28/IV-84

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

2024/84

Р4-84-41

В.И.Иноземцев

О РАСШИРЕНИИ КЛАССА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

1984

Интегрируемые классические динамические системы с N степенями свободы /N произвольно/ и гамильтонианом $H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,\ldots,q_N)$, приводящим к нелинейным уравнениям движения, известны уже в течение десятилетия [1-3].

Доказательство их полной интегрируемости получено методом изоспектральной деформации, впервые примененным к системам этого типа в [1] для случая взаимодействия N частиц на прямой между ближайшими соседями /цепочки Тода/. В рамках этого метода, позволяющего получить набор N независимых интегралов движения, была установлена полная интегрируемость классических систем с потенциалом

$$U=\sum_{j<k}^{N} V(q_j-q_k), \qquad /1/$$

где

$$V(\xi)=\{\frac{g^2}{\xi^2},\ \frac{g^2}{\mathrm{sh}^2(a\xi)},\ g^2\wp(a\xi)\} \qquad /2/$$

или $V(\xi)=g^2/\xi^2+a^2\xi^2$, $\wp$ - эллиптическая функция Вейерштрасса /отметим, что интегрируемость некоторых из квантовомеханических систем этого типа была известна ранее [4]/.

В работе Ольшанецкого и Переломова [3] была впервые установлена связь между интегрируемыми классическими системами с гамильтонианом H и полупростыми алгебрами Ли. В частности, оказалось, что структура потенциала /1/ определяется системой корней классической алгебры A_{N-1}; матрицы (L,M), образующие пару Лакса, могут быть построены по матричному неприводимому представлению этой алгебры.

Для более сложных систем корней (B_N, C_N, D_N, BC_N) структура потенциала $U(q_1,\ldots,q_N)$, найденная в [3], имеет вид

$$U(q_1,\ldots,q_N)=\sum_{\{\vec{a}\}\in R_+} g_a^2 V(\vec{q}\vec{a})=$$
$$=g^2\sum_{j<k}^{N}[V(q_j+q_k)+V(q_j-q_k)]+g_1^2\sum_{j=1}^{N}V(q_j)+g_2^2\sum_{j=1}^{N}V(2q_j), \qquad /3/$$

где $\{\vec{a}\}$ - корни одной из классических систем /векторы в N-мерном пространстве/; $\vec{q}=\{q_1,\ldots,q_N\}$; R_+ - множество корней, положи-

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

тельных относительно базиса $\{\vec{\epsilon}_j\}$, $(\vec{\epsilon}_j)_k = \delta_{jk}$, $j,k = 1,\ldots,N$. Постоянные $g_{\vec{\alpha}}$ одинаковы для корней, образующих пространство неприводимого представления группы Вейля, соответствующей данной системе корней.

При $g_1 = g_2 = 0$ система корней, определяющая /3/, имеет тип D_N; при $g_1 \neq 0$, $g_2 = 0$ - B_N, при $g_1 = 0$, $g_2 \neq 0$ - C_N, наконец, при $g_1; g_2 \neq 0$ потенциал /3/ соответствует системе BC_N.

В /3/ построены также анзацы для матриц Лакса (L, M). Соотношение Лакса, позволяющее получить дополнительные интегралы движения $I_k = 1/2k\,\mathrm{Tr}(L^{2k})$,

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \qquad /4/$$

имеет место, если элементы этих матриц удовлетворяют некоторым функциональным уравнениям. Гамильтониан H с потенциалом типа /3/ также принадлежит множеству $\{I_k\}$ $(H \equiv I_1/2)$. Оказалось /3/, что добиться выполнения /4/ можно лишь при ограничениях на постоянные g, g_1, g_2 и функцию $V(\xi)$:

$$g_1 = 0,\ g_2 \text{ произвольно либо } g_1^2 + \sqrt{2}gg_2 - 2g^2 = 0. \qquad /5/$$

$V(\xi)$- одна из функций, перечисленных в /2/.

Целью настоящей работы является обобщение результатов /3/, установление полной интегрируемости динамических систем с потенциалом

$$U(q_1,\ldots,q_N) = \sum_{\{\vec{\alpha}\}\in R_+} V_{\vec{\alpha}}(\vec{q}\vec{\alpha}), \qquad /6/$$

где $V_{\vec{\alpha}}$ могут быть различными для подсистем корней, инвариантных относительно преобразований группы Вейля.

