

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Б-21

31/III-75
P4 - 8474

772/2-75

Е.Б.Бальбуцев, И.Н.Михайлов

О РАДИУСАХ ЯДЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА
И ПЛОТНОСТИ

1974

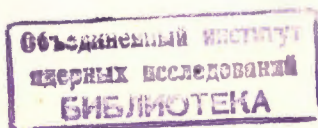
ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8474

Е.Б.Бальбуцев, И.Н.Михайлов

О РАДИУСАХ ЯДЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА
И ПЛОТНОСТИ

Направлено в ЯФ



Бальбуцев Е.Б., Михайлов И.Н.

P4 - 8474

О радиусах ядерного потенциала и плотности

Собраны некоторые данные, показывающие, что радиус ядерного потенциала с размытым краем превышает примерно на 0,6 Фм радиус объема, занятого ядерным веществом. Эта разница интерпретирована как следствие резкого уменьшения одночастичных функций на границе ядра.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Balbutsev E.B., Mikhailov I.N.

P4 - 8474

On the Nuclear Potential and Density Radii

Some data outside the direct fitting procedure of the optical potential parameters are enumerated showing that the radius for the nuclear potential with diffuse surface is greater by about 0.6 fm than the radius in the distribution of nuclear matter. The difference in the volumes taken by the matter and by the potential is attributed to the decrease of the single-particle wave functions at the surface of the nucleus.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

В различных моделях атомного ядра в качестве среднего поля широко используется потенциал Саксона-Вудса /1/

$$V(r) = - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_v}{a}\right)} \quad /1/$$

с подгоночными параметрами: V_0 - глубина ямы, R_v - ее ширина, a - диффузность края потенциала.

Представляется естественным определять параметры потенциала по данным о распределении ядерного вещества. Существующая информация /2/ согласуется с формулой для плотности, аналогичной /1/:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_\rho}{\beta}\right)}, \quad /2/$$

где R_ρ , β имеют тот же смысл, что и R_v , a в формуле /1/. Экспериментальные данные показывают, что R_v приблизительно на 1 Фм превышает $R_\rho^{3/2}$. В данной работе делается попытка связать этот факт со свойствами ядерной материи, обеспечивающими наличие хорошо выделенной границы в распределении вещества внутри реальных ядер.

В литературе встречаются высказывания /4/, что отставание плотности от потенциала вызвано конечностью радиуса действия ядерных сил. Мы отмечаем, что конечность радиуса действия сил не является достаточным условием существования этого эффекта. Рассмотрим для

этого модель, в которой вещество ограничено плоской поверхностью, так что плотность зависит лишь от одной пространственной переменной, перпендикулярной границе вещества. Пусть

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0, & z \leq 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \quad /3/$$

а взаимодействие имеет простейший вид:

$$v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} -v_0, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < d, \\ 0, & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > d. \end{cases}$$

Универсальной связи между потенциалом и плотностью, применимой для произвольных систем, не существует, и мы вправе делать различные предположения на этот счет. Примем вначале правило определения самосогласованного потенциала, следующее из теории Хартри. Тогда

$$V(\vec{r}) = \int v(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$= \begin{cases} V_0, & z < -d, \\ V_0 \frac{(d-z)^2(2d+z)}{4d^3}, & -d < z < d, \\ 0, & d < z, \end{cases} \quad /4/$$

где $V_0 = -v_0 \rho_0 \frac{4}{3} \pi d^3$. В качестве R_v и R_ρ здесь так же, как и в /1/ и /2/, естественно взять точки, в которых потенциал и плотность уменьшаются в два раза по сравнению с V_0 и ρ_0 соответственно. Из /3/ и /4/ в таком случае следует, что $R_v = R_\rho = 0$. Как видно, величина d на соотношении R_v и R_ρ никак не сказывается; от нее зависит только диффузность потенциала. Этот результат сохраняется и для более реалистических распределений ρ .

