объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-84-814

В.Б.Беляев, С.А.Ракитянский

О СУММЕ РЯДА ВАТСОНА В ДИФРАКЦИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1984

Широко используемое приближение Ситенко-Глаубера, или, как его еще называют, дифракционное приближение [1-3], исходит из двух предположений:

1/ налетающая частица движется столь быстро, что частицы мишени за время взаимодействия с ней не успевают изменить своего пространственного положения; 2/ элементарные амплитуды рассеяния на составляющих мишени имеют пик вперед и хорошо описываются эйкональным приближением. При этих условиях из $(N+1)$-частичного уравнения Липпмана-Швингера, которое в приближении фиксированных центров имеет вид

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} V_i + \sum_{i=1}^{N} V_i G_0 T_N , \qquad /1/$$

следует хорошо известная формула Ситенко-Глаубера

$$F_{fi}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^{(2)} \vec{b} \exp(-i\vec{q}\vec{b}) \langle \psi_f | \Gamma(\vec{b}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_N) | \psi_i \rangle , \qquad /2/$$

где полная профилирующая функция для рассеяния на N-частичной мишени

$$\Gamma = 1 - \exp\{ - \frac{im}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} V_i (\vec{b} - \vec{b}_i , z) dz \} \qquad /3/$$

выражается через соответствующие элементарные профилирующие функции

$$\gamma_i = 1 - \exp\{ - \frac{im}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} V_i (\vec{b} - \vec{b}_i , z) dz \} \qquad /4/$$

в виде суммы, состоящей из N членов

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i - \sum \gamma_i \gamma_j + \sum_{i>j>n} \gamma_i \gamma_j \gamma_n - \dots + (-1)^N \gamma_N \gamma_{N-1} \dots \gamma_2 \gamma_1 , \qquad /5/$$

которые описывают одно-, двух-, трех-, ... N-кратные столкновения. Причем весь процесс последовательных столкновений происходит на массовой поверхности.

С другой стороны, из того же уравнения /1/ следует выражение для амплитуды рассеяния в виде бесконечного ряда Ватсона

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i \neq j} t_i G_0 t_j + \dots = T_N^{(1)} + T_N^{(2)} + \dots . \qquad /6/$$

Поэтому, будучи эквивалентным исходному уравнению, этот ряд в эйкональном приближении для t_i должен сходиться к амплитуде Ситенко-Глаубера.

Однако, несмотря на тривиальность этого заключения, получение формул /2/-/5/ непосредственно из ряда /6/ представляет собой далеко не простую задачу. Этой проблеме посвящено довольно много работ[4-10], в которых исследовалась структура ряда /6/ в дифракционном пределе с целью выделения тех его членов, которые исчезают или взаимно сокращаются, так как дифракционная амплитуда не содержит вклада от столкновений с кратностью, большей, чем число частиц в мишени N.

Эти исследования представляют скорее практический, чем чисто теоретический интерес. Он вызван потребностями практических вычислений в рамках теории многократного рассеяния, в которых приходится ограничиваться конечным числом членов ряда /6/. При этом учет различных поправок требует аккуратного анализа их вклада по сравнению с отброшенными членами ряда, так как в противном случае есть опасность учесть только один член из двух взаимно сокращающихся.

Последовательно, без использования дополнительных предположений, формулы /2/÷/5/ получены из ряда Ватсона в работах Харрингтона[8] и Айзенберга[10]. Однако им удалось решить эту задачу только в двух частных случаях, а именно для рассеяния на мишени, состоящей из двух[8] и трех[10] частиц.

Представив свободную функцию Грина G_0 в виде суммы двух слагаемых $G_0 = G_0^{on} + G_0^{off}$, описывающих распространение налетающей частицы на массовой поверхности и вне ее, и разбив члены ряда /6/ для рассеяния на двухчастичной мишени на две группы

$$T_2 = (t_1 + t_2 + t_1 G_0^{on} t_2 + t_2 G_0^{on} t_1) + (t_1 G_0^{off} t_2 + t_2 G_0^{off} t_1 + \sum_{n=3}^{\infty} T_2^{(n)}), \quad /7/$$

Харрингтон показал, что в дифракционном пределе первая из этих групп переходит в амплитуду Ситенко-Глаубера, а вторая стремится к нулю благодаря точному сокращению внемассового вклада двукратных столкновений с остатком бесконечного ряда.