Для всех трех типов систем корней, имеющих несколько таких инвариантных подсистем (B_N, C_N, BC_N), выражение /6/ может быть приведено к виду

$$U(q_1,\ldots,q_N) = g^2 \sum_{j<k}^{N} [V(q_j + q_k) + V(q_j - q_k)] + \sum_{j=1}^{N} W(q_j), \qquad /7/$$

то есть структура потенциала может определяться двумя /вообще говоря, различными/ функциями $V(\xi)$, $W(\xi)$. Большее, чем в /3/, число подлежащих определению функций могут содержать и анзацы для матриц L и M /в отличие от потенциала /7/ они имеют разную структуру для систем B_N, C_N и BC_N/. Так, наиболее общий анзац типа B_N имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \ell & \lambda & \psi \\ \lambda^+ & 0 & -\lambda^+ \\ \psi^+ & -\lambda & -\ell \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & \omega & s \\ -\omega^+ & \mu & -\omega^+ \\ -s^+ & \omega & m \end{pmatrix}. \qquad /8/$$

где ℓ, ψ, m, s - матрицы размером $N \times N$, λ, ω - матрицы $1 \times N$, /столбцы/:

$$\ell_{jk} = p_j \delta_{jk} + i(1-\delta_{jk})gx(q_j - q_k),$$

$$\psi_{jk} = i(1-\delta_{jk})gx(q_j + q_k), \quad \lambda_j = i\lambda(q_j),$$

$$m_{jk} = i\delta_{jk} \sum_{\ell \neq k} (T(q_k - q_\ell) + T(q_k + q_\ell)) + i(1-\delta_{jk})x'(q_j - q_k) + ir(q_j)\delta_{jk}, \qquad /9/$$

$$s_{ik} = i(1-\delta_{jk})gx'(q_j + q_k),$$

$$\omega_j = i\lambda'(q_j), \quad \mu = \sum_{j=1}^{N} \kappa(q_j), \quad j,k = 1,\ldots,N,$$

причем

$$H = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}L^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + g^2 \sum_{j<k}^{N} [x^2(q_j - q_k) + x^2(q_j + q_k)] + \sum_{j=1}^{N} \lambda^2(q_j).$$

Подстановка /8/ в /4/ приводит к функциональным уравнениям, связывающим x, λ, T, r, κ. Можно показать, что их решение не приводит к каким-либо новым потенциалам типа /7/, отличным от /3/ при $g_1^2 = 2g^2$, $g_2 = 0$.

Ситуация оказывается совершенно иной в случае наиболее общего анзаца типа C_N:

$$L = \begin{pmatrix} \ell & \psi \\ \psi^+ & -\ell \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & s \\ -s^+ & m \end{pmatrix}, \qquad /10/$$

где, как и в /9/, ℓ, ψ, m, s - матрицы размером $N \times N$,

$$\ell_{jk} = p_j\delta_{jk} + i(1-\delta_{jk})gx(q_j - q_k),$$

$$m_{jk} = i\delta_{jk}[r(q_j) + \sum_{\ell \neq j} T(q_\ell - q_j) + T(q_\ell + q_j)] + i(1-\delta_{jk})gx'(q_j - q_k). \qquad /11/$$

Матрицы ψ, s могут иметь отличные от нуля /необязательно вещественные/ диагональные компоненты:

$$\psi_{jk} = i\ell^{i\phi}[(1-\delta_{jk})gx(q_j + q_k) + \delta_{jk}(\nu(q_j) + i\rho(q_j))],$$

$$s_{jk} = i\ell^{i\phi}[(1-\delta_{jk})gx'(q_j+q_k)+\frac{1}{2}\delta_{jk}(\nu'(q_j)+i\rho'(q_j)] , \qquad /12/$$

ϕ - произвольное вещественное число. При этом

$$H = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}L^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2} + g^2\sum_{j<k}^{N}[x^2(q_j+q_k)+x^2(q_j-q_k)] + \sum_{j=1}^{N}(\nu^2(q_j)+\rho^2(q_j))/2 . \qquad /13/$$