Таким образом, конечность радиуса действия сил

сама по себе наблюдаемый эффект отставания плотности от потенциала не объясняет. Однако его можно описать вполне удовлетворительно, если учесть те элементы ядерных сил и условий согласования потенциала и плотности, которые приводят к насыщению. В современных моделях нуклон-нуклонного взаимодействия насыщение обеспечивается различными факторами /5/, приводящими к тому, что реалистическое взаимодействие двух нуклонов в пустоте в ядрах превращается в эффективное взаимодействие, которое зависит от плотности, причем существенно нелинейным образом. Именно эта нелинейная связь v и ρ в совокупности с конечным радиусом действия сил /иначе просто не было бы никакого насыщения/ и приводит к отставанию плотности от потенциала. Рассмотрим несколько примеров.

В теории конечных ферми-систем Мигдала интенсивно используется следующее выражение для не зависящей от спина и изоспина части взаимодействия:

$$v_\rho(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2) [-c_1 + 2c_2 \rho(r_1)],$$

причем величина $v_\rho(r_1, r_2)$ представляет собой вариационную производную от самосогласованного потенциала по элементам матрицы плотности. Написав

$$V(\vec{r}) = \int v_\rho(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}',$$

находим потенциал, соответствующий этому взаимодействию:

$$V(r) = -c_1 \rho(r) + c_2 \rho^2(r). \quad /5/$$

Возьмем для $\rho(r)$ ферми-распределение /2/ и сравним R_v и R_ρ . После несложных выкладок получаем:

$$R_v = R_\rho + \beta \ell n \left(\frac{1}{a - \sqrt{a(a-1) + 1/2}} - 1 \right), \quad /6/$$

где $a = \frac{c_1}{2c_2 \rho_0}$. С параметрами Мигдала $a = \frac{2}{2,3}$ и

$R_v = R_\rho + 1,11\beta$. Представление о порядке величины $R_v - R_\rho$ дает таблица, в которой использованы данные ^{/2/} для β . Разница между R_v и R_ρ , как видно, достигает 10%, и возникает она только потому, что $c_2 \neq 0$.

Таблица

	$\beta, \text{ФМ}$	$(R_v - R_\rho), \text{ФМ}$
⁶⁶ Zn	0,663	0,736
¹¹⁶ Sn	0,561	0,623
²⁰⁸ Pb	0,515	0,572

Простые оценки с трапециодальным распределением показывают, как может повлиять различие R_v и R_ρ на среднеквадратичный радиус $\langle r^2 \rangle$ и квадрупольный момент Q_2 . Имеем

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} (R_\rho + \frac{\beta}{2})(R_\rho - \frac{\beta}{2}), \quad Q_2 = \frac{12}{5} \delta (R_\rho - \frac{\beta}{2}) R_\rho,$$

где δ - параметр деформации ядра. Изменение в R_ρ порядка β приводит к относительным изменениям в $\langle r^2 \rangle$ и Q_2 :

$$\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle} = \frac{2\beta}{R_\rho + \beta/2}, \quad \frac{\Delta Q_2}{Q_2} = \frac{2\beta}{R_\rho + \beta/4},$$

которые в средних и тяжелых ядрах могут достигать 20%. Такие изменения существенно превышают погрешности измерения указанных величин, следовательно, полагать $R_v = R_\rho$, как это делается, например, в ^{/6/}, - слишком грубое приближение. При подборе параметров среднего поля нужно довольно осторожно пользоваться информацией о R_ρ .

Полученные результаты, конечно, нельзя считать строго обоснованными, т.к. мы совершенно произвольно

подставляли в ^{/5/} ферми-распределение плотности. В более последовательном подходе постулированное взаимодействие должно определять как потенциал, так и плотность. Первые успешные попытки одновременного определения V и ρ были предприняты в работах ^{/7,8/}. Авторы параметризовали энергию ядра в терминах плотности и ее производных так, чтобы при $\rho = \rho_0$ воспроизводилась формула Вайцекера /без энергии симметрии и кулона/:

$$E = \int [\xi(\rho) + \frac{\xi^{\dagger 2}}{8M} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho}] dr. \quad /7/$$

Здесь ξ - подгоночный параметр, r - объем интегрирования, M - масса нуклона.

