ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4-84-247

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков

РАСШИРЕНИЕ КЛАССА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Направлено в журнал
"Letters in Mathematical Physics"

1984

В течение последнего десятилетия было найдено весьма большое количество [1–6] вполне интегрируемых динамических систем классической механики с гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + U(q_1, \ldots, q_N), \qquad /1/$$

N - произвольное целое число.

Для большинства из них удалось построить решения уравнений движения в явном виде. В значительно меньшем числе случаев была выявлена связь между этими системами и движением полюсов специальных решений нелинейных эволюционных уравнений: КдВ, Буссинеска, Бюргерса-Хопфа [7,8]. /Наиболее полный обзор полученных результатов содержится в [6]/.

Мы установим здесь интегрируемость нового класса гамильтоновых систем вида /1/, связанных с полупростыми алгебрами Ли. Впервые подобная связь была найдена Ольшанецким и Переломовым [3]. Они показали, что каждой из классических систем корней $\{\vec{a}\}$ полупростых алгебр Ли можно сопоставить потенциал

$$U(q_1, \ldots, q_N) = \sum_{\vec{a} \subseteq R_+} g_a^2 U(\vec{q}\vec{a}), \qquad /2/$$

где $\vec{q} = \{q_1, \ldots, q_N\}$, $\vec{a}$ - N-мерные корневые векторы, R_+ - множество корней, положительных при некотором линейном упорядочении в пространстве $\{\vec{a}\}$, g_a - постоянные, которые могут быть различными лишь для корней разной длины. Последнее обеспечивает инвариантность /2/ по отношению к преобразованиям соответствующей группы Вейля.

Интегрируемость систем /1/ с потенциалом /2/ является следствием существования матриц Лакса (L, M), для которых выполняется соотношение

$$dL/dt = [L, M], \qquad /3/$$

эквивалентное уравнениям движения. Структура L и M определяется неприводимым представлением одной из алгебр, обладающих системой корней $\{\vec{a}\}$.

Основной результат работы [3] состоит в следующем: для системы корней типа BC_N, приводящей к потенциалам наиболее общего вида

$$U(q_1, \ldots, q_N) = g^2 \sum_{j>n} (V(q_j - q_n) + V(q_j + q_n)) + \sum_{j=1}^{N} (g_1^2 V(q_j) + g_2^2 V(2q_j)), \qquad /4/$$

матрицы Лакса L и M, удовлетворяющие /1/, существуют, если

$$g_1^2 + \sqrt{2}gg_2 - 2g^2 = 0, \qquad /5/$$

либо $g_1 = 0$, g, g_2 - произвольны и

$$V(\xi) = \{\frac{1}{\xi^2}, \frac{1}{\mathrm{sh}^2(a\xi)}, \wp(a\xi)\}, \qquad /6/$$

$\wp(a\xi)$ - функция Вейерштрасса.

Мы покажем, что полная интегрируемость имеет место для гораздо более широкого, чем /2/, класса потенциалов:

$$U(q_1,\dots,q_N) = \sum_{\vec{\alpha} \in R_+} V_\alpha(\vec{q}\vec{\alpha}), \qquad /7/$$

где функции V_α могут быть различными для корней разной длины. Отметим, что при этом /7/ также является инвариантом относительно преобразований соответствующей группы Вейля.

Для всех типов классических неприводимых систем корней, имеющих подсистемы корней различной длины / B_N, C_N, BC_N /, /7/ может быть представлено в форме

$$U(q_1,\dots,q_N) = \sum_{j>n}^{N} (V(q_j - q_n) + V(q_j + q_n)) + \sum_{j=1}^{N} \omega(q_j). \qquad /8/$$

Для матриц L и M мы используем обобщение предложенного в [3] анзаца:

$$L = \begin{pmatrix} \ell & \lambda & \psi \\ \lambda^+ & 0 & -\lambda^+ \\ \psi^+ & -\lambda & -\ell \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} m & \omega & s \\ -\omega^+ & \mu & -\omega^+ \\ -s^+ & \omega & m \end{pmatrix}, \qquad /9/$$

где ℓ, ψ, m, s - матрицы размером $N\times N$; λ, ω - матрицы $1\times N$, зависящие от динамических переменных (p, q):

$$\ell_{jn} = p_j\,\delta_{jn} + i(1-\delta_{jn})\,gx(q_j - q_n),$$

$$\psi_{jn} = i[\delta_{jn}(\nu(q_j) + i\rho(q_j)) + (1-\delta_{jn})gx(q_j + q_n)],$$

$$s_{jn} = i[\frac{\delta_{jn}}{2}(\nu'(q_j) + i\rho'(q_j)) + (1-\delta_{jn})gx'(q_j + q_n)], \qquad /10/$$

$$m_{jn} = i\,\delta_{jn}[\tau(q_j) - \sum_{n\neq j}(z(q_j - q_n) + z(q_j + q_n))] + i(1-\delta_{jn})gx'(q_j - q_n),$$

$$\lambda_j = i\alpha(q_j), \quad \omega_j = i\alpha'(q_j), \quad \mu = i\sum_{i=1}^{N}\kappa(q_j).$$

Заметим, что L является оператором матричного представления алгебры Ли, соответствующей группе $SU(N+1, N)$.