Функции $x(\xi)$, $T(\xi)$должны удовлетворять такому же функциональному уравнению, которое в случае системы A_{N-1} приводит к потенциалам /2/. В качестве его решений можно выбрать [2]

$$x(\xi) = 1/\xi , \quad x(\xi) = \frac{1}{\mathrm{sh}(a\xi)} , \qquad /14а/$$

$$x(\xi) = \frac{1}{\mathrm{sn}(a\xi)} . \qquad /14б/$$

Выполнение условия $dL/dt = [L,M]$ приводит согласно /10-12/ к системе линейных функциональных уравнений для r, ν, ρ:

$$2x(\xi+\eta)(r(\xi)-r(\eta)) = x(\xi-\eta)(\nu'(\xi)+\nu'(\eta)) + 2x'(\xi-\eta)(\nu(\xi)-\nu(\eta)) , \qquad /15а/$$

$$2x(\xi-\eta)(r(\xi)-r(\eta)) = x(\xi+\eta)(\nu'(\xi)+\nu'(\eta)) + 2x'(\xi+\eta)(\nu(\xi)+\nu(\eta)) , \qquad /15б/$$

$$x(\xi+\eta)(\rho'(\xi)-\rho'(\eta)) + 2x'(\xi+\eta)(\rho(\xi)-\rho(\eta)) = 0 , \qquad /16а/$$

$$x(\xi-\eta)(\rho'(\xi)+\rho'(\eta)) + 2x'(\xi-\eta)(\rho(\xi)-\rho(\eta)) = 0 . \qquad /16б/$$

Прежде чем приступить к поиску их решений, отметим, что /15а/ и /15б/ эквивалентны, если ν - нечетная, а r - четная функция. Аналогично для четной функции $\rho(\xi)$ эквивалентны уравнения/16а/-/16б/. Следует также заметить, что в /15/, /16/ функция x известна и может принимать значения, перечисленные в /14/.

Умножая обе части /15а/, /15б/ на $x(\xi+\eta)$, $x(\xi-\eta)$ соответственно и вычитая найденные соотношения, найдем зависимость между $r(\xi)$ и $\nu(\xi)$,пользуясь известными теоремами сложения для эллиптических функций Якоби:

$$r(\xi) = \nu(\xi)\times\{\frac{1}{2\xi}, \frac{a}{\mathrm{sh}(2a\xi)}, \frac{a}{\mathrm{sn}(2a\xi)}\} , \qquad /17/$$

при $x(\xi) = \{\frac{1}{\xi}, \frac{1}{\mathrm{sh}(a\xi)}, \frac{1}{\mathrm{sn}(a\xi)}\}$ соответственно.

Подставив /17/ в /15а/, получим функциональное уравнение для $\nu(\xi)$:

$$[\nu'(\xi) - 2\nu(\xi)F(\xi,\eta)] + [\nu'(\eta) - 2\nu(\eta)F(\eta,\xi)] = 0 , \qquad /18/$$

где

$$F(\xi,\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{\xi-\eta} - \frac{1}{2\xi} , & /19а/ \\ a[\frac{\mathrm{sh}\,a(\xi+\eta)}{\mathrm{sh}\,a(\xi-\eta)\mathrm{sh}(2a\xi)} + \mathrm{cth}\,a(\xi+n)] & /19б/ \\ a[\frac{\mathrm{sn}\,a(\xi+\eta)}{\mathrm{sn}\,a(\xi-\eta)\mathrm{sn}(2a\xi)} + \frac{\mathrm{cn}\,a(\xi+\eta)\mathrm{dn}\,a(\xi+\eta)}{\mathrm{sn}\,a(\xi+\eta)} & /19в/ \end{cases}$$

для рациональной, тригонометрической и эллиптической функций $x(\xi)$ соответственно. Построение всех аналитических решений /18/ в наиболее общем случае /19в/ приведено в приложении; укажем здесь результаты для $\nu(\xi)$:

$$\nu(\xi) = \begin{cases} (\alpha+\beta\xi^2+\gamma\xi^4)\xi^{-1}, \\ (\alpha+\beta\,\mathrm{sh}^2a\xi+\gamma\,\mathrm{sh}^4a\xi)(\mathrm{sh}2a\xi)^{-1}, \\ (\alpha+\beta\,\mathrm{sn}^2a\xi+\gamma\,\mathrm{sn}^4a\xi)(\mathrm{sn}(a\xi)\cdot\mathrm{cn}(a\xi)\cdot\mathrm{dn}(a\xi))^{-1} \end{cases} \qquad /20/$$

для случаев /19а,б,в/ соответственно; α , β , γ - произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению /16а/-/16б/. Уравнение /16б/ было решено в работе автора [7]. Оказалось, что нетривиальные решения существуют лишь в случае /14а/:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \tilde\alpha+\tilde\beta\xi+\tilde\gamma\xi^2 , & x = 1/\xi , \\ \tilde\alpha+\tilde\beta\,\mathrm{sh}(2a\xi)+\tilde\gamma\,\mathrm{ch}(2a\xi) , & x = \frac{1}{\mathrm{sh}(a\xi)} , \end{cases} \qquad /21/$$

$\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ произвольны. Единственным решением /16б/ при $x = 1/\mathrm{sn}(a\xi)$ является $\rho = \mathrm{const}$, которое не приводит к каким-либо изменениям в виде потенциала U.

