сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-84-727

Р.М.Ямалеев

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

1984

ВВЕДЕНИЕ

Теория спина 1/2, созданная в трудах Паули [1] и Дирака [2], оказалась первой среди возможных благодаря экспериментальным данным, прежде всего экспериментам Штерна-Герлаха. Однако, с точки зрения теории, первой должна была возникнуть идея спина 1: уравнение, описывающее безмассовую частицу со спином 1 - уравнение Максвелла - было уже известно давно, а аналогия с оптикой широко использовалась при получении первых волновых уравнений квантовой механики. Как известно, уравнение для частицы со спином 1 с ненулевой массой покоя было получено лишь 10 лет спустя, как Шредингер написал первое волновое уравнение квантовой механики. Теория спина 1 не требует введения новых математических объектов - операторы спина 1 выражаются через генераторы группы 3-мерных вращений и действуют в пространстве 3-мерных векторов. Эта особенность позволяет рассматривать спин 1 как результат проявления свойств самого пространства и структуры связи, существующей между генераторами групп трансляции и поворотов в этом пространстве [3]. Связь спина с пространством, установленная на примере спина 1, выглядела бы вполне естественной, если бы спин 1 был фундаментальным. Однако общепринятым фактом является фундаментальность спина 1/2. Спином 1/2 обладают самые стабильные частицы, прежде всего электрон, а с точки зрения теории это - единственный спин, для которого создана стройная последовательная теория, приводящая, применительно к электрону, к прекрасному согласию с экспериментом. Таким образом, если искать связь спина с пространством, то она должна иметь место только применительно к фундаментальному спину. Как показано в [4], подобная связь в нерелятивистской теории может быть установлена ценой перехода от 3-мерного к 4-мерному евклидову пространству. Особенности нерелятивистской теории частиц со спином 1/2 таковы, что теория становится наиболее последовательной, если она сформулирована в 4-мерном евклидовом пространстве. При этом соответствие с трехмерностью реального пространства достигается путем перехода на 3-мерную гиперсферу. На гиперсфере уравнения движения принимают каноническую форму, поскольку оператор Гамильтона выражается через генераторы только одной группы - SU(2), реализующие конечно- и бесконечномерные представления.

Об... ...тут ...ядерных ... БИБЛИОТЕКА

§1. СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ СПИНА 1 И 1/2

Матрица преобразования группы 0/3/ в векторной параметризации, согласно Ф.И.Федорову [5], имеет вид

$$T_3(\vec{c}) = (1 + c^x)/(1 - c^x), \qquad /1.1/$$

где $\vec{c}$ - вектор-параметр преобразования, c^x - кососимметричная матрица 3x3 из компонент вектора $\vec{c}$. При вращении на бесконечно малый угол получим

$$T_3(\vec{c}) = 1 + 2\vec{r}_3\delta\vec{c} + \ldots, \qquad /1.2/$$

где $\vec{r}_3 = 1/2\partial T_3/\partial\vec{c}|_{\vec{c}=0}$ являются матрицами спина 1, определенными в декартовом базисе. Они определяют явный вид операторов спина 1:

$$S_k = -i\hbar r_{3k}. \qquad /1.3/$$

Операторы r_{3k}, как генераторы группы SO(3), реализуют конечномерные представления. Операторы, реализующие бесконечномерные представления группы SO(3), можно получить с помощью отображения Жордана. В координатном пространстве они имеют вид

$$\mathcal{J}_{3k} = r^{in}_{3k} x_i \frac{\partial}{\partial x^n} \qquad /1.4/$$

и определяют явный вид оператора орбитального момента

$$\vec{M} = -i\hbar\vec{\mathcal{J}}_3. \qquad /1.5/$$

Как известно [6], только матрицы спина 1 имеют представления как в декартовом, так и в циклическом базисах. Матрицы Паули, наиболее часто используемые для определения оператора спина 1/2, являются спиновыми матрицами в представлении циклического базиса. Понятие "представление декартова базиса" может быть применено к спину, если размерность представления совпадает с числом измерений пространства. Определение матриц спина 1/2 в декартовом базисе возможно только в пространстве 4 измерений. Известно, что группа SO(4) изоморфна прямому произведению SU(2)×SU(2)/±1. Выразим этот изоморфизм в векторной параметризации группы SO(4) [5]. Получим

$$O(4) = \frac{(1 + \hat{a}_+)(1 + \hat{b}_-)}{\sqrt{(1 + \vec{a}^2)(1 + \vec{b}^2)}} = T_+(\vec{a})\,T_-(\vec{b}). \qquad /1.6/$$