Из соотношения $H = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}L^2$ следует, что функции $V(\xi)$, $\omega(\xi)$, определяющие потенциал /8/, связаны с $x(\xi)$, $\nu(\xi)$, $\rho(\xi)$, $\alpha(\xi)$:

$$V(\xi) = x^2(\xi), \quad \omega(\xi) = \frac{1}{2}(\nu^2(\xi) + \rho^2(\xi)) + \alpha^2(\xi). \qquad /11/$$

Уравнения Лакса /3/ накладывают жесткие ограничения на функции x, z, ν, ρ, τ, α, κ, входящие в /10/. Во-первых, x и z должны удовлетворять уравнению $x'(\xi)\,x(\eta) - x'(\eta)\,x(\xi) = x(\xi+\eta)\,[z(\xi) - z(\eta)]$, решения которого были найдены в [3]:

$$x(\xi) = \{\frac{g}{\xi}, \frac{g}{\mathrm{sh}(a\xi)}, \frac{g}{\mathrm{sn}(a\xi,k)}\}, \quad z(\xi) = \{-\frac{g}{\xi^2}, -\frac{ag}{\mathrm{sh}^2(a\xi)}, -\frac{ag}{\mathrm{sn}^2(a\xi,k)}\}, \qquad /12/$$

где $\mathrm{sn}(a\xi,k)$ - эллиптическая функция Якоби с модулем k. Для остальных функций из /10/ мы получаем два набора функциональных уравнений, причем в каждом случае некоторые из функций α, κ, ρ тождественно обращаются в нуль:

I. $\alpha(\xi) = \kappa(\xi) = 0$,

$$2x(\xi+\epsilon\eta)(\tau(\xi) - \tau(\eta)) - x(\xi-\epsilon\eta)(\nu'(\xi) + \nu'(\eta)) - 2x'(\xi-\epsilon\eta)(\nu(\xi) - \epsilon\nu(\eta)) = 0, \qquad /13/$$

$$x(\xi+\epsilon\eta)(\rho'(\xi) - \epsilon\rho'(\eta)) + 2x'(\xi+\epsilon\eta)(\rho(\xi) - \rho(\eta)) = 0, \quad \epsilon = \pm 1. \qquad /14/$$

II. $\rho(\xi) = 0$,

$$\begin{aligned} &2x(\xi+\epsilon\eta)(\tau(\xi) - \tau(\eta)) - x'(\xi-\epsilon\eta)(\nu'(\xi) + \nu'(\eta)) - \\ &- 2x'(\xi-\epsilon\eta)(\nu(\xi) - \epsilon\nu(\eta)) = 2(\alpha(\xi)\,\alpha'(\eta) - \epsilon\alpha'(\xi)\,\alpha(\eta)), \end{aligned} \qquad /15/$$

$$\begin{aligned} &[x(\xi-\eta) + x(\xi+\eta)]\,\alpha'(\eta) + [x'(\xi+\eta) - x'(\xi-\eta)]\,\alpha(\eta) + \\ &+ [z(\xi-\eta) + z(\xi+\eta) + \kappa(\eta)]\,\alpha(\xi) = 0, \end{aligned} \qquad /16/$$

$$\alpha'(\xi)\,\nu(\xi) = [\tau(\xi) - \frac{\nu'(\xi)}{2} - \kappa(\xi)]\,\alpha(\xi). \qquad /17/$$

Метод нахождения аналитических решений этих уравнений - разложение их в ряды в окрестности точки $\eta = 0$ с учетом возможных полюсных особенностей искомых функций и решение возникающих при этом обычных дифференциальных уравнений. Мы приведем здесь лишь конечные результаты, полученные этим методом.

I. Из /13/, /12/ следует, что

$$\nu(\xi) = [\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sn}^2(a\xi, k) + \gamma_1 \operatorname{sn}^4(a\xi, k)]\,[\operatorname{sn}(a\xi, k)\operatorname{cn}(a\xi, k)\operatorname{dn}(a\xi, k)]^{-1},$$
$$\tau(\xi) = a\nu(\xi)\,[\operatorname{sn}(2a\xi, k)]^{-1} \qquad /18/$$

при $x = (\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-1}$; α_1, β_1, γ_1 - произвольные постоянные. Для остальных значений x из /12/, являющихся предельными случаями $(\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-1}$, функции $\nu(\xi)$ и $\tau(\xi)$ могут быть получены из /18/ посредством предельного перехода.

Все решения /14/ при $\epsilon = -1$ были найдены в работе [4]. Уравнению /14/ при $\epsilon = 1$ удовлетворяют лишь следующие из них:

$$\rho(\xi) = \alpha_2 + \gamma_2 \xi^2, \quad x(\xi) = \xi^{-1}, \quad \rho(\xi) = \alpha_2 + \gamma_2 \operatorname{ch}(2a\xi), \quad x(\xi) = (\operatorname{sh}(a\xi))^{-1}, \qquad /19/$$

где α_2, γ_2 произвольны; при $x(\xi) = (\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-1}$ нетривиальные решения /14/ отсутствуют.