Айзенберг сделал попытку обобщить этот результат на случай N-частичной мишени. Он воспользовался записью суммы ряда /6/ в виде $T_N = \sum_{i=1}^{N} t_i f_i$, где $f_i = 1 + \sum_{j \neq i} G_0 t_j f_j$ и получил в явном виде дифракционное выражение для матричного элемента от оператора f_i. Это, в принципе, позволяет вычислить остаток ряда при обрывании суммирования на членах любой кратности столкновений. Далее он рассмотрел рассеяние на трехчастичной мишени. Получив аналитическое выражение для всех членов равенства

$$T_3 = \sum_{i=1}^{3} t_i + \sum_{i \neq j} t_i (G_0^{on} + G_0^{off}) t_j + \sum_{i \neq j \neq k} t_i (G_0^{on} + G_0^{off}) t_j (G_0^{on} + G_0^{off}) t_k + \sum_{i \neq j \neq k} t_i G_0 t_j G_0 t_k f_k,$$

он преобразовал его к виду

$$T_3 = \sum_{n=1}^{3} T_{on}^{\prime(n)} + \left(\sum_{n=1}^{3} T_{on}^{\prime\prime(n)} + \sum_{n=1}^{3} T_{off}^{(n)} + \sum_{n=4}^{\infty} T_3^{(n)} \right), \quad /8/$$

где $T_{on}^{\prime(n)}$ - вклад n-кратных столкновений на массовой поверхности за вычетом некоторых членов $T_{on}^{\prime\prime(n)}$ /часть из которых соответствует повторным рассеяниям на одной и той же частице/, и убедился, что $\sum_{n=1}^{3} T_{on}^{\prime(n)}$ совпадает с амплитудой Ситенко-Глаубера, а остальные члены сокращаются. Полученное Айзенбергом выражение для f_i, в принципе, дает возможность сделать такой анализ ряда Ватсона и для рассеяния на мишени с числом частиц $N > 3$. Однако это требует вычисления громоздких интегралов и сравнения большого количества слагаемых для выделения сокращающихся. Уже для $N = 4$ такое рассмотрение потребовало бы огромной работы. Кроме того, ясно, что таким методом невозможно решить задачу для произвольного N. Сравнивая формулы /7/ и /8/, видим, что переход от (N-1) к N частицам, вообще говоря, может приводить к другому "рецепту" выделения сокращающихся членов. Поэтому формула /8/ не допускает прямого обобщения на произвольные N. Структура разбиения $\sum_{n=1}^{3} T_{on}^{(n)}$ на сумму $\sum_{n=1}^{3} T_{on}^{\prime(n)}$ и $\sum_{n=1}^{3} T_{on}^{\prime\prime(n)}$ в формуле /8/ довольно сложна. Она получена Айзенбергом для конкретного случая $N = 3$ путем прямого сравнения всех членов выражения /8/. Поэтому если и можно в нем заменить $\sum_{n=1}^{3}$ на $\sum_{n=1}^{N}$, то для $N > 3$ неизвестно, какие члены из $\sum_{n=1}^{N} T_{on}^{(n)}$ включить в $\sum_{n=1}^{N} T_{on}^{\prime(n)}$, а какие - в $\sum_{n=1}^{N} T_{on}^{\prime\prime(n)}$. В данной работе мы предлагаем значительно более простой метод, позволяющий, опираясь на формулу Харрингтона /7/ для случая двухчастичной мишени, выписывать сокращающиеся в дифракционном пределе члены ряда /6/ для рассеяния на произвольной мишени. Причем нам не требуется для этого знание матричных элементов t_i, G_0, f_i и вычисление каких-либо интегралов.