Можно показать, что матрицы

$$\vec{r}_+ = \partial T_+/\partial\vec{a}\ (\vec{a} = 0),\quad \vec{r}_- = \partial T_-/\partial\vec{b}\ (\vec{b} = 0) \qquad /1.7/$$

совпадают с матрицами спина 1/2, определенными в декартовом базисе. Бесконечномерными аналогами операторов спина 1/2

$$\vec{S}_\pm = -i\hbar\vec{r}_\pm/2 \qquad /1.8/$$

являются операторы

$$\vec{\mathfrak{M}}_\pm/2 = (\vec{M} \pm \vec{N})/2,\quad \vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}],\ \vec{N} = r_4\vec{p} - \vec{r}p_4, \qquad /1.9/$$

которые получаются из /1.8/ с помощью отображения Жордана в координатном представлении. Операторы $\vec{S}_\pm$ и $\vec{\mathfrak{M}}_\pm/2$ реализуют конечно- и бесконечномерные представления группы SO(4) ~ SU(2)× ×SU(2)/±1. Аналогично операторам $\vec{M}$ и $\vec{S}$ (S = 1) операторы $\vec{\mathfrak{M}}/2$ и $\vec{S}$ (S = 1/2) являются объектами одинаковой природы.

§2. СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

В механике /классической и квантовой/ основным соотношением, определяющим структуру уравнений движения, является соотношение между энергией и импульсом:

$$2mH = p^2. \qquad /2.1/$$

Энергия и импульс, действительно, являются основными динамическими величинами механики. Операторы энергии и импульса являются генераторами группы трансляции во времени и в пространстве. Однако в квантовой механике соотношение /2.1/ имеет ограниченную область применения - оно определяет уравнения движения лишь для бесспиновых частиц. Следовательно, /2.1/ должно быть модифицировано или обобщено, с тем чтобы на его основе можно было получить уравнения движения для частиц со спином.

Ограниченность соотношения /2.1/ состоит в том, что оно не учитывает структуру оператора момента импульса. Последнее, как известно, тесно связано со свойством изотропности пространства. Согласно [3,4] определение ковариантной зависимости оператора энергии от операторов импульса равносильно определению оператора Гамильтона для частицы со спином 1. Эта зависимость выражается в виде системы

$$\vec{r}2mH = -[\vec{M}\times\vec{p}] + s\vec{p},\qquad \vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}],\quad s = (\vec{r}\vec{p}). \qquad /2.2/$$

Определяя радиус-вектор $\vec{r}$ через базисные векторы пространства $\vec{e}_k$ (k = 1, 2, 3),

$$\vec{r} = r_k\vec{e}_k,\quad (\vec{e}_n\vec{e}_i) = \delta_{ni},\quad [\vec{e}_k\times\vec{e}_\ell] = \epsilon_{k\ell i}\vec{e}_i \qquad /2.3/$$

и приравнивая выражения при r_k, получим оператор Гамильтона для частицы со спином 1:

$$2mH = p^2 + (\vec{r}[\vec{p} \times \vec{p}]), \quad /2.4/$$

где

$$r_k^{in} = (\vec{e}_k[\vec{e}^i \times \vec{e}^n]). \quad /2.5/$$

В формулах /2.2/-/2.5/ выражена жесткая, или прямая, связь между спином 1 и базисными векторами 3-мерного пространства. Однако согласно точке зрения, изложенной во введении, если такая связь и существует, то она должна иметь место только применительно к фундаментальному спину. Поскольку фундаментальным является спин 1/2, необходимо преобразовать /2.2/ к виду, который был бы справедлив для оператора Гамильтона частицы со спином 1/2. С этой целью, пользуясь соотношением

$$-(\vec{A}\vec{r})(\vec{B}\vec{r}) = (\vec{A}\vec{B}) + (\vec{r}[\vec{A} \times \vec{B}]), \quad /2.6/$$

