сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-84-793

В.Б.Беляев, О.И.Картавцев*, В.И.Кочкин

# АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА КОНЕЧНОМЕРНЫМ

*Ташкентский государственный университет

1984

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительное внимание уделяется решению уравнений Фаддеева в дифференциальной форме /1/. Эта форма трехчастичных уравнений, сохраняя все преимущества фаддеевской формулировки, позволяет решать задачу, используя непосредственно парные потенциалы взаимодействия, не прибегая к построению /подчас довольно сложному/ парной внемассовой $t$-матрицы.

Численное решение получающихся двумерных интегродифференциальных уравнений осуществляется, как правило, применением той или иной конечно-разностной схемы.

В данной работе используется предложенный в /2/ метод решения дифференциальных уравнений, заключающийся в замене точного дифференциального оператора $T$ конечномерным оператором $\tilde{T}$. При этом оператор $\tilde{T}$ действует на некотором конечномерном подпространстве так же, как точный оператор $T$, т.е.

$$\tilde{T}T^{-1}|\chi_i\rangle = |\chi_i\rangle; \; i = 1, 2, \ldots, N. \qquad /1/$$

При построении приближенного оператора $\tilde{T}$, что эквивалентно заданию набора $|\chi_i\rangle$, необходимо учесть граничные условия, налагаемые на решение. Эффективность процедуры существенно возрастает, если функции $|\chi_i\rangle$ строить с учетом a priori известных свойств искомого решения.

Применимость аппроксимации /1/ была продемонстрирована в проблеме 2 тел для решения задачи рассеяния и задачи на связанные состояния /2/. В настоящей работе исследуется эффективность применения описанного метода в модельной задаче о нахождении энергии связи 3 тождественных бесспиновых частиц с $S$-волновым парным потенциалом взаимодействия.

## 2. СУТЬ МЕТОДА

Уравнение Фаддеева для данной задачи имеет вид

$$[(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) + E - V(x)(1 + \hat{k})]\psi = 0, \qquad /2/$$

где

$$\hat{k}\psi(x, y) = xy \int_{-1}^{1} \frac{du}{x'y'} \psi(x', y'),$$

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}\,xyu + 3y^2}, \quad y' = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 2\sqrt{3}\,xyu + 3x^2}. \qquad /3/$$

Граничные условия в задаче на связанные состояния имеют вид

$$\psi(0, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, \infty) = \psi(\infty, y) = 0. \qquad /4/$$

В безразмерных единицах уравнение /2/ принимает вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + v(x)(1 + \hat{k})\right] \psi(x, y) = 0, \qquad /5/$$

$$V(x) = -V_0 v(x). \qquad /6/$$

Введем полярные координаты $\rho, \alpha$ : $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$, тогда для функции $\phi(\rho, \alpha) = \rho^{1/2}\psi(x, y)$ имеем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4}\right) - k^2 + e^{-\beta\rho^2}(1 + \hat{k})\right] \phi(\rho, \alpha) = 0 \qquad /7/$$

с граничными условиями:

$$\phi(\rho, 0) = \phi(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \qquad /8/$$

$$\phi(\infty, \alpha) = 0. \qquad /8'/$$

Интегральный оператор $\hat{k}$ в уравнении /7/ действует только на угловую переменную $\alpha$. Как всегда свойства этого оператора опишем заданием нормированных собственных функций $\eta_n(\alpha)$ и собственных значений $\lambda_n$:

$$\hat{k}\,\eta_n = \lambda_n \eta_n. \qquad /9/$$

Легко видеть, что

$$\eta_n(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 2n\alpha, \qquad /10/$$

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3}\,n} \sin\frac{\pi n}{3}. \qquad /11/$$



Функции $\eta_n(\alpha)$ являются также собственными функциями оператора кинетической энергии T:

$$T = -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4}\right) \qquad /12/$$

и образуют полный набор в классе функций, удовлетворяющих условию /8/.

Удобно аппроксимировать потенциал $v(\rho\cos\alpha)$ по переменной $\alpha$ следующим образом:

$$v \simeq v_N = \sum_{m,n=1}^{N} |\eta_m\rangle\, v_{mn}(\rho) \langle \eta_n|, \qquad /13/$$

где

$$v_{mn}(\rho) \equiv \int_0^{\pi/2} d\alpha\, \eta_m(\alpha)\, \eta_n(\alpha)\, v(\rho\cos\alpha), \quad \eta_m(\alpha) \equiv \langle\alpha|\eta_m\rangle. \qquad /14/$$

Применение аппроксимации /13/ не связано с исследуемым в этой работе методом решения дифференциальных уравнений и ее точность легко контролируется численно.