Подставляя /21/ в /16а/, легко убедиться, что общим решением системы /16а/-/16б/ являются лишь четные функции /21/, то есть следует положить $\beta = 0$.

Таким образом, сравнивая /13/ с /20/, /21/, найдем, что $[L,M]$ -парой и, следовательно, дополнительными интегралами движения обладают гамильтоновы системы вида

$$H = \sum_{j=1}^{N}(\frac{p_j^2}{2} + W(q_j)) + g^2\sum_{j<k}^{N}[V(q_j+q_k)+V(q_j-q_k)] ,$$

где

$$/А/\ V(\xi)=\frac{1}{\xi^2},\ W(\xi)=\frac{g_1^2}{\xi^2}+g_2^2\xi^2+g_3^2\xi^4+g_4^2\xi^6,\ /Б/\ V(\xi)=\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a\xi)},$$

$$W(\xi)=\frac{g_1^2}{\mathrm{sh}^2(a\xi)}+\frac{g_2^2}{\mathrm{sh}^2(2a\xi)}+g_3^2\mathrm{ch}(2a\xi)+g_4^2\mathrm{ch}(4a\xi),$$

g_1, g_2, g_3, g_4 совершенно произвольны; /22/

$$/В/\ V(\xi)=\frac{1}{\mathrm{sn}^2(a\xi)}\approx\wp(a\xi),\ W(\xi)=g_2^1\wp(a\xi)+g_2^2\wp\left(a\xi+\frac{\omega_1}{2}\right)+$$

$$+g_3^2\wp\left(a\xi+\frac{\omega_2}{2}\right)+g_4^2\wp\left(a\xi+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),$$

где ω_1, ω_2 - полупериоды функции Вейерштрасса; постоянные g_α, $\alpha=1,\dots 4$ удовлетворяют нелинейному соотношению

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{4} g_\alpha^4-\sum_{\gamma\neq\alpha}^{4} g_\gamma^2 g_\alpha^2\right)^2=64\prod_{\alpha=1}^{4} g_\alpha^2.$$

Инволютивность интегралов движения $I_k=1/2k\,\mathrm{Tr}(L^{2k})$ может быть доказана стандартным способом [6], основанным на переходе от системы $\{I_k\}$ к системе собственных значений эрмитовой матрицы L и прямом вычислении скобки Пуассона с учетом функциональных соотношений /15/-/16/. Таким образом, системы /22/ оказываются полностью интегрируемыми. Различными предельными переходами из /22/ могут быть получены все рассматривавшиеся ранее [2-3,7-8] интегрируемые системы с гамильтонианом $H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,\dots,q_N)$, за исключением цепочек Тода.

Вопросы о построении явного вида решений динамических систем уравнений, определяемых /22/, в настоящее время остаются открытыми. Значительный интерес, на наш взгляд, представило бы также установление связи между системами типа /22/ и динамикой полюсных решений нелинейных эволюционных уравнений, найденной для систем Калоджеро [5].

Автор глубоко благодарен М.А.Ольшанецкому и П.П.Физиеву за полезные обсуждения, А.Б.Говоркову и В.А.Мещерякову за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем общее аналитическое решение уравнения /18/:

$$\nu'(\xi)-2\nu(\xi)F(\xi,\eta)+\nu'(\eta)-2\nu(\eta)F(\eta,\xi)=0, \qquad /П.1/$$

где функция $F(\eta,\xi)$ имеет вид /19в/:

$$F(\xi,\eta)=a\left[\frac{\mathrm{sn}\,a(\xi+\eta)}{\mathrm{sn}\,a(\xi-\eta)\,\mathrm{sn}(2a\xi)}+\frac{\mathrm{cn}\,a(\xi+\eta)\,\mathrm{dn}\,a(\xi+\eta)}{\mathrm{sn}\,a(\xi+\eta)}\right] \qquad /П.2/$$

/решения для $\nu(\xi)$ в случае /19а/-/19б/ могут быть получены из этого решения предельными переходами/.

