ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-84-759

Б.Н.Захарьев, Б.В.Рудяк*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ $aE + b\ell(\ell + 1) = \mathrm{const}$ И НОВЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Направлено в "Journal of Physics"

* Калининский государственный университет

1984

ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения взаимодействия по данным рассеяния - обратные задачи /ОЗ/, рассматриваются как в квантовой, так и в квазиклассической и классической механике. Несмотря на то, что до сих пор не удалось получить предельного перехода от квантовой к классической ОЗ, развитие всех трех форм ОЗ имеет много общих моментов. В каждом из этих случаев имеются два основных подхода к решению ОЗ: потенциал восстанавливается по данным рассеяния при фиксированных значениях либо орбитального момента, либо энергии.

В классической и квазиклассической теории в недавних работах ленинградских физиков И.В.Богданова, Ю.Д.Демкова /1/ и Д.И.Абрамова /2/ предложен обобщенный метод ОЗ, в котором энергия и квадрат орбитального момента в исходных данных берутся связанными линейной зависимостью.

Первым шагом к построению подобного метода в квантовой ОЗ можно считать создание соответствующих точно решаемых моделей /3,4/.

В данной работе предложены уравнения ОЗ для случая $aE + b\ell(\ell+1) = \mathrm{const}$ /раздел 1/. Для этого был использован формализм Кудре, Коза /5/ и Корнилля /6/, являющийся обобщением метода Ньютона /7/ на более широкий класс уравнений:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + W_0(r)\right)\phi_0(\lambda, r) = \lambda h(r)\phi_0(\lambda, r); \quad \phi_0(\lambda, r) = 0, \qquad /1/$$

причем W_0 может содержать, кроме исходного потенциала V_0, слагаемые, отвечающие фиксированным значениям ℓ_0 и E_0:

$W_0(r) = V_0(r) + \ell_0(\ell_0+1)/r^2 - E_0$.

Ньютоном /7/ были рассмотрены два случая: $h(r) = 1$, что соответствует ОЗ при $\ell = \mathrm{const}$, и $h(r) = 1/r^2$, что соответствует ОЗ при $E = \mathrm{const}$. В нашем случае ОЗ с $aE + b\ell(\ell+1) = \mathrm{const}$ следует брать $h(r) = (a + br^2)/r^2$.

В работах /5,6/ получены обобщенные уравнения Гельфанда-Левитана:

$$K(r, r') = Q(r, r') - \int_0^r K(r, r'')h(r'')Q(r'', r')\,dr'' \qquad /2/$$

с симметричным ядром $Q(r, r')$, содержащим всю информацию о данных рассеяния

$$Q(r, r') = \int \phi_0(\lambda, r)\,\phi_0(\lambda, r')\,d\Lambda(\lambda). \qquad /3/$$

Функции $\phi_0(\lambda, r)$ являются решениями уравнения /1/ с известным потенциалом $V_0(r)$. Решение $K(r,r')$ уравнения /2/ представляет собой ядро преобразования от известных $\phi_0(\lambda, r)$ к функциям $\phi(\lambda, r)$:

$$\phi(\lambda, r) = \phi_0(\lambda, r) - \int_0^r K(r, r')\,h(r')\,\phi_0(\lambda, r')\,dr', \qquad /4/$$

которые, в свою очередь, являются решениями уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + W(r)\right)\phi(\lambda, r) = \lambda h(r)\,\phi(\lambda, r); \quad \phi(\lambda, 0) = 0, \qquad /5/$$

где для искомых $W(r) = V(r) + \ell_0(\ell_0+1)/r^2 - E_0$ имеем:

$$V(r) = V_0(r) - 2h^{1/2}(r)\,\frac{d}{dr}\left[h^{1/2}(r)\,K(r, r)\right]. \qquad /6/$$

Уравнение /2/ переходит в обычное уравнение Гельфанда-Левитана при $h(r) = 1$ и в уравнение метода Редже-Ньютона-Сабатье при $h(r) = 1/r^2$. Случай $h(r) = 1/r$, исследованный одесскими физиками И.В.Поплавским и М.Н.Попушоем [8], соответствует частному случаю ОЗ с фиксированными значениями ℓ и E и переменной величиной кулоновской константы связи α /заряда/.

В разделе 1 рассмотрена ОЗ с фиксированным значением суммы $aE + b\ell(\ell+1)$, чему отвечает $h(r) = (a + br^2)/r^2$.

Уравнения ОЗ удобны для построения точно решаемых моделей 9,10, представляющих самостоятельный интерес. Обобщенное уравнение Гельфанда-Левитана /2/ позволяет расширить класс потенциалов, допускающих решения в замкнутой аналитической форме /разделы 2,3/.