запишем /2.2/ в базисе r-матриц:

$$(\vec{r}\vec{r})2mH = (S + \vec{M}\vec{r})(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{r}\vec{r})(\vec{p}\vec{r})(\vec{p}\vec{r}), \quad /2.7/$$

что совпадает с /2.2/ при условии

$$(\vec{M}\vec{p}) = (\vec{r}[\vec{p} \times \vec{p}]) = 0. \quad /2.8/$$

Из /2.7/ следует оператор энергии уравнения Паули для частицы со спином 1/2

$$2mH = -(\vec{p}\vec{r})(\vec{p}\vec{r}). \quad /2.9/$$

Но условие /2.8/ выполнимо только в отсутствие взаимодействия. Если в /2.7/ включить электромагнитное взаимодействие по правилу

$$\vec{P} \to \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad /2.10/$$

то, в силу

$$[\vec{P} \times \vec{P}] = -i\hbar\frac{e}{c}\vec{\mathcal{H}}, \quad /2.11/$$

где $\vec{\mathcal{H}}$ - напряженность магнитного поля, получим

$$(\vec{M}\vec{P}) = -i\hbar\frac{e}{c}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) = 0. \quad /2.12/$$

В силу произвола, существующего в выборе начала системы координат, радиус-вектор произволен. Поэтому условие /2.12/ в общем случае не выполняется. Ясно, что появление нефизического условия /2.12/ обусловлено выбором неполного базиса $(\vec{r}\vec{r})$. Условие /2.12/ исчезает, как только мы переходим в 4-мерное пространство, и в системе /2.7/ будем использовать 4-мерный радиус-вектор $\hat{r} = r_4 I + (\vec{r}\vec{r})$.

В систему /2.2/ ковариантным образом входит оператор $\vec{M}$ - бесконечномерный аналог спина 1. Следовательно, для получения аналогичной системы для спина 1/2 следует применять оператор $\vec{\mathfrak{M}}$. В свою очередь, это означает, что 4-мерное пространство, на котором действует группа преобразования 0/4/, должно быть евклидовым.

Обобщая /2.2/ на 4-мерный случай с применением оператора $\vec{\mathfrak{M}}_+$, получим следующую систему:

$$r_4 2mH = (\vec{\mathfrak{M}}_+\vec{p}) + s p_4,$$
$$\vec{r}\,2mH = -[\vec{\mathfrak{M}}_+ \times \vec{p}] + s\vec{p} - \vec{\mathfrak{M}}_+ p_4, \quad /2.13/$$

где $s = (\vec{r}\vec{p}) + r_4 p_4$.

Определяя 4-мерный радиус-вектор $(r_4, \vec{r})$ через базисные векторы пространства $\vec{e}_\mu$, $e_{4\mu}$ $(\mu = 1, ..., 4)$,

$$\vec{e}_\nu\vec{e}_\mu + e_{4\nu}e_{4\mu} = \delta_{\nu\mu}, \quad (r_4, \vec{r}) = (e_{4\mu}, \vec{e}_\mu)\, x_\mu \quad /2.14/$$

и приравнивая выражения при независимых координатах x_μ, получим /4/

$$2mH(+) = (p_4 + \vec{r}\vec{p})(p_4 - \vec{r}\vec{p}), \quad /2.15/$$

где матрицы r_k /k = 1,2,3/ определяются следующим образом через базисные единицы 4-мерного пространства:

$$\vec{r}_{\pm\alpha,\beta} = [\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta] \pm (e_{4\alpha}\vec{e}_\beta - e_{4\beta}\vec{e}_\alpha). \quad /2.16/$$

Применяя оператор $\vec{\mathfrak{M}}_-$ аналогичным способом, имеем

$$2mH(-) = (p_4 - \vec{r}\vec{p})(p_4 + \vec{r}\vec{p}). \quad /2.17/$$

§3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧЕТВЕРТОЙ КООРДИНАТЫ И ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

Операторы Гамильтона /2.15/, /2.17/ записаны в 4-мерном пространстве, однако реальное пространство трехмерно, поэтому необходимо найти интерпретацию четвертой координаты и привести в соответствие 4-мерную формулировку теории с традиционной 3-мерной теорией.