Для связности изложения приведем некоторые из результатов ^{/8/}. Вариационное уравнение для плотности имеет вид:

$$-\frac{\xi^{\dagger 2}}{2M} \nabla^2 u + \frac{d\xi}{d\rho} u = E_0 u, \quad /8/$$

где $u = \rho^{1/2}$, E_0 - множитель Лагранжа. Для простоты рассмотрим полубесконечную среду с плоской поверхностью, в которой плотность меняется лишь вдоль одной координаты z , перпендикулярной к поверхности. Граничные условия в таком случае очевидны:

$$\begin{aligned} u \rightarrow u_0, \quad u' \rightarrow 0, \quad u'' \rightarrow 0 & \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \\ u \rightarrow 0, \quad u' \rightarrow 0, \quad u'' \rightarrow 0 & \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Замечая, что $d(u')^2 = 2u''u'dz$, ^{/8/} можно один раз проинтегрировать:

$$\frac{\xi^{\dagger 2}}{2M} (u')^2 = \xi(\rho) - E_0 u^2. \quad /9/$$

Используя граничные условия, из /8/ и /9/ нетрудно получить соотношения

$$\left. \frac{d(\xi/\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} = 0, \quad E_0 = \left. \frac{d\xi}{d\rho} \right|_{\rho_0} = \frac{\xi}{\rho} \Big|_{\rho_0}, \quad /10/$$

которые совпадают с известными условиями насыщения и определяют физический смысл E_0 как энергии связи на нуклон. Для окончательного решения /9/ нужно знать зависимость ξ от ρ . Возьмем такую функцию $\xi(\rho)$, чтобы можно было получить решение в аналитическом виде. Удобной формой, удовлетворяющей условиям /10/, является следующая:

$$\xi(\rho) = |E_0| \rho \left\{ -2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{n}} \right\}. \quad /11/$$

Уравнение /9/ в этом случае принимает вид:

$$\frac{\xi \hbar^2}{2M} (u')^2 = |E_0| u^2 \left\{ 1 - \left(\frac{u}{u_0} \right)^{\frac{2}{n}} \right\},$$

$$\sqrt{\frac{\xi \hbar^2}{2M |E_0|}} \cdot \frac{du}{dz} = -u \left[1 - \left(\frac{u}{u_0} \right)^{\frac{2}{n}} \right].$$

Его решение очень похоже на ферми-распределение, что и оправдывает сделанный выбор $\xi(\rho)$:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \exp\left(\frac{z}{\beta}\right) \right]^{-n},$$

где $\beta = n \sqrt{\frac{\xi \hbar^2}{8M |E_0|}}$. Чтобы вернуться к конечному ядру,

достаточно z заменить на $r - R_\rho$, где R_ρ теперь определяет точку, в которой $\rho(r)$ уменьшается в 2^n раз по сравнению с $\rho(0) \equiv \rho_0$. Потенциал можно получить,

воспользовавшись известной в теории ферми-жидкости Ландау формулой

$$\frac{\delta E_{\text{пот}}}{\delta \rho(\vec{r})} = V_\rho(\vec{r}).$$

Выделив из /7/ потенциальную энергию

$$E_{\text{пот}} = \int \left[\xi(\rho) - \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \rho^{5/3} \right] d\tau,$$

получаем:

$$V_\rho(r) = \frac{d\xi(\rho)}{d\rho} - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \rho^{2/3}.$$

Используя приведенные выше результаты Берга и Уилетса, нетрудно вывести формулы, характеризующие отставание плотности от потенциала. Положим $n = \frac{3}{2}$. Тогда

$$V_\rho(r) = - \left(\frac{10}{3} |E_0| + \frac{\hbar^2 k_f^2}{2M} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} + \frac{7}{3} |E_0| \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{4/3} \\ = -by + cy^2,$$

где $y = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} = \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_\rho}{\beta}\right) \right]^{-1}$, k_f - импульс Ферми