Построение точно решаемых моделей для произвольных функций $h(r)$ в /1/ с помощью техники баргмановских потенциалов рассмотрено в разделе 2, а с помощью обобщенного преобразования Дарбу-Крама-Крейна - в разделе 3.

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПО ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ ПРИ $aE + b\ell(\ell + 1) = \mathrm{const}$

Полагая в /1/-/6/

$$h(r) = (a + br^2)/r^2, \qquad /7/$$

приходим к уравнениям с фиксированным значением* $aE + b\ell(\ell+1)$.

Уравнение Шредингера принимает в этом случае вид

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\ell_0(\ell_0+1)}{r^2} - E_0\right)\phi(\lambda, r) = \lambda\,\frac{a + br^2}{r^2}\,\phi(\lambda, r). \qquad /8/$$

Изменение λ в правой части /8/ приводит к согласованному изменению энергии $E = E_0 + \lambda b$ и орбитального момента $\ell(\ell+1) = \ell_0(\ell_0+1) - \lambda a$, откуда следует, что $aE + b\ell(\ell+1) = aE_0 + b\ell_0(\ell_0+1) = \mathrm{const}$. Для V в /8/ имеем:

$$V(r) = V_0(r) - 2\,\frac{(a+br^2)^{1/2}}{r}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{(a+br^2)^{1/2}}{r}K(r, r)\right], \qquad /9/$$

а ядро K оператора преобразования от ϕ_0 к ϕ:

$$\phi(\lambda, r) = \phi_0(\lambda, r) - \int_0^r K(r, r')\,\frac{a + br'^2}{r'^2}\,\phi_0(\lambda, r')\,dr' \qquad /10/$$

является решением уравнения Гельфанда-Левитана

$$K(r, r') = Q(r, r') - \int_0^r K(r, r'')\,\frac{a + br''^2}{r''^2}\,Q(r'', r')\,dr''. \qquad /11/$$

На рисунке в плоскости $\{E, \ell(\ell+1)\}$ изображены прямые, вдоль которых задаются исходные данные рассеяния. Параметры E_0, ℓ_0 задают точку, через которую проходят эти прямые, а соотношение между a и b определяет наклон линий. При $a = 0$ получаем ОЗ с фиксированным ℓ /вертикальная прямая на рисунке, а при $b = 0$ - ОЗ с фиксированным E /горизонтальная прямая/.

Для определения ядра Q уравнения Гельфанда-Левитана /11/ необходимо задать функцию $\Lambda(\lambda)$, которая содержит в себе информацию о данных рассеяния на фиксированной линии в плоскости $\{E, \ell(\ell+1)\}$ /см. рисунок/.

Было бы желательно ограничиться в выражении /3/ для Q суммированием лишь по физическим значениям орбитального момента:

$$Q(r, r') = \sum_{\ell}^{\infty} C_\ell\,\phi_0(\lambda_\ell, r)\,\phi_0(\lambda_\ell, r'). \qquad /13/$$

---

* Как частные случаи могут быть также рассмотрены варианты обратных задач /α - кулоновская константа связи/:

1/ $\ell = \mathrm{const}$ $\quad b\alpha + cE = \mathrm{const};$ $\quad h(r) = (br + c)/r;$

2/ $E = \mathrm{const}$ $\quad c\ell(\ell+1) - a\alpha = \mathrm{const};$ $\quad h(r) = (a + cr)/r^2;$

3/ $aE + b\ell(\ell+1) = \mathrm{const}$ $\quad cE + b\alpha = \mathrm{const};$ $\quad h(r) = \dfrac{a + br^2 + cr}{r^2}.$

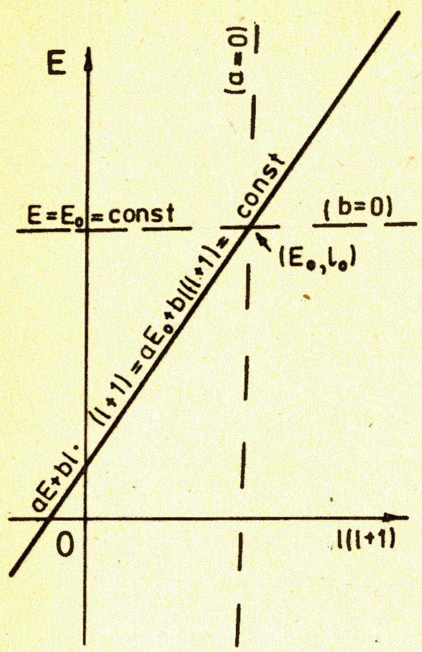

Рис. Расположение в плоскости различных наборов данных рассеяния, по которым восстанавливается потенциал. В подходе Гельфанда-Левитана-Марченко исходные данные располагаются вдоль горизонтальной линии $E=E_0$, в подходе Редже-Ньютона-Сабатье – вдоль вертикали $\ell=\ell_0$; прямая с произвольным наклоном отвечает обратной задаче, рассматриваемой в данной работе.