Как было отмечено выше, ограниченность 3-мерной формулировки в нерелятивистской теории спина 1/2 в присутствии взаимодействия приводит к появлению нефизического условия типа $(\vec{r}\,\vec{H}) = 0$. Для устранения этого противоречия достаточно ввести четвертую координату, причем введение четвертой компоненты импульса обусловлено только соображениями сохранения четной размерности фазового пространства. Далее, группа 0/4/ является группой движений на 3-мерной гиперсфере. Таким образом, из двух возможных способов перехода в 3-мерное пространство, координатное или импульсное, мы должны выбрать первый. В этом случае интерпретация четвертой координаты равносильна преобразованиям поворота в плоскостях (ξ_4, ξ_k), /k = 1,2,3/. В рамках выбранного нами способа перехода единственным кандидатом на идентификацию такого преобразования является трансляция. Однако генератор преобразования трансляции - оператор импульса не коммутирует с условием перехода на 3-мерную сферу

$$R^2 = \xi_4^2 + \xi_k^2, \qquad /3.1/$$

поэтому он должен быть обобщен до генератора поворота в плоскостях (ξ_4, ξ_k). Ограничиваясь преобразованием в плоскости (ξ_4, ξ_k), запишем

$$\xi'_x = \cos\theta\,\xi_x - \sin\theta\,\xi_4, \quad \xi_4 = \cos\theta\,\xi_4 + \sin\theta\,\xi_x, \quad \xi'_y = \xi_y, \quad \xi'_z = \xi_z. \qquad /3.2/$$

В плоском случае формулы преобразования должны перейти в трансляцию

$$x' = x - A, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad /3.3/$$

Поэтому

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2/R^2}}, \quad \sin\theta = \frac{A/R}{\sqrt{1 + A^2/R^2}}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}(A/R). \qquad /3.4/$$

Теперь покажем, что интерпретация ξ_4 через параметр масштаба ℓ, а именно

$$\xi_4 = R\ell, \qquad /3.5/$$

позволяет преобразовать /3.2/ в формулы трансляции на 3-мерной сфере радиуса R /7/. Выделим явную зависимость координат от параметра масштаба, записав их в виде

$$\xi_k = \ell r_k. \qquad /3.6/$$

Подставляя /3.4/, /3.5/, /3.6/ в /3.2/, получим

$$x' = (x - A)/\beta, \quad y' = y\alpha/\beta, \quad z' = z\alpha/\beta, \quad \ell' = \ell\beta/\alpha,$$
$$\alpha = \sqrt{1 + A^2/R^2}, \quad \beta = (1 + Ax/R^2). \qquad /3.7/$$

Как следует из /3.7/, закон преобразования масштаба имеет тот же вид, что и преобразование выражения

$$\mathfrak{L} = 1/\sqrt{1 + r^2/R^2}, \qquad /3.8/$$

а выражения

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{1 + r^2/R^2}}, \quad \eta_4 = R/\sqrt{1 + r^2/R^2}$$

преобразуются как $\vec{\xi}$ и ξ_4. Следовательно, мы можем положить $\ell = \mathfrak{L}$, $\vec{\xi} = \vec{\eta}$, $\xi_4 = \eta_4$, причем $\vec{\xi}^2 + \xi_4^2 = R^2$, т.е. /3.7/ есть формулы преобразования трансляции на 3-мерной сфере.

В формулах /3.7/ принцип соответствия выражен в явном виде: при $R \to \infty$ они переходят в обычные формулы трансляции 3-мерного пространства /3.3/. Формулы /3.8/ задают правило редукции из 4-мерного пространства в 3-мерную сферу радиуса R. Пользуясь /3.8/, 4-мерные векторы - операторы импульса $\pi_\mu = -i\hbar\partial/\partial\xi_\mu$ и операторы $\mathfrak{M}_k$ можно выразить через 3-мерные величины. Получим

$$\xi_\mu \pi_\mu = 0, \quad \pi_4 = -(\vec{r}\,\vec{p})/R, \quad \pi_k = \sqrt{1 + r^2/R^2}\; p_k,$$
$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{N} = R\vec{p} + \vec{r}(\vec{r}\,\vec{p})/R. \qquad /3.9/$$