в ядерной материи. Уже по виду потенциала можно заключить, что результаты такого анализа должны практически совпадать с полученными ранее. Действительно:

$$R_v - R_\rho = \beta \ln \left(\frac{1}{a - \sqrt{a(a-1/\sqrt{2}) + \sqrt{2}/4}} - 1 \right),$$

где $a = \frac{b}{2c}$. Возьмем $|E_0| = 8 \text{ МэВ}$, $k_f = 1,36 \text{ Фм}^{-1}$, $\xi = 0,28$ /результат экстраполяции данных работы /8/ на $n = 3/2$ /. Тогда $\beta = 0,64 \text{ Фм}$, $b = 65,05 \text{ МэВ}$, $c = 18,67 \text{ МэВ}$, $a = 1,74$ и $R_v - R_\rho = 0,64 \ln 2,66 = 0,63 \text{ Фм}$.

Буквально такие же результаты получаются и при более фундаментальном подходе, основанном на теории Бракнера. Здесь энергия ядра уже не параметризуется, а вычисляется, исходя из реалистического нуклон-нуклонного взаимодействия, описывающего фазы рассеяния.

В работе^{/9/} для расчета плотности и потенциала в рамках этой теории использовался метод Хартри-Фока. В результате громоздких расчетов авторы получили для ^{40}Ca и ^{90}Zr $R_v - R_\rho \approx 0,75 \text{ Фм}$. Сходные результаты получаются и с различными эффективными взаимодействиями^{/10,11/}. В работе^{/12/} использовался более простой метод Томаса-Ферми. Здесь задача свелась уже к решению трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений на ρ . И опять получается $R_v - R_\rho \approx 0,5 \text{ Фм}$.

В заключение можно привести простое физическое объяснение полученных результатов. Рассмотрим полубесконечную систему независимых частиц, ограниченную при $z=0$ высокой плоской стенкой. Распределение вещества в среде описывается формулой

$$\rho(z) = \frac{3\rho_0}{2\pi k_f^3} \int_{(k^2 < k_f^2)} \sin^2(zk_z + \phi) dk,$$

где $\text{tg } \phi = \sqrt{\frac{\hbar^2 k_z^2}{2MV_0 - \hbar^2 k_z^2}}$, V_0 - высота потенциальной стенки, M - масса частицы. Интегрирование дает:

$$\rho(z) = \rho_0 \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) + \frac{\hbar^2 k_f^2}{MV_0} \left[4 \frac{\sin x}{x^3} + 3 \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) \right] \right\},$$

где $x = 2k_f z$. При $z=0$ плотность равна

$$\rho(z=0) = \frac{1}{5} \rho_0 \frac{\hbar^2 k_f^2}{MV_0} = \frac{2}{5} \rho_0 \frac{T_f}{V_0}.$$

Т.к. максимальная кинетическая энергия T_f связанной частицы меньше высоты барьера V_0 , $\rho(z=0) < \frac{2}{5} \rho_0 < \frac{1}{2} \rho_0$, следовательно, всегда $R_v > R_\rho$. Если V_0 хотя бы в два раза больше T_f , что соответствует реальной ситуации для протонов, у которых к ядерному добавляется еще куло-

новский барьер, то ρ имеет первый максимум при $x_0 \approx \frac{5}{2}\pi$. Толщина поверхностного слоя, таким образом,

равна $x_0/2k_f \approx 2,8 \text{ Фм}$, а $R_v - R_\rho \approx 1,4 \text{ Фм}$.

