r} = (\vec{b},\xi)$, $\vec{k}_1 = (\vec{s}_0, t_0)$, $\vec{k}_2 = (-\vec{s}_0, t_0)$, $t_0 = \sqrt{k^2 - s_0^2}$.

В соответствии с цилиндрической симметрией задачи функцию Грина /7/ представим в виде

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k) = -\frac{i}{8\pi^2}\cdot\int d^2\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{s}(\vec{b}-\vec{b}')}}{t}\cdot e^{it|z-z'|}, \quad /12/$$

где

$$t = \begin{cases}\sqrt{k^2 - s^2}, & s < k\\ i\sqrt{s^2 - k^2}, & s > k.\end{cases} \quad /13/$$

Такое представление /12/ для функции Грина использовалось Зоммерфельдом в исследованиях по теории дифракции [12]. Заметим, что при $k \to \infty$ из уравнения /12/ можно получить следующее приближенное выражение для функции Грина*:

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k) \approx -\frac{i}{2k}\delta^{(2)}(\vec{b}-\vec{b}')\cdot e^{ik|z-z'|}. \quad /14/$$

---

*В отличие от известного эйконального приближения для функции Грина [2]

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k) \approx -\frac{i}{2k}\delta^{(2)}(\vec{b}-\vec{b}')\cdot e^{ik(z-z')}\cdot\theta(z-z')$$

в выражении /14/ симметрия по переменным z и z' сохранена.

Используя представление /12/, волновые функции, входящие в подынтегральное выражение правой части уравнения /1/, можно выразить через амплитуду $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$. Эта процедура проведена детально в работе [11] и поэтому мы приведем здесь лишь окончательный результат. Уравнение для амплитуды $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int d^2\vec{b}\cdot V(r)\times$$

$$\times\left\{e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + \frac{i}{2\pi}\cdot\int d^2\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{t}\cdot f(\xi,\vec{k}_1,\vec{p})\right\}\times$$

$$\times\left\{e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} + \frac{i}{2\pi}\cdot\int d^2\vec{s}\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{t}\cdot f(\xi,-\vec{k}_2,\vec{p})\right\}. \qquad /15/$$

с очевидным граничным условием

$$f(0,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = 0. \qquad /16/$$

Здесь: $\vec{r}=(\vec{b},\xi)$, $\vec{p}=(\vec{s},t)$, а поперечная $\vec{s}$ и продольная t -составляющие импульса $\vec{p}$ связаны между собой посредством соотношения /13/. В правую часть уравнения /15/ входит, следовательно, амплитуда рассеяния, зависящая от нефизического импульса $\vec{p}$. Заметим, что такое аналитическое продолжение по углу рассеяния ($\vec{p}^{\,2}=k^2$) оказалось возможным в силу того, что потенциал $V(r)$ обрезан в соответствии с /9/. Искомая амплитуда рассеяния $f(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ является амплитудой $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$, когда параметр $\xi\to\infty$.

Из уравнения /14/ следует, что амплитуда упругого рассеяния $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ удовлетворяет соотношению взаимности

$$f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = f(\xi,-\vec{k}_2,-\vec{k}_1) \qquad /17/$$

и для вещественного потенциала $V(r)$ условию унитарности

$$f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) - f^*(\xi,\vec{k}_2,\vec{k}_1) = \frac{ik}{2\pi}\cdot\int d\Omega_{\vec{k}}\cdot f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k})\cdot f^*(\xi,\vec{k}_2,\vec{k}). \qquad /18/$$

III. Известно, что для нахождения амплитуды рассеяния $f(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ достаточно знать волновую функцию рассеиваемой частицы лишь в области действия потенциала. Именно для этой части волновой функции в работе [2] было получено некоторое приближенное уравнение, решение которого приводит к эйкональному представлению /1/ для амплитуды рассеяния. Волновая функция в работе [2] рассматривалась в виде

$$\psi(\vec{r},\vec{k}_1) = e^{i\vec{k}_1\vec{r} + i\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)}. \qquad /19/$$

Для величины $\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)$ было получено следующее выражение

$$\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0) \approx -\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{z} dz'\,V(\vec{b}+\vec{n}z'), \qquad /20/$$

справедливое лишь в области действия потенциала. Чтобы улучшить приближение /20/, ось z направляют по среднему импульсу $\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)$. Подчеркивая введение такой специальной системы координат, мы ввели обозначение $\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)\equiv\chi(\vec{r},\vec{k}_1)$.