При этом только оператор $\vec{\mathfrak{M}}_\pm$ не теряет коммутационные свойства своих компонент. По-прежнему

$$[\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{\mathfrak{M}}] = i\hbar 2\vec{\mathfrak{M}}. \qquad /3.10/$$

Коммутаторы операторов π_4, π_k имеют вид

$$[\pi_k, \pi_i] = 2M_{ki}, \quad [\pi_4, \pi_k] = 2N_k. \qquad /3.11/$$

Переход на 3-мерную сферу $\xi_4^2 + \xi_k^2 = R^2$ позволяет выразить операторы Гамильтона /2.15/, /2.16/ в терминах операторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\mathfrak{M}}_\pm$. Перепишем /2.15/, применяя соотношение $R^2 = (\xi_4 + \vec{\tau}\vec{\xi})(\xi_4 - \vec{\tau}\vec{\xi})$. Получим

$$2mH(+) = (\pi_4 - \vec{\tau}\vec{\pi})(\xi_4 + \vec{\tau}\vec{\xi})(\xi_4 - \vec{\tau}\vec{\xi})(\pi_4 + \vec{\tau}\vec{\pi})/R^2 =$$
$$= (s_2 - \vec{\tau}\vec{\mathfrak{M}}_+)(s_1 + \vec{\tau}\vec{\mathfrak{M}}_+), \quad s_1 = \xi_\mu \pi_\mu, \quad s_2 = \pi_\mu \xi_\mu,$$

на сфере $s_1 = 0$, $s_2 = -4i\hbar$. Следовательно,

$$2mH(+) = -(4i\hbar + \vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_+)(\vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_+)/R^2. \qquad /3.12/$$

Аналогично, преобразуя /2.17/, применяя $R = (\xi - \vec{r}\vec{\xi})(\xi + \vec{r}\vec{\xi})$, получим

$$2mH(-) = (s_2 - \vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_-)(s_1 + \vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_-)/R^2 = -(4i\hbar + \vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_-)(\vec{r}\vec{\mathfrak{M}}_-)/R^2. \qquad /3.13/$$

Из формул /3.9/ следует, что при $R \to \infty$ $\vec{\mathfrak{M}}/R \to \vec{p}$, поэтому операторы Гамильтона /3.12/, /3.13/ в предельном случае переходят в оператор энергии для уравнения Паули $\lim\limits_{R\to\infty} H(\pm) = -(\vec{p}\vec{r})(\vec{p}\vec{r})/2m$.

§4. СВОЙСТВА КОВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО 3-МЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ И ТРАНСЛЯЦИИ. ИНВЕРСИЯ И ДВА ТИПА ЭЛЕКТРОНА

Операторы Гамильтона /3.12/, /3.13/ можно записать в виде

$$H = \frac{2}{mR^2}\left\{\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)^2 + 2\left(S\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)\right\}, \qquad /4.1/$$

где $\vec{S} = -i\hbar\vec{r}/2$ - оператор спина 1/2. Из /4.1/ следует, что сохраняется полный момент:

$$\vec{J} = \frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2} + \vec{S}. \qquad /4.2/$$

Кроме того, сохраняются по отдельности операторы

$$\vec{J}_M = \vec{M} + \vec{S} \qquad /4.3/$$

- генератор 3-мерных вращений и

$$\vec{J}_N = \vec{N} + \vec{S} \qquad /4.4/$$

- генератор трансляции на 3-мерной сфере. Введем соответственно унитарные операторы преобразования вращения на угол ϕ относительно единичного вектора $\vec{n}$

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\phi(\vec{n}\vec{J}_M)\right) \qquad /4.5/$$

и оператор преобразования трансляции на $A = R\,\mathrm{tg}\,\theta$ в направлении единичного вектора $\vec{m}$

$$\hat{W} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta(\vec{m}\vec{J}_N)\right). \qquad /4.6/$$

В силу коммутационных соотношений $[H, J_M] = 0$, $[H, J_N] = 0$, имеем $H' = UHU^{-1} = H$, $H'' = WHW^{-1} = H$, т.е. оператор Гамильтона инвариантен относительно преобразования вращения и трансляции, а волновая функция будет преобразовываться по представлениям $\Psi' = U\Psi$ - при вращении и $\Psi'' = W\Psi$ - при трансляции.