Как показано в[11], решение уравнения /1/ может быть представлено в виде

$$T_N = T_{N-1} + (1 + T_{N-1} G_0) \tau_N (1 + G_0 T_{N-1}), \quad /9/$$

где T_{N-1} - соответствующий оператор, описывающий рассеяние на подсистеме из (N-1) частиц, а вспомогательный оператор τ_N удовлетворяет уравнению

$$\tau_N = t_N + t_N G_0 T_{N-1} G_0 \tau_N. \quad /10/$$

Подставив в уравнение /9/ решение уравнения /10/ в виде итерационного ряда, получим

$$T_N = \sum_{i=1}^{2} \theta_i + \sum_{i \neq j} \theta_i G_0 \theta_j + \sum_{i \neq j \neq k} \theta_i G_0 \theta_j G_0 \theta_k + \ldots = X_N^{(1)} + X_N^{(2)} + \ldots, \qquad /11/$$

где введены обозначения $\theta_1 = T_{N-1}$, $\theta_2 = t_N$. Ряд /11/ эквивалентен /6/ и может быть получен из последнего перегруппировкой членов и частичным суммированием. Согласно приближению 1/, лежащему в основе дифракционной теории, в процессе рассеяния взаимное расположение частиц мишени не меняется. Поэтому подсистему из $(N-1)$частиц можно рассматривать как одну частицу, создающую некоторый сложный нецентральный потенциал, зависящий от координат ее составляющих как от параметров. Рассеяние на такой квазичастице описывается оператором θ_1. Таким образом, ряд /11/ представляет собой обычный ряд Ватсона для задачи рассеяния на двухчастичной мишени в приближении фиксированных центров. Ясно, что для оператора T_{N-1} можно получить ряд, аналогичный /11/.

Далее, используя метод математической индукции, предположим, что для задачи рассеяния на $(N-1)$ частицах мы уже получим формулы /2/÷/5/ Ситенко-Глаубера из ряда Ватсона, и покажем, что они получаются тогда и для случая N-частичной мишени.

Последнее автоматически следует из результата Харрингтона, если переписать ряд /11/ аналогично /7/. Следовательно, сумма $\Delta_N = T_{N-1} G_0^{off} t_N + t_N G_0^{off} T_{N-1} + \sum_{n=3}^{\infty} X_N^{(n)}$ в дифракционном пределе обращается в ноль. При $N = 3$ имеем $T_3 = T_3^D + \Delta_3$, где введено обозначение

$$T_3^D = t_3 + T_2 + t_3 G_0^{on} T_2 + T_2 G_0^{on} t_3. \qquad /12/$$

Подставляя в /12/ $T_2 = T_2^D + \Delta_2$, получим

$$T_3 = \sum_{i=1}^{3} t_i + \sum_{i \neq j} t_i G_0^{on} t_j + t_1 G_0^{on} t_2 G_0^{on} t_3 + t_2 G_0^{on} t_1 G_0^{on} t_3 +$$

$$+ t_3 G_0^{on} t_1 G_0^{on} t_2 + t_3 G_0^{on} t_2 G_0^{on} t_1 + (t_3 G_0^{on} \Delta_2 + \Delta_2 G_0^{on} t_3 + \Delta_2 + \Delta_3). \qquad /13/$$

Дифракционный предел Δ_2 и Δ_3 равен нулю. Заметим, что из суммы $\sum_{i \neq j \neq k} t_i G_0^{on} t_j G_0^{on} t_k$ неисчезающими оказались лишь четыре слагаемых. Остальные ее члены вошли в Δ_3 и сокращаются с суммой некоторой бесконечной подпоследовательности членов ряда /6/. Разбиение /13/ совпадает с соответствующим результатом /8/ Айзенберга.