Выражение /20/ допускает очень простую физическую интерпретацию. Интеграл /20/ представляет собой сдвиг фазы для функции ψ вдоль прямолинейной траектории, идущей из $-\infty$ в точку $\vec{r}$.

Заметим, что для сферически симметричного потенциала фазу $\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)$ можно определить также следующим образом:

$$\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0) \approx -\frac{1}{k}\int_{|z|}^{\infty} dz'\,V(r'). \qquad /21/$$

Здесь для функции $\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)$ имеет место граничное условие

$$\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)\big|_{|z|=\infty} = 0. \qquad /22/$$

Выражения /20/ и /22/, после подстановки в уравнение /6/, приводят к одинаковому результату /1/. Это очевидно заранее, поскольку частица в обоих случаях проходит, в конечном счете, равные пути в области действия потенциала.

В настоящем подходе можно, как оказывается, избежать необходимости нахождения волновой функции во всем пространстве более строгим образом. Для этого введем в рассмотрение новую функцию $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$, определенную лишь в области действия потенциала $V_\xi(r)$. Амплитуду рассеяния $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ будем искать в виде

$$f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}}\, V_\xi(r)\cdot\exp(i\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0))\,. \qquad /23/$$

Следовательно, знания величины $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$ достаточно для нахождения амплитуды рассеяния. Для однозначного определения функции $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$ необходимо наложить граничное условие на значения этой функции на границе области взаимодействия, которое возьмем в виде:

$$\chi(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)\Big|_{|z|=\xi} = 0\,. \qquad /24/$$

Обобщение представлений /23/ для нефизических значений импульса $\vec{p}$, определенных уравнением /13/, можно провести с помощью обычного оператора сдвига /11/

$$f(\xi,\vec{k}_1,\vec{p}) = \exp\left((\vec{p}-\vec{a})\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{k}_2}\right) f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)\Big|_{\vec{a}=\vec{k}_2}\,. \qquad /25/$$

Приступим к выводу уравнения для неизвестной функции $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$. Раскрыв скобки в правой части уравнения /15/, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \frac{\partial}{\partial\xi} f_B(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) + P(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) + Q(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)\,. \qquad /26/$$

Здесь величина $f_B(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ есть первое борновское приближение для амплитуды рассеяния на потенциале $V_\xi(r)$, а функции P и Q представляют собой, соответственно, линейный и нелинейный по искомой амплитуде f члены в уравнении /15/.

Подставим в уравнение /26/ представления /23/ и /25/ для амплитуды рассеяния. Результат дифференцирования выражения /23/ по параметру ξ с учетом условия /24/ будет

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \frac{\partial}{\partial\xi} f_B(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) -$$

$$-\frac{i}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}+i\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)}\, V_\xi(r)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)\,. \qquad /27/$$

Из уравнений /25/ и /27/ видно, что граничное условие /24/ позволяет исключить из рассмотрения известное борновское приближение.

Для функций P и Q, используя представление /25/ для функции Грина, получим следующие выражения:

$$P(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}+i\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)}\, V_\xi(r)\cdot w_1(\xi,k,\vec{r},\vec{s}_0) \qquad /28/$$

и

$$Q(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int d\vec{r}\cdot e^{i\vec{q}\cdot r+i\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)}\cdot V_\xi(r)\,\times$$

$$\times\int d\vec{r}\,'\cdot w_2(\xi,k,\vec{r},\vec{r}\,',\vec{s}_0)\, e^{i\chi_k(\xi,\vec{r}\,',\vec{s}_0)}\cdot V_\xi(r')\,. \qquad /29/$$

Здесь функции w_1 и w_2 известны и имеют вид:

$$w_1(\xi,k,\vec{r},\vec{s}_0) = 2\cdot\int d^2\vec{b}_1\cdot V(r_1)\cdot\left[e^{i\vec{k}_2(\vec{r}-\vec{r}_1)} G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}_1,k)\, +\right.$$

$$\left.+\, e^{i\vec{k}_2(\vec{r}+\vec{r}_1)} G^{(+)}(\vec{r},-\vec{r}_1,k)\right], \qquad /30/$$

$$w_2(\xi,k,\vec{r},\vec{r}\,',\vec{s}_0) = 2\cdot\int d^2\vec{b}_1\cdot V(r_1)\, e^{i\vec{k}_2(\vec{r}+\vec{r}\,')}\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}_1,k)\cdot G^{(+)}(\vec{r}_1,-\vec{r}\,',k), \qquad /31/$$