Отметим, что как при повороте на угол ϕ относительно оси $\vec{n}$, так и при трансляции на расстояние $A = R\,\mathrm{tg}\,\phi$ по оси $\vec{n}$ операторы $\mathfrak{M}$ и $\vec{r}$ подвергаются изменению одинаковым образом.

В отличие от теории Паули в настоящей теории мы имеем два оператора Гамильтона $H(+)$ и $H(-)$, которые переходят друг в друга при операции инверсии. Аналогичное положение имеет место в релятивистской теории частиц со спином 1/2 в формализме двухкомпонентных спиноров [13], которые переходят друг в друга при инверсии. Соответственно вводится понятие "левых" и "правых" электронов. Настоящая теория позволяет ввести "левые" и "правые" электроны уже на нерелятивистском уровне. Более того, в силу выражения /6.7/, понятие "левого" и "правого" сохраняется и в системе покоя, а следовательно, перестает быть условным. Ясно, что на этом этапе нет нарушения четности, поскольку теория линейна и число левых и правых электронов в точности совпадает.

§5. ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Структура уравнения Паули характерна тем, что введение потенциалов внешнего поля калибровочно-инвариантным способом

$$\vec{P} \to \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} \qquad /5.1/$$

приводит к появлению в уравнении члена, содержащего напряженность магнитного поля:

$$2mH = -(\vec{P}\vec{r})(\vec{P}\vec{r}) \Rightarrow \vec{P}^2 + ([\vec{P}\times\vec{P}]\vec{r}) \Rightarrow (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 - i\hbar\frac{e}{c}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}), \qquad /5.2/$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{ic}{e\hbar}\left[(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}) \times (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})\right]. \qquad /5.3/$$

Поскольку в пределе при $R \to \infty$ оператор $\vec{\mathfrak{M}}_\pm/R$ переходит в $\vec{p}$, то внешнее поле в уравнениях /3.12/, /3.13/ будет вводиться по правилу

$$\vec{\mathfrak{M}}_\pm \to \vec{\mathfrak{M}}_\pm + \frac{e}{c}\vec{B}_\pm, \qquad /5.4/$$

где

$$\vec{B}_\pm = [\vec{r}\times\vec{A}] \pm (R\vec{A} + \vec{r}(\vec{r}\vec{A})/R). \qquad /5.5/$$

Вектор $B_\pm/R$ является аналогом потенциала магнитного поля на сфере. Тогда калибровочно-инвариантное выражение для напряженности будет иметь вид

$$\vec{G}_{\pm} = \left(\frac{i}{\hbar}[\vec{\mathfrak{M}}_{\pm} \times \vec{B}] + 2\vec{B}_{\pm}\right)/R^2. \qquad /5.6/$$

При замене /5.4/ в уравнениях /3.12/, /3.13/ появляется член

$$\Delta H_{\pm} = -\frac{ie\hbar}{2mc}(\vec{r}_{\pm}\vec{G}_{\pm}) = \frac{e}{mc}(\vec{S}_{\pm}\vec{G}), \qquad /5.7/$$

который интерпретируется как энергия взаимодействия спинового магнитного момента с магнитным полем на сфере. Здесь аналогом /5.3/ является выражение

$$\vec{G}_{\pm} = \frac{ic}{e\hbar R^2}\{[(\vec{\mathfrak{M}}_{\pm} + \frac{e}{c}\vec{B}_{\pm}) \times (\vec{\mathfrak{M}}_{\pm} + \frac{e}{c}\vec{B}_{\pm})] - (\vec{\mathfrak{M}}_{\pm} + \frac{e}{c}\vec{B}_{\pm})\}. \qquad /5.8/$$

Напряженность /5.6/ инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\vec{B}'_{\pm} = \vec{B}_{\pm} + \frac{i}{\hbar}\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}\phi. \qquad /5.9/$$

Формулу для напряженности $\vec{G}_{\pm}$ можно написать, используя обычное выражение напряженности. Подставив /3.9/ и /5.5/ в /5.6/, получим

$$\vec{G}_{\pm} = \left(\vec{\mathcal{H}} \pm \frac{[\vec{r} \times \vec{\mathcal{H}}]}{R}\right)\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad /5.10/$$

Таким образом, сравнительно простым способом удалось получить правило, по которому внешнее магнитное поле включается в уравнения движения /3.12/, /3.13/. Однако в рамках нерелятивистского подхода невозможно сделать то же самое для внешнего электрического поля.