Можно рассмотреть и более реалистичский случай, когда $V_0 - T_f$ равно экспериментальной энергии связи и потенциал имеет размытый край:

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & , \quad z < -2a, \\ -\frac{V_0}{2a}z & , \quad -2a < z < 0, \\ 0 & , \quad 0 < z. \end{cases}$$

Получить аналитическое выражение для $\rho(z)$ здесь уже не удастся, но оценить разницу между R_v и R_ρ еще можно. Для плотности имеем:

$$\rho(z) = \frac{3\rho_0}{2\pi k_f^3} \int_{(k^2 < k_f^2)} \sin^2 \phi \frac{\Phi^2(-\xi)}{\Phi^2(-\xi_0)} dk,$$

где Φ - функция Эйри, $\text{tg } \phi = k_z/g$, $g = -\left(\frac{MV_0}{\hbar^2 a}\right)^{1/3} \frac{\Phi(-\xi_0)}{\Phi(-\xi)}$,

$\xi = \left(\frac{MV_0}{\hbar^2 a}\right)^{1/3} \left(z + \frac{a\hbar^2 k_z^2}{MV_0}\right)$, $\xi_0 = \xi(z=0)$. Для приближенных

оценок заменим в аргументах функций Эйри k_z^2 ее средним значением $k_z^2 = 1/5 k_f^2$. Тогда интеграл легко берется. В частности, при $a = 1 \text{ Фм}$, $k_f = 1,36 \text{ Фм}^{-1}$, $V_0 = 54 \text{ МэВ}$ получаем: $\xi_0 = 0,31$, $g = 0,6 \text{ Фм}^{-1}$, $\rho(z=0) = 0,77 \rho_0$, $\rho(-0,4) = 0,42 \rho_0$, $\rho(-1) = 0,12 \rho_0$. Интерполяцией определяем точку, в которой плотность уменьшается наполовину: $z \approx -0,32 \text{ Фм}$. Отсюда $R_v - R_\rho \approx 0,68 \text{ Фм}$, т.е. для реалистической модели получаем вполне реалистические результаты.

Возвращаясь к случаю вертикальной стенки и полагая $V_0 = \infty$, имеем:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 + 3 \frac{\cos x}{x^2} - 3 \frac{\sin x}{x^3} \right).$$

Это выражение хорошо иллюстрирует эффект "отставания

плотности от потенциала". На краю, где $x = 0$, плотность равна нулю; по мере удаления от стенки она быстро растет и достигает максимума при $x_0 \approx \frac{7}{4}\pi$. Толщина поверхностного слоя, таким образом, равна $\frac{x_0}{2k_f} \approx 2 \text{ Фм}$ и $R_v - R_\rho \approx 1 \text{ Фм}$. Далее, при $x \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow \rho_0$, осциллируя возле этого значения с амплитудой, затухающей, как $1/x^2$.

Этот пример очень ясно показывает механизм явления. Отставание ρ от V обязано своим происхождением квантовомеханическому эффекту обращения волновых функций в нуль возле бесконечно высокой стенки и существенному убыванию их у стенки конечной высоты.

Итак, можно сказать, что обсуждаемый эффект является следствием существования хорошо определенной поверхности у тяжелых и средних ядер, которое, в свою очередь, обусловлено двумя важными свойствами ядерных сил: конечностью их радиуса действия и насыщенностью.

Литература

1. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Наука, Москва, 1971.
2. V.V.Burov, Yu.N.Eldyshev, V.K.Lukyanov, Yu.S.Pol. Preprint JINR, E4-8029, 1974.
3. A.E.Glassgold. Rev.Mod.Phys., 30, 419 (1958).
4. О.Бор, Б.Моттelson. Структура атомного ядра. Т. 1, Москва, "Мир", 1971.
5. I.N.Mikhailov, R.Reif. Preprint JINR, E4-8395, Dubna, 1974.
6. Ф.А.Гареев, С.П.Иванова, В.В.Пашкевич. ЯФ, 11, 1200 /1970/.
7. R.A.Berg, L.Wilets. Phys.Rev., 101, 201 (1956).
8. L.Wilets. Rev.Mod.Phys., 30, 542 (1958).
9. K.A.Brueckner, A.M.Lockett, M.Rotenberg. Phys.Rev., 121, 255 (1961).
10. J.W.Negele. Phys.Rev., C1, 1260 (1970).
11. D.Vautherin, D.M.Brink. Phys.Rev., C5, 626 (1972).
12. K.Kumar, K.J.Le Kouteur, M.K.Roy. Nucl.Phys., 42, 529 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1974 года.