где $G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k)$ - функция Грина /7/, а векторы определены следующим образом: $\vec{r}_1=(\vec{b}_1,\xi)$, $\vec{r}=(\vec{b},z)$, $\vec{k}_{1,2}=(\pm\vec{s}_0,t_0)$.

Подставляя полученные выражения /27/-/29/ в уравнение /26/, приходим, опуская постоянные множители, к следующему соотношению:

$$\int d\vec{r}\cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}+i\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)}\cdot V_\xi(r)\cdot\{i\frac{\partial}{\partial\xi}\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)-w_1(\xi,k,\vec{r},\vec{s}_0)-$$

$$-\int d\vec{r}'w_2(\xi,\vec{r},\vec{r}',k,\vec{s}_0)\cdot e^{i\chi_k(\xi,\vec{r}',\vec{s}_0)}\cdot V_\xi(r')\}=0. \qquad /32/$$

Из соотношения /32/ следует, что если функция $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$ удовлетворяет в области $-\xi\le z\le\xi$ уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial\xi}\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)=w_1(\xi,k,\vec{r},\vec{s}_0)+$$

$$+\int d\vec{r}'w_2(\xi,k,\vec{r},\vec{r}',\vec{s}_0)\cdot e^{i\chi_k(\xi,\vec{r}',\vec{s}_0)}\cdot V_\xi(r') \qquad /33/$$

с граничным условием /24/, то амплитуда $f(\xi,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ является решением основного уравнения /15/. Уравнение /33/ есть искомое уравнение для фазы χ_k.

Получим эйкональное представление /1/ для амплитуды упругого рассеяния на основе уравнения /33/. Линейное по потенциалу решение этого уравнения с граничным условием /24/ есть

$$\chi_k(\xi,\vec{r},s_0)\simeq\phi_k(\xi,\vec{r},s_0)=\int_{|z|}^{\xi}dz_1w_1(z_1,k,\vec{r},\vec{s}_0). \qquad /34/$$

Пусть потенциал $V(r)$ имеет характерные радиус взаимодействия R и амплитуду V_0. Будем считать, что энергия налетающей частицы такова, что имеют место следующие условия:

$$kR\gg 1 \qquad /35/$$

и

$$\frac{V_0}{k^2}\lessapprox\frac{1}{kR}. \qquad /36/$$

Ограничимся также областью углов рассеяния

$$\theta\ll(kR)^{-1/2}. \qquad /37/$$

Нетрудно показать, что условия /35/ и /37/ являются критериями применимости приближения /14/ для функции Грина. Подставляя выражение /14/ в /30/, для линейного по потенциалу приближения получим:

$$\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)\approx-\frac{1}{k}\int_{|z|}^{\xi}dz_1V(r_1)\cdot(e^{ik(z_1-z)(1-\cos\frac{1}{2}\theta)}+$$

$$+e^{ik(z+z_1)(1+\cos\frac{1}{2}\theta)}). \qquad /38/$$

Из соотношения /37/ следует,что $\exp(ik(z_1-z)(1-\cos\frac{1}{2}\theta))\approx 1$. Не нарушая условий /35/ и /37/, можно также пренебречь быстро осциллирующим членом в подынтегральном выражении. Таким образом, приходим к следующему приближению:

$$\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)\approx-\frac{1}{k}\cdot\int_{|z|}^{\xi}dz_1V(r_1). \qquad /39/$$

Искомая фаза $\chi_k(\vec{r},\vec{s}_0)$ является функцией $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$ при стремлении параметра обрезания $\xi\to\infty$ и совпадает с уже известным выражением /21/.Нетрудно показать, что нелинейным по потенциалу членом в уравнении /33/ можно пренебречь, если имеет место условие /36/. Следовательно, в рамках настоящего подхода получено эйкональное приближение /1/ для амплитуды упругого рассеяния с хорошо известными пределами применимости /35/-/37/.