Отметим, что впервые релятивистское уравнение для электрона - уравнение Дирака в сферическом мире де Ситтера - было рассмотрено самим Дираком [8]. Далее, вторичное квантование этого уравнение исследовалось в работах [9]. В [10] были решены вопросы квантования электромагнитного поля в сферическом мире де Ситтера. В отличие от результатов указанных работ в настоящей статье к формулировке теории частиц со спином 1/2 на 3-мерной сфере мы приходим в результате развития свойств и особенностей спинового оператора. Таким образом, 3-мерная сфера реализуется только в рамках нерелятивистского подхода. Если же аналогичным образом попытаться обобщить релятивистскую теорию спина 1/2, то, как показано в [11], эта задача оказывается разрешимой только в пространстве 8 измерений.

§6. КВАНТОВАННОСТЬ ЭНЕРГИИ НЕСВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ. ЭНЕРГИЯ СПИНА

Рассмотрим собственные значения и собственные функции оператора Гамильтона

$$H = \frac{2}{mR^2}\left\{\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)^2 + 2\left(\vec{S}\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)\right\}. \qquad /6.1/$$

Оператор $\vec{\mathfrak{M}}^2$ совпадает с выражением для угловой части 4-мерного оператора Лапласа. Поэтому

$$\vec{\mathfrak{M}}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+2)Y_{\ell m}, \quad \mathfrak{M}_z Y_{\ell m} = mY_{\ell m}, \qquad /6.2/$$

где $Y_{\ell m}$ - гиперсферическая гармоника, $\ell = 0,1,2,3,\ldots$, $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$. Гиперсферические гармоники $Y_{\ell m}$ образуют канонический базис Гельфанда-Цетлина для неприводимого $D^{\ell(4)}$-представления класса 1 0/4/ - группы [12]. Поделив первое уравнение /6.2/ на 4, второе - на 2, получим

$$\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}}{2}\right)^2 Y_{LM} = L(L+1)Y_{LM}, \quad \frac{\vec{\mathfrak{M}}_z}{2}Y_{LM} = MY_{LM}, \qquad /6.3/$$

где $L = \ell/2$, $M = m/2$.

Построим тензорную сферическую гармонику по известному способу:

$$\mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\theta, \phi, \Psi) = \sum_{m,\sigma} C^{JM}_{LmS\sigma} Y_{Lm}(\theta, \phi, \Psi) X_{S\sigma}. \qquad /6.4/$$

Будем искать собственные значения /6.1/ в базисе функции /6.4/. Поскольку

$$\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2} + \vec{S}\right)^2 \mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM} = J(J+1)\mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM}, \quad S^2\mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM} = \frac{3}{4}\mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM}, \qquad /6.5/$$

то

$$\left\{\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)^2 + 2\left(\vec{S}\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}\right)\right\}\mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM} = \left(J(J+1) - \frac{3}{4}\right)\mathcal{Y}^{L\,1/2}_{JM}, \quad J = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots \qquad /6.6/$$

Из /6.5/, /6.6/ следует, что при $J = 0$, $H < 0$, т.е. энергия свободного состояния отрицательна. Для того чтобы получить $H \geq 0$ при всех J, к /6.1/ необходимо добавить оператор

$$\Delta H = \frac{2}{mR^2}\vec{S}^2, \qquad /6.7/$$

который естественно интерпретировать как энергию спина. Действительно, спин есть квантово-механическое понятие собственного углового момента частицы, поэтому ему должна соответствовать некоторая энергия "вращения". Традиционные теории спина 1/2 не могли, однако, содержать оператор энергии спина, так как для точечной частицы невозможно было определить момент инерции. При построении настоящей теории мы исходили из жесткой связи фундаментального спина с пространством, поэтому неудивительно, что момент инерции определяется фундаментальной константой R.