Для выделения неисчезающих членов в случае рассеяния на мишени с произвольным числом частиц N следует воспользоваться цепочкой уравнений

$$T_N = T_N^D + \Delta_N,$$

$$T_N^D = t_N + T_{N-1} + t_N G_0^{on} T_{N-1} + T_{N-1} G_P^{on} t_N,$$

$$T_{N-1} = T_{N-1}^D + \Delta_{N-1}, \qquad /14/$$

....

$$T_2 = T_2^D + \Delta_2,$$

$$T_2^D = t_1 + t_2 + t_1 G_0^{on} t_2 + t_2 G_0^{on} t_1,$$

учитывая, что в дифракционном пределе все $\Delta_i \to 0$.

Воспользовавшись уравнениями /14/, нетрудно убедиться, что в этом пределе бесконечный ряд /6/ превращается в конечную сумму вида

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i \neq j} t_i G_0^{on} t_j + \sum_{n=3}^{N} T_{on}^{\prime(n)}, \qquad /15/$$

где $T_{on}^{\prime(n)}$ - только часть членов $T_{on}^{(n)} = T_{on}^{\prime(n)} + T_{on}^{\prime\prime(n)}$, описывающих n-кратные столкновения на массовой поверхности. Так, как легко видеть, $T_{on}^{\prime(n)}$ не содержит, например, членов, соответствующих повторному рассеянию на одной и той же частице мишени в процессе n-кратных столкновений; т.е. произведение

$$t_{i_1} G_0^{on} t_{i_2} G_0^{on} \ldots t_{i_{n-1}} G_0^{on} t_{i_n} \qquad /16/$$

входит в $T_{on}^{\prime(n)}$ только при условии, что среди чисел i_1, i_2, ..., i_n нет одинаковых. В противном случае это произведение включается в $T_{on}^{\prime\prime(n)}$. Для $n \geq 3$ операторы $T_{on}^{\prime\prime(n)}$ входят в исчезающие члены и в пределе сокращаются. Интуитивно ясно, что повторные столкновения с одной и той же частицей могут произойти после рассеяния на какой-либо другой частице на большой угол. В сумме /15/, а следовательно, и в формуле Ситенко-Глаубера, соответствующих членов нет. Однако это не является ее дефектом и не означает, что она описывает рассеяние только на малые углы, так как члены, описывающие повторные столкновения, изначально учитываются наравне с другими. Они исчезают только благодаря сокращению с остатком ряда и внемассовыми членами.

На примере трехчастичной мишени видно /см. формулу /13//, что из $T_{on}^{\prime(n)}$ исключены также и некоторые произведения /16/ даже с различными i_1, $i_2, \ldots, i_n$. Последнее обстоятельство делает структуру $T_{on}^{\prime(n)}$ довольно сложной и не позволяет записать эти операторы в общем виде. Для каждого фиксированного N члены $T_{on}^{\prime(n)}$ нетрудно получить из уравнений /14/ серией подстановок и группировкой слагаемых.

Основная идея, использованная нами для получения цепочки уравнений /14/, это разбиение N-частичной мишени на две группы, состоящие из одной и $(N-1)$ частиц, что позволяет рассматривать мишень как эффективно двухчастичную.

Очевидно, с таким же успехом мы можем разбивать мишень и на две произвольные группы, каждая из которых содержит более одной частицы. В этом более общем случае вместо уравнений /9/, /10/ имеем /11/

$$T_N = T_{N_1} + (1 + T_{N_1} G_0)\tau_{N_1 N_2}(1 + G_0 T_{N_1}),$$

$$\tau_{N_1 N_2} = T_{N_2} + T_{N_2} G_0 T_{N_1} G_0 \tau_{N_1 N_2},$$

где $N = N_1 + N_2$, T_{N_i} - оператор рассеяния на i-й группе. Ряд Ватсона принимает вид

$$T_N = \sum_{i=1}^{2} T_{N_i} + \sum_{i \neq j} T_{N_i} G_0 T_{N_j} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n)}_{N_1 N_2}.$$

Таким образом, мишень представлена в виде двух квазичастиц. Поэтому, пользуясь формулой Харрингтона /7/, получим

$$T_N = T_{N_1} + T_{N_2} + T_{N_1} G_0^{on} T_{N_2} + T_{N_2} G_0^{on} T_{N_1} + \delta_N, \qquad /17/$$

где $\delta_N = \sum_{i \neq j} T_{N_i} G_0^{off} T_{N_j} + \sum_{n=3}^{\infty} T^{(n)}_{N_1 N_2}$ в дифракционном пределе стремится к нулю.