Заметим, что выражение /39/, по аналогии с /20/ и /21/, представляет собой фазовый сдвиг для волновой функции $\psi_\xi(\vec{r},\vec{k}_1)$. Таким образом, функцию $\chi_k(\xi,\vec{r},\vec{s}_0)$ с граничным условием /24/ можно интерпретировать как точный сдвиг фазы для волновой функции ψ_ξ для обрезанного потенциала $V_\xi(r)$. Искомый сдвиг фазы для волновой функции $\psi(\vec{r}, k_1)$ получим, устремляя в функции $\chi_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0)$ параметр $\xi \to \infty$. Введенную так величину $\chi_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0)$ можно, по аналогии с обычным методом фаз [8,9], назвать полной фазовой функцией.

Линейный по потенциалу член в полной фазовой функции известен точно /34/. Следовательно, функцию χ_k можно искать в виде

$$\chi_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0) = \phi_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0) + \tau_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0) . \qquad /40/$$

Подставляя выражение /40/ в фазовое уравнение /33/, для величины $\tau_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0)$, являющейся нелинейной по потенциалу поправкой к фазе ϕ_k, получим следующее уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial\xi}\tau_k(\xi, \vec{r}, \vec{s}_0) = \int d\vec{r}' \cdot e^{i\phi(\xi, \vec{r}', \vec{s}_0) + i\tau(\xi, \vec{r}', \vec{s}_0)} V_\xi(r') \cdot w_2(\xi, k, \vec{r}, \vec{r}', \vec{s}_0) . \qquad /41/$$

При выводе уравнения /33/ для полной фазовой функции существенно использовалось предположение о сферической симметрии потенциала, поскольку рассмотрение ведется сразу в специальной системе координат, где ось z направлена по среднему импульсу.

IV. Полученные в настоящей работе уравнения для амплитуды рассеяния /15/ и для полной фазовой функции /33/ /или /41// представляют собой точные нелинейные интегро-дифференциальные уравнения. Введение в теорию полной фазовой функции можно рассматривать как возможный способ приближенного решения уравнений для амплитуды рассеяния в данном подходе [10,11]. Следует отметить также, что линейный по потенциалу член в фазовом уравнении /33/ известен точно. В принципе, это позволяет строгим образом подойти к проблеме обобщения представления /1/ на конечные углы рассеяния и выяснения роли нелинейных по потенциалу поправок.

В заключение автор выражает глубокую благодарность за обсуждение затронутых здесь вопросов И.В.Амирханову, В.К.Лукьянову, Р.М.Мир-Касимову и Ю.С.Полю.

Литература

1. G.Moliere. Z.Naturforschung., 2A, 133 (1947).
2. R.J.Glauber. High Energy Collision Theory, in "Lectures in Theoretical Physics" (W.E.Britten and L.G.Dunham, Eds.), v. I, p. 315, Interscience, N.Y., 1959.
3. R.J.Glauber. Theory of High Energy Hadron-Nucleus Collisions, in "High Energy Physics and Nuclear Structure", (S.Devons, Ed.), p. 207, Plenum Press, N.Y., 1970.
4. L.I.Schiff. Phys.Rev., 103, 443 (1956).
5. M.M.Islam. Impact Parameter Description of High Energy Scattering, in "Lectures in Theoretical Physics" (A.O.Barut and W.E.Britten, Eds.), p. 97, Interscience, N.Y., 1968 /и ссылки в этом обзоре/.
6. C.Quigg, Charles J.Joachain. Rev.Mod.Phys., 46, 279 (1974) /и ссылки в этом обзоре/.
7. E.Kujawski. Phys.Rev., D4, 2573 (1971).
8. В.В.Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике, "Наука", М., 1968.
9. Ф.Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния, "Мир", М., 1972.
10. V.V.Babikov, R.M.Mir-Kasimov. Phys.Lett., 31B, 415 (1970).
11. В.В.Бабиков, М.Х.Ханхасаев. Изв. АН СССР, сер. физ., 38, 725 /1974/.
12. A.Sommerfeld. Ann. der Physik and Chemie (4), 28, 682 (1909).

Рукопись поступила в издательский отдел 23 декабря 1974 года.