С учетом /6.7/ оператор Гамильтона частицы со спином 1/2 принимает канонический вид

$$H = \frac{2}{mR^2}\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2} + \vec{S}\right)^2. \qquad /6.8/$$

Итак, спектр энергии свободного состояния представляет счетное множество, а именно

$$H\Psi = \frac{2\hbar^2}{mR^2} J(J+1)\Psi, \quad J = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2, \dots . \qquad /6.9/$$

Расстояние между двумя "уровнями" составляет величину

$$\Delta E = \frac{2\hbar^2}{mR^2}\left(J + \frac{3}{4}\right). \qquad /6.10/$$

Электрон при переходе с одного "уровня" на другой с определенным J излучает /или поглощает/ гамма-квант определенной энергии $\mathcal{E}_{\gamma} = \Delta E$. Таким образом, если дана энергия излучающего электрона, дана минимально возможная частота излучения, то, в принципе, может быть определена фундаментальная константа R.

Автор выражает признательность чл.-корр. АН СССР М.Г.Мещерякову за поддержку и интерес к работе, В.М.Дубовику и А.Б.Пестову за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli W. Z.Phys., 1927, 43, p.601.
2. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc., 1928, vol.A117, p.610.
3. Yamaleev R.M. JINR, E2-81-322, Dubna, 1981.
4. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-82-910, Дубна, 1982; Yamaleev R.M. JINR, E2-84-197, Dubna, 1984.
5. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. "Наука", М., 1979.
6. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", М., 1975.
7. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-80-732, Дубна, 1980.
8. Dirac P.A.M. Ann.Math., 1935, 36, p.3.
9. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1973, 16, с.77; ОИЯИ, Р2-6351, Дубна, 1972.
10. Пестов А.Б. ОИЯИ, Р2-8418, Дубна, 1974; Пестов А.Б., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-11022, Дубна, 1977.
11. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-81-302, Дубна, 1981.
12. Гельфанд И.М., Цетлин М.Я. ДАН СССР, 1950, 71, с.1070.
13. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1984 года.

Ямалеев Р.М. Р4-84-727
Теория движения частицы со спином 1/2
на трехмерной сфере четырехмерного евклидова пространства

Уравнение движения частицы со спином 1/2 на сфере S^3 сформулировано, исходя из тесной связи группы $SU(2)$ с группой движений на трехмерной сфере. Показано, что эта связь принимает явную форму, если спиновые операторы и их бесконечномерные аналоги определены в представлении декартова базиса. Получена система операторных соотношений в четырехмерном евклидовом пространстве для определения оператора Гамильтона частицы со спином 1/2 и дана интерпретация четвертой координаты. Теория принимает каноническую форму, если перейти на сферу S^3, где оператор Гамильтона выражается исключительно в терминах группы $SU(2) \times SU(2)/\pm 1$, реализующих конечно- и бесконечномерные представления. Исследованы трансформационные свойства уравнения относительно преобразований координат и рассмотрен вопрос калибровочно-инвариантного способа введения внешнего электромагнитного поля. Показано, что теория приводит к понятию энергии спина и квантованности энергии несвязанного состояния.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Yamaleev R.M. P4-84-727
Theory of Spin 1/2 Particle Motion
on a Three-Dimensional Sphere in Euclidean Four-Dimensional Space

Equation of motion for particles with spin 1/2 on S^3 sphere are formulated basing on the intimate connection of SU(2) group with the group of movement on three-dimensional sphere. It is shown that this connection becomes obvious if spin operators and their infinite-dimensional analogues are defined in the representation of Cartesian basis. A system of operator ratios in 4-dimensional Euclidean space for defining Hamiltonian operator for a particle with spin 1/2 is obtained, and interpretation of the fourth coordinate is given. The theory becomes canonical, when passing to sphere S^3, where Hamiltonian operator is expressed exceptionally in terms of $SU(2) \times SU(2)/\pm 1$ group realizing finite- and infinite-dimensional representation. Transformational properties of the equation with regard to coordinate transformations, and the problem of gauge invariant method of introducing the external electromagnetic field are investigated. It is shown that the theory leads to the conception of spin energy and unbound state energy quantization.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984