Отметим также, что основная идея, использованная в нашей работе, может быть обобщена и в другом направлении. Можно разбивать мишень на произвольное число групп. Например, сделать разбиение на три группы и воспользоваться формулой /13/. Комбинируя разные способы разбиения, можно в каждой конкретной задаче максимально упростить анализ структуры ряда /6/.

Если мишень состоит из тождественных частиц /например, в случае рассеяния на ядре/, то более удобно пользоваться уравнением /17/ вместо /14/. При этом для четных N, выбирая симметричную цепочку разбиений $N = (N_1 + N_2) = (N_1' + N_1'') + (N_2' + N_2'') = \ldots$, где $N_1 = N_2$, $N_1' = N_1''$, $N_2' = N_2''$, благодаря тождественности частиц, можно рассматривать только одну ветвь $N \to N_1 \to N_1' \to \ldots$, что значительно упрощает анализ структуры ряда /6/. Для нечетных N в качестве первого шага следует сделать разбиение $N = 1 + (N-1)$.

Таким образом, цепочка уравнений /14/ или аналогичная цепочка, которая легко может быть получена из уравнений /17/, дают возможность для задачи рассеяния на произвольной мишени сгруппировать ряд /6/, выделив члены, исчезающие в дифракционном пределе. Такой анализ структуры ряда Ватсона имеет практическое значение при проведении расчетов в рамках теории многократного рассеяния, когда энергия столкновения находится в области применимости дифракционного приближения или близка к ней. В этом случае вместе с отбрасыванием остатка ряда, включающего столкновения с кратностью, большей некоторого n, следует также исключить вклад от внемассового рассеяния и некоторые члены ряда с кратностью, меньшей n.

Возможность выделить в явном виде те слагаемые ряда /6/, которые в дифракционном пределе переходят в амплитуду Ситенко-Глаубера, в принципе, позволяет вычислять различные поправки к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ситенко А.Г. Укр.физ.ж., 1959, 4, с.152.
2. Glauber R.J. Phys.Rev., 1955, 100, p.242.
3. Ситенко А.Г. ЭЧАЯ, 1973, 4/2/, с.546.
4. Sternheim M.M. Phys.Rev., 1964, B135, p.912.
5. Remler E.A. Phys.Rev., 1968, 176, p.2108.
6. Harrington D.R. Phys.Rev., 1969, 184, p.1745.
7. Osborn T.A. Ann.Phys., 1970, 58, p.417.
8. Тарасов А.В., Цэрэн Ч. ЯФ, 1970, 12, с.978.
9. Remler E.A. Ann.Phys., 1971, 67, p.114.
10. Eisenberg J.M. Ann.Phys., 1972, 71, p.542.
11. Беляев В.Б., Ракитянский С.А. ЯФ, 1985, 41, с.67; JINR, E4-84-118, Dubna, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 декабря 1984 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Беляев В.Б., Ракитянский С.А. Р4-84-814

О сумме ряда Ватсона в дифракционном приближении

Для задачи рассеяния на N-частичной мишени получена рекуррентная цепочка уравнений, позволяющая для любого N выделить из ряда Ватсона конечное число членов, суммирующихся в дифракционном пределе в амплитуду Ситенко-Глаубера. Показано, что все остальные члены ряда в этом пределе взаимно сокращаются.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Belyaev V.B., Rakityansky S.A. P4-84-814

On the Sum of the Watson Series in the Diffraction Approximation

For the problem of scattering from an n-body target a recurrent chain of equations is obtained, which enables one to extract from the Watson series a finite number of terms forming the Sitenko-Glauber amplitude in the diffraction limit. It is shown that all the remaining terms of the series exactly cancel out in this limit.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984