Положим в /П.2/ для простоты $a=1$ и будем считать $\eta\equiv\epsilon$ малым параметром, рассматривая /П.1/ с точностью до членов нулевого порядка по ϵ:

$$F(\xi,\epsilon)=\frac{1}{\mathrm{sn}2\xi}+\frac{\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi},\qquad F(\epsilon,\xi)=-\frac{1}{2\epsilon}+\epsilon\left[\frac{2(1+k^2)}{3}-\frac{2}{\mathrm{sn}^2\xi}\right],$$

k - параметр эллиптических функций Якоби, $(\mathrm{sn}'\xi)^2=(1-\mathrm{sn}^2\xi)(1-k^2\mathrm{sn}^2\xi)$,

$$\nu'(\xi)-2\nu(\xi)\left[\frac{1}{\mathrm{sn}2\xi}+\frac{\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi}\right]+\nu'(\epsilon)-2\nu(\epsilon)\left[-\frac{1}{2\epsilon}+2\epsilon\left(\frac{1+k^2}{3}-\frac{1}{\mathrm{sn}^2\xi}\right)\right]=0. \qquad /П.3/$$

Из /П.3/ вытекает, что разложение $\nu(\epsilon)$ по степеням ϵ может содержать полюсный член, но не выше первого порядка:

$$\nu(\epsilon)=\frac{\lambda_1}{\epsilon}+\lambda_2\epsilon+\dots \qquad /П.4/$$

Подставляя /П.4/ в /П.3/, находим, что полюсные по ϵ члены в /П.3/ сокращаются и в нулевом порядке по ϵ $\nu(\xi)$ удовлетворяет обычному дифференциальному уравнению:

$$\nu'(\xi)-2\nu(\xi)\left[\frac{1}{\mathrm{sn}2\xi}+\frac{\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi}\right]+\left[2\lambda_2-4\lambda_1\left(\frac{1+k^2}{3}\right)+\frac{4\lambda_1}{\mathrm{sn}^2\xi}\right]=0. \qquad /П.5/$$

Его решение имеет вид

$$\nu(\xi)=(\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi)^{-1}\left[\lambda_1+\left(\lambda_2-\frac{2\lambda_1}{3}(1+k^2)\right)\mathrm{sn}^2\xi+\gamma\,\mathrm{sn}^4\xi\right], \qquad /П.6/$$

где γ - постоянная интегрирования. Разлагая /П.6/ в ряд по степеням ξ, убеждаемся, что асимптотические разложения /П.4/ и /П.6/ совпадают, то есть λ_1, λ_2 являются произвольными постоянными.

Вводя обозначения $\alpha=\lambda_1$, $\beta=\lambda_2-2\lambda_1/3(1+k^2)$, приведем /П.6/ к виду /20/. В результате непосредственной подстановки

/П.6/ в /П.1/ с учетом /П.2/ можно убедиться, что функция /П.6/ удовлетворяет и функциональному уравнению /П.1/, причем дополнительные ограничения на постоянные α, β, γ не возникают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flashka H. Phys.Rev.B, 1974, 9, p. 1924.
2. Calogero F. Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p. 411;
   Moser J. Adv.Math., 1975, 16, p. 197.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Invent.Math., 1976, 37, p. 93; Phys.Reports, 1981, 71, p. 314.
4. Calogero F. J.Math.Phys., 1971, 12, p. 419;
   Sutherland B. Phys.Rev.A, 1971, 4, p. 2019.
5. Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V. Nuovo Cim., 1977, 40B, p. 339;
   Кричевер И.М. Функц. анализ, 1978, 12, в. 1, с. 76.
6. Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1977, 1, p. 531.
7. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-83-418, Р4-83-664, Дубна, 1983.
8. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 195.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1984 года.

Иноземцев В.И. Р4-84-41

О расширении класса интегрируемых динамических систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли

Рассматриваются классические конечномерные динамические системы с гамильтонианом $H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,\dots q_N)$, для которых структура H определяется системой корней симплектической алгебры Ли. Указаны новые случаи полной интегрируемости таких систем для потенциалов, инвариантных относительно преобразований соответствующей группы Вейля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Inozemtsev V.I. P4-84-41

On Extension of the Class of Integrable Dynamical Systems Connected with Semisimple Lie Algebras

Classical N-body dynamical systems with the Hamiltonian $H=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,\dots q_N)$ are considered. The structure of H is determined by the root system of the symplectic Lie algebra. A new cases of complete integrability are found for the potentials which are invariants of corresponding Weyl group.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984