Согласно /8/, /11/, /18-19/, в рассматриваемом случае потенциал $U(q_1,\dots,q_N)$ /8/ определяется следующими наборами функций $\{V, \omega\}$:

$$V(\xi) = \xi^{-2}, \quad \omega(\xi) = g_1^2 \xi^{-2} + g_2^2 \xi^2 + g_3^2 \xi^4 + g_4^2 \xi^6,$$
$$V(\xi) = (\operatorname{sh}(a\xi))^{-2}, \quad \omega(\xi) = g_1^2 (\operatorname{sh}(a\xi))^{-2} + g_2^2 (\operatorname{sh} 2a\xi)^{-2} + g_3^2 \operatorname{ch} 2a\xi + g_4^2 \operatorname{ch} 4a\xi, \qquad /20/$$

где все постоянные $g_\gamma^2\ (\gamma = 1,\dots,4)$ совершенно произвольны,

$$V(\xi) = \wp(a\xi), \quad \omega(\xi) = g_1^2 \wp(a\xi) + g_2^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1}{2}\right) + g_3^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_2}{2}\right) + g_4^2 \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \qquad /21/$$

ω_1, ω_2 - периоды функции Вейерштрасса $\wp(a\xi)$.

В /21/ постоянные g_γ должны удовлетворять нелинейному уравнению

$$\left(\sum_{\gamma=1}^{4} g_\gamma^4 - \sum_{\beta\neq\gamma}^{4} g_\beta^2 g_\gamma^2\right)^2 = 64 \prod_{\gamma=1}^{4} g_\gamma^2. \qquad /22/$$

II. В этом случае мы определяем α и κ из уравнения /16/. Для $x = (\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-1}$ имеем $\alpha(\xi) = a_1(\operatorname{sn}(a\xi,k))^{-1}$, $\kappa(\xi) = 2ga(\operatorname{sn}(a\xi,k))^{-2}$. Подстановкой $\tau(\xi) = \tau_1(\xi) + \tau_2(\xi)$, где $\tau_1(\xi) = a a_1^2 g^{-1}(\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-2}$, можно привести систему уравнений /15/ к виду /13/ и использовать уже известные решения /13/ для определения $\nu(\xi)$, $\tau(\xi)$. Уравнение /17/ ограничивает выбор постоянных в полученных таким путем функциях $\alpha(\xi)$, $\kappa(\xi)$, $\tau(\xi)$, $\nu(\xi)$. Общее решение /15-17/ может быть записано в форме

$$\alpha(\xi) = a_1(\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-1}, \qquad \kappa(\xi) = 2ga(\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-2},$$
$$\nu(\xi) = [\alpha + \gamma \operatorname{sn}^4(a\xi, k)]\,[\operatorname{sn}(a\xi, k)\operatorname{cn}(a\xi, k)\operatorname{dn}(a\xi, k)]^{-1},$$
$$\tau(\xi) = a a_1^2 g^{-1}(\operatorname{sn}(a\xi, k))^{-2} + \qquad /23/$$
$$+ [\alpha + \gamma \operatorname{sn}^4(a\xi, k)]\,[\quad \operatorname{sn}(a\xi, k)\operatorname{cn}(a\xi, k)\operatorname{dn}(a\xi, k)]^{-1},$$
$$a_1^2 = 2g^2 - 2\alpha g,$$

где α, γ - произвольные постоянные. Соответствующие функции $\{V, W\}$ имеют вид /22/, причем допустимые точки в 4-мерном пространстве $\{g_\gamma\}$ принадлежат двумерной гиперповерхности, определяемой уравнениями

$$F(k^4 g_2^2, (1+k^2)^2 g_3^2, g_4^2) = 0, \quad F\left(g_1^2, g_3^2 + \frac{1-k^2}{1+k^2}(g_2^2 - g_4^2), 2g^2\right) = 0, \qquad /24/$$
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$

либо уравнениями, получающимися из /24/ перестановками $\{g_1 \rightleftarrows g_2, g_3 \rightleftarrows g_4\}$, $\{g_1 \rightleftarrows g_3, g_2 \rightleftarrows g_4\}$, $\{g_1 \rightleftarrows g_4, g_2 \rightleftarrows g_3\}$. Эти перестановки соответствуют сдвигу всех координат на полупериоды $\wp(a\xi)$.

Таким образом, мы установили существование матриц Лакса для гамильтоновых систем с потенциалом /8/, определяемым наборами функций /20-22/, /24/.

Все эти системы обладают дополнительными интегралами движения $I_n = \frac{1}{4n}\operatorname{Tr}(L^{2n})$, $n = 1,\dots,N$, которые находятся в инволюции. Это утверждение, эквивалентное, согласно теореме Лиувилля, полной интегрируемости рассматриваемых систем, доказывается путем непосредственного вычисления скобок Пуассона любых двух