Однако вопросы определения C_ℓ по данным рассеяния, существования и единственности решения уравнения /11/ требует при этом дополнительного исследования. В случае $E=\mathrm{const}$ такие исследования были выполнены в работах /7,9,11,12/.

2. ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНОВСКОГО ТИПА

Уравнение Гельфанда-Левитана /2/ сводится к системе простых алгебраических уравнений в случае, когда его ядро Q является вырожденным

$$Q(r,r') = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \,\phi_0(\lambda_\ell, r)\,\phi_0(\lambda_\ell, r'). \qquad /14/$$

При этом как прямая, так и обратная задача рассеяния имеют точные решения в замкнутой аналитической форме.

Ограничимся рассмотрением простейшего случая $N=1$ в /14/. Обобщение на случай произвольного N не предствляет существенных трудностей.

Пусть

$$Q(r,r') = C_1 \quad \phi_0(\lambda_1, r)\,\phi_0(\lambda_1, r'). \qquad /15/$$

Подставляя это ядро в уравнение /2/ и учитывая /4/, получаем

$$K(r,r') = C_1 \quad \phi(\lambda_1, r)\,\phi_0(\lambda_1, r'). \qquad /16/$$

Из /16/ и /4/ сразу находим*

$$\phi(\lambda_1, r) = \frac{\phi_0(\lambda_1, r)}{1 + C_1 \int_0^r \phi_0^2(\lambda_1, r')\,h(r')\,dr'}. \qquad /17/$$

Следовательно,

$$K(r,r') = \frac{C_1\,\phi_0(\lambda_1, r)\,\phi_0(\lambda_1, r')}{1 + C_1 \int_0^r \phi_0^2(\lambda_1, r'')\,h(r'')\,dr''}. \qquad /18/$$

Отсюда, согласно /6/ и /4/, определяем искомый потенциал

$$V(r) = V_0(r) - 2C_1 h^{1/2}(r) \frac{d}{dr}\Big[h^{1/2}(r) \frac{\phi_0^2(\lambda_1, r)}{1 + C_1 \int_0^r \phi_0^2(\lambda_1, r')\,h(r')\,dr'}\Big] \qquad /19/$$

и регулярное решение уравнения Шредингера /5/ с этим потенциалом

$$\phi(\lambda, r) = \phi_0(\lambda, r) - \frac{C_1\phi_0(\lambda_1, r) \int_0^r \phi_0(\lambda_1, r')\,h(r')\,\phi_0(\lambda, r')\,dr'}{1 + C_1 \int_0^r \phi_0^2(\lambda_1, r')\,h(r')\,dr'}. \qquad /20/$$

При выводе /20/ мы воспользовались формулой, следующей из уравнения /1/:

$$(\lambda - \lambda_1) \int_0^r \phi_0(\lambda_1, r')\,h(r')\,\phi_0(\lambda, r')\,dr' = W[\phi_0(\lambda, r), \phi_0(\lambda_1, r)],$$

где $W[p,g] = pg' - p'g$.

При $h(r) \equiv 1$ и $h(r) = 1/r^2$ формулы /17/-/20/ переходят в известные соотношения для потенциалов баргмановского типа с $\ell=\mathrm{const}$ и $E=\mathrm{const}$ соответственно /9,10/. При $h(r)=1/r$ имеем формулы точно решаемой модели ОЗ с фиксированными значениями E, ℓ и переменной величиной заряда /8/.

В нашем случае имеем

$$V(r) = V_0(r) - 2C_1 \frac{(a+br^2)^{1/2}}{r} \frac{d}{dr}\Big[\frac{(a+br^2)^{1/2}}{r} \cdot \frac{\phi_0^2(\lambda_1, r)}{1 + C_1 \int_0^r \phi_0^2(\lambda_1, r') \frac{a+br'^2}{r'^2} dr'}\Big]. \qquad /21/$$

---

* Решение $\phi(\lambda_1, r)$ соответствует связанному состоянию /обобщенному/. Если значение λ_1 выбрано из непрерывного спектра исходной задачи /1/, то $\phi(\lambda_1, r)$ – функция связанного состояния, погруженного в непрерывный спектр /13/.