Далее будем решать уравнение

$$[\,T + k^2 - v_N(1 + \hat{k})]\,|\phi\rangle = 0, \qquad /15/$$

полученное из /7/ заменой $v \to v_N$, с граничными условиями /8/ и /8'/.

Точный оператор кинетической энергии /12/ в уравнении /15/ заменим на приближенный оператор $\tilde{T}$, определенный равенством /1/. Тогда, как и в [2], получаем систему линейных относительно $C_i$ алгебраических уравнений:

$$\sum_i^M C_i A_{ij}(k^2) = \sum_{i=1}^M C_i \langle \chi_j | T^{-1} + k^2 - v_N(1 + \hat{k})\,]^{-1} | \chi_i \rangle = 0. \qquad /16/$$

Коэффициенты $C_i$ определяют приближенное решение уравнения /15/:

$$|\tilde{\phi}\rangle = [\,k^2 - v_N(1 + \hat{k})]^{-1} \sum_{i=1}^M C_i\, |\chi_i\rangle = \sum_{i=1}^M C_i\, |\tilde{\phi}_i\rangle, \qquad /17/$$

здесь M – число функций $|\chi_i\rangle$, на которых выполняется соотношение /1/.

Собственное значение находится из условия

$$\det A(k^2) = 0. \qquad /18/$$

Важно иметь в виду, что совпадение приближенного $\tilde{T}$ и точного T операторов на конечномерном подпространстве еще не гарантирует их близости на решении уравнения /15/. Поэтому следует ввести дополнительные условия, которые бы обеспечивали эту близость. Ими могут быть условия минимума следующих функционалов:

$$F_1 = \left(1 - \frac{\langle\tilde{\phi}|\tilde{T}|\tilde{\phi}\rangle}{\langle\tilde{\phi}|T|\tilde{\phi}\rangle}\right)^2, \qquad /19/$$

$$F_2 = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{M} \langle\tilde{\phi}_j|T-\tilde{T}|\tilde{\phi}_i\rangle^2 C_j^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{M} \langle\tilde{\phi}_j|\tilde{T}|\tilde{\phi}_j\rangle^2 C_j^2}, \qquad /20/$$

$$F_3 = \frac{\sum\limits_{i}^{M} \langle\tilde{\phi}_i|T-\tilde{T}|\tilde{\phi}\rangle^2}{\sum\limits_{i=1}^{M} \langle\tilde{\phi}_i|T|\tilde{\phi}\rangle^2}. \qquad /21/$$

Минимизация этих функционалов осуществляется варьированием набора $\chi_i$. При этом устраняются лишние решения, которые могут возникнуть при замене T на T.

Функции $|\chi_i\rangle$ выберем в следующей форме:

$$\langle\alpha, \rho|\chi_i\rangle \equiv \chi_i(\alpha, \rho) = [v_N(1 + \hat{k}) - k^2]\,\rho^{\gamma} e^{-a_i\rho}\,\eta_{n_i}(\alpha), \qquad /22/$$

Такой выбор функций $\chi_i$ обеспечивает выполнение граничных условий /8/ и /8'/. Как следует из уравнения /15/, правильное поведение решения при малых $\rho$ обеспечивается выбором $\gamma_i = \frac{1}{2} + 2n_i, n_i = 1, 2, \dots, N$.

Матричные элементы $A_{ij}$ по функциям /22/ имеют вид

$$A_{ij} = \int_0^\infty d\rho\, d\rho_1\, \rho^{\gamma_i} \rho_1^{\gamma_j} \exp(-a_i\rho - a_j\rho_1) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{N} g_m(\rho, \rho_1)\, v_{mn_i}(\rho)\,(1 + \lambda_{n_i}) - k^2\delta_{mn_i}] \times$$

$$\times [v_{mn_j}(\rho_1)(1 + \lambda_{n_j}) - k^2\delta_{mn_j}] - \int_0^\infty d\rho\, \rho^{\gamma_i + \gamma_j} \exp[-(a_i + a_j)\rho] \times \qquad /23/$$

$$\times [v_{n_j n_i}(\rho)(1 + \lambda_{n_j}) - k^2\delta_{n_j n_i}],$$

при получении /23/ использовалось соотношение

$$v_N(1 + \hat{k}) = \sum_{m,n=1}^{N} v_{mn}(\rho)(1 + \lambda_n)|\eta_m\rangle\langle\eta_n|, \qquad /24/$$

функции $g_n(\rho, \rho_1)$ имеют вид



$$g_n(\rho, \rho_1) = \frac{(\rho\rho_1)^{1/2}}{4\pi}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^{2n}; \quad \rho_< = \min(\rho, \rho_1), \quad \rho_> = \max(\rho, \rho_1) \qquad /25/$$

и являются коэффициентами разложения ядра G оператора $T^{-1}$:

$$G(\rho, \rho', \alpha, \alpha') = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\alpha)\,\eta_n(\alpha')\,g_n(\rho, \rho'). \qquad /26/$$

## 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Уравнение /15/ решалось с потенциалом

$$v(x) = e^{-\beta x^2}, \quad \beta = \frac{h^2}{m}\,\frac{\beta_0}{V_0}, \qquad /27/$$

параметры которого $\beta_0$=0,39061 фм$^{-2}$ и $V_0$ = 51,5 мэВ /3/ описывают низкоэнергетическое NN-рассеяние в триплетном состоянии.