Построим теперь функцию Йоста, отвечающую потенциалу /21/. Подставляя $h(r) = (a + br^2)/r^2$ в выражение для $\phi(\lambda, r)$ в /20/ и переходя к пределу $r \to \infty$, с учетом

$$\phi(\lambda, r) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{2ik}[f^-(\lambda)e^{ikr} - f^+(\lambda)e^{-ikr}], \qquad /22/$$

находим функцию Йоста для V из /21/:

$$f^+(\lambda) = f_0(\lambda)\frac{k - i\kappa}{k + i\kappa}, \qquad /23/$$

где $E_0 + \lambda_1 b = -\kappa^2$; $E_0 + \lambda b = k^2$, а $f_0(\lambda)$ отвечает $V_0(r)$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $y_0(\lambda, r)$ - известные решения уравнения /1/ с потенциалом $V_0(r)$. Тогда

$$y(\lambda, r) = \frac{W[y_0(\lambda, r), y_0(\lambda', r)]}{h^{1/2}(r)\, y_0(\lambda', r)(\lambda - \lambda')} \qquad /24/$$

являются решениями уравнения /5/ с новым потенциалом

$$V(r) = V_0(r) + h^{1/2}(h^{-1/2})'' + \frac{d}{dr}[\ln h(r)]\frac{d}{dr}[\ln y_0(\lambda', r)] - 2\frac{d^2}{dr^2}[\ln y_0(\lambda', r)]. \qquad /25/$$

В /24/, /25/ фиксированное значение λ' выбрано так, что $y_0(\lambda', r)$- не обращалось в нуль на интервале* (r_1, r_2), на котором рассматривается преобразование уравнения /1/ в /5/. Функция $h(r)$ также не должна обращаться в нуль на (r_1, r_2).

Решения $z_0(\lambda, r)$, $z(\lambda, r)$, линейно-независимые от $y_0(\lambda, r)$, $y(\lambda, r)$, связаны аналогичным преобразованием:

$$z(\lambda, r) = \frac{W[z_0(\lambda, r), y_0(\lambda', r)]}{h^{1/2}(r)\, y_0(\lambda', r)(\lambda - \lambda')}. \qquad /24'/$$

В справедливости этих утверждений можно убедиться непосредственно подстановкой /24/ в уравнение /5/ с потенциалом /25/,

---

* Интервалом (r_1, r_2) может служить и вся полуось $(0, +\infty)$.

подобно тому, как это делалось в случае $h(r) \equiv 1$ /см., например [14]/.

Формула /24/ при $\lambda = \lambda'$ дает

$$y(\lambda', r) = \frac{\int^r y_0^2(\lambda', t)\, h(t)\, dt}{h^{1/2}(r)\, y_0(\lambda', r)}. \qquad /26/$$

В качестве линейно-независимого решения можно взять

$$z(\lambda', r) = \frac{1}{h^{1/2}(r)\, y(\lambda', r)}, \qquad /27/$$

с помощью которого строится обратное преобразование

$$y_0(\lambda, r) = \frac{W[y(\lambda, r), z(\lambda', r)]}{h^{1/2}(r)\, z(\lambda', r)}. \qquad /28/$$

Описанные выше преобразования могут быть применены многократно. При этом получаются все новые и новые потенциалы и соответствующие им решения: $\{V_0, y_0\} \to \{V_1, y_1\} \to \dots \to \{V_n, y_n\}$.

Оказывается, что при таком n-кратном преобразовании выражение для потенциала V_n имеет довольно компактный вид:

$$V_n(r) = V_0(r) + nh^{1/2}(r)[h^{-1/2}(r)]'' + [\ln h(r)]'[\ln Y_n(r)]' - 2[\ln Y_n(r)]'', \qquad /29/$$

где

$$Y_n(r) = \prod_{i=0}^{n-1} y_i(\lambda_i', r), \qquad /30/$$

причем значения λ_i' выбираются таким образом, чтобы решения $y_i(\lambda_i', r)$, генерирующие преобразования /24/, не обращались в нуль на рассматриваемом интервале (r_1, r_2).

Пусть функция $h(r) \neq 0$ на всей полуоси $[0, +\infty)$, а регулярное решение $\phi_0(\lambda', r)$ не обращается в нуль нигде, кроме точки $r = 0$. Тогда преобразование /24/ переводит регулярное решение $\phi_0(\lambda, r)$ уравнения /1/ в регулярное решение $\phi_0(\lambda', r)$ уравнения /5/.

Производя последовательно два преобразования: один раз с помощью регулярного решения $\phi_0(\lambda', r)$, а второй раз с помощью нерегулярного решения

$$\psi(\lambda', r) = \frac{1}{h^{1/2}(r)\,\phi_0(\lambda', r)}[1 + C_1\int_0^r h(t)\phi_0^2(\lambda', t)\,dt], \qquad /31/$$

получаем для потенциала и регулярного решения выражения, совпадающие с /19/, /20/ раздела 2. Доказательство этого факта проводится в полной аналогии со случаем $h(r) \equiv 1$ [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая форма обратной задачи, в которой исходные данные рассеяния берутся с фиксированным значением $aE + b\ell(\ell+1)$: потенциал /9/ и регулярные функции /10/ находятся с помощью решения интегрального уравнения /11/. Дополнительных исследований, однако, требуют вопросы существования и единственности решений ОЗ, полноты наборов используемых функций, связи спектральных данных с данными рассеяния.

С помощью метода ОЗ для уравнения Штурма-Лиувилля /1/ строятся потенциалы баргмановского типа, что существенно расширяет класс точно решаемых моделей.

Получены обобщенные преобразования Дарбу-Крама-Крейна /24/, /25/, с помощью которых, в частности, можно строить баргмановские потенциалы. Формулы /29/, /30/ n-кратного преобразования потенциала $V_0 \to V_1 \to \ldots \to V_n$ имеют довольно компактный вид.

Рассмотрены предельные переходы к известным случаям $E = \mathrm{const}$ или $\ell = \mathrm{const}$, а также к формализму обратной задачи с фиксированными E и ℓ переменной величиной кулоновской константы связи.

Авторы благодарны А.А.Сузько за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов И.В., Демков Ю.Н. ЖЭТФ, 1982, 82, вып.6, с. 1798-1806.
2. Абрамов Д.И. ТМФ, 1984, 58, №2, с. 244-253.
3. Rudyak B.V., Suzko A.A., Zakhariev B.N. Phys.Scripta, 1984, 29, p. 515-517.
4. Сузько А.А. Тезисы 9-й Европейской конференции "Проблемы нескольких тел в физике".Изд.ТГУ, Тбилиси, 1984,с.56-57.
5. Coudray C., Coz M. Ann.Phys., 1970, 61, No 2, p. 488-529.
6. Cornille H.-J. J.Math.Phys., 1976, 17, No 12, p. 2143-2158; 1977, 18, No 9, p. 1855-1869.
7. Newton R.G. J.Math.Phys., 1962, 3, p. 75.
8. Поплавский И.В. Укр.физ.журн. 1983, 28, №11, с. 1631-1636; 1984, 29, №7, с 977-980; №8, с. 1148-1153; Попушой М.Н. Укр.физ.Ж. 1984, 29, №1, с. 24-29.
9. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. "Мир", М., 1980.
10. Захарьев Б.Н. и др. ЭЧАЯ, 1982, 13, вып.6, с. 1284-1335. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние /прямая и обратная задача/. Энергоатомиздат, 1984, с. 113.
11. Sabatier P. J.Math.Phys., 1966, 7, No 8, p. 1515.
12. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля."Наука",М., 1984.
13. Gazdy B. Phys.Lett., 1977, A61, No 2, p. 89.
14. Фаддеев Л.Д. УМН, 1959, 14, вып.4, с. 57-119.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 ноября 1984 года.

Захарьев Б.Н., Рудяк Б.В. Р4-84-759

Обратная задача при $aE + b\ell(\ell+1) = \mathrm{const}$ и новые точно решаемые модели

Развивается формализм восстановления локального сферически-симметричного потенциала по данным рассеяния с фиксированным соотношением между значениями энергии E и орбитального момента ℓ. Частными случаями данного формализма являются известные методы Гельфанда-Левитана-Марченко /$a = 0$/ и Редже-Ньютона-Сабатье /$b = 0$/. Получен новый класс точных решений квантовых задач.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Zakhariev B.N., Rudyak B.V. P4-84-759

Inverse Problem for $aE + b\ell(\ell+1) = \mathrm{const}$ and New Exactly Solvable Models

The formalism is developed for reconstructing of local spherically symmetric potentials from scattering data with a fixed relation between energy values E and angular momenta ℓ. As the limiting cases ($a \to 0$ and $b \to 0$) two well known methods of Gelfand-Levitan-Marchenko ($a = 0$) and Redge-Newton-Sabatier ($b = 0$) can be obtained. A new class of exactly solvable quantum models is given (e.g. generalized Bargmann potentials).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984