В простейшем случае M = 1 и функционалы /19/-/21/ совпадают, т.е. $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Функционал F варьировался по единственному свободному параметру $a_1$ в функции $\chi_1$ вида /22/ с $n_1 = 1$, $\gamma_1 = 5/2$. Минимум функционала достигается при $a_1$ = 0,41 и равен $5{,}4 \cdot 10^{-3}$. Энергия связи рассматриваемой трехчастичной системы оказалась равной E = 10,65 МэВ, точное значение E = 9,77 МэВ /3/.

Количество членов, используемых при аппроксимации потенциала v(x), равнялось N = 7. Для иллюстрации сходимости этого разложения приведем энергии связи, полученные при том же значении параметра $a_1$:

| N | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E /МэВ/ | 11,31 | 10,93 | 10,74 | 10,65 | 10,62 | 10,59 | 10,58 |

В случае M = 2 функционалы $F_i$ /i = 1,2,3/ минимизировались по двум параметрам $a_1, a_2$ функций $\chi_1, \chi_2$ вида /22/ с $n_1 = n_2 = 1$, $\gamma_1 = 5/2$, $\gamma_2 = 3$.

Обнаружилось, что $F_i$ совместно уменьшаются лишь при $a_2 \to \infty$ и $a_1 \to 0{,}41$. При этом, как и следовало ожидать, значение энергии стремится к величине E, полученной в случае M = 1.

Таким образом, уже одночленная аппроксимация оператора кинетической энергии T оказывается достаточно точной в смысле /19/, что и обеспечивает близость приближенного значения энергии к точному. По-видимому, это означает, что при помощи функции $\chi_1$ удается построить решение, которое обладает правильным поведением всюду, кроме области двухчастичной асимптотики.

В заключение авторы благодарят Н.Ю.Ширикову за неоценимую помощь при составлении программы расчета для ЭВМ БЭСМ-6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A. Ann.Phys., 1976, 99, p. 30.
2. Беляев В.Б., Картавцев О.И. ОИЯИ, Р4-84-28, Дубна, 1984.
3. Baker George A. et al. Phys.Rev., 1962, vol. 125, No 5, p. 1754.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 декабря 1984 года.

## Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

| ИНДЕКС | ТЕМАТИКА | Цена подписки на год |
|---|---|---|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий | 10 р. 80 коп. |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий | 17 р. 80 коп. |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика | 4 р. 80 коп. |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий | 8 р. 80 коп. |
| 5. | Математика | 4 р. 80 коп. |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия | 4 р. 80 коп. |
| 7. | Физика тяжелых ионов | 2 р. 85 коп. |
| 8. | Криогеника | 3 р. 85 коп. |
| 9. | Ускорители | 7 р. 80 коп. |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных | 7 р. 80 коп. |
| 11. | Вычислительная математика и техника | 6 р. 80 коп. |
| 12. | Химия | 1 р. 70 коп. |
| 13. | Техника физического эксперимента | 8 р. 80 коп. |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами | 1 р. 70 коп. |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях | 1 р. 50 коп. |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты | 1 р. 90 коп. |
| 17. | Теория конденсированного состояния | 6 р. 80 коп. |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники | 2 р. 35 коп. |
| 19. | Биофизика | 1 р. 20 коп. |

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. P4-84-793

Аппроксимация дифференциального оператора уравнений Фаддеева конечномерным

Исследуются возможности метода конечномерной аппроксимации дифференциального оператора. Развиваемый подход применяется при решении уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве. Рассчитана энергия связи 3 тождественных бесспиновых частиц с $S$-волновым парным потенциалом взаимодействия. Одномерная аппроксимация приводит к удовлетворительному значению энергии.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Belyaev V.B., Kartavtsev O.I., Kochkin V.I. P4-84-793

Approximation of the Differential Operator for Faddeev Equations by a Finite-Dimensional Operator

Possibilities of the method of finite-dimensional approximation of the differential operator are investigated. The approach developed is applied for solving Faddeev equations in the configurational space. The binding energy for three identical spinless particles for the $S$-wave two-body potential is calculated. The one-dimensional approximation gives a satisfactory result in comparison with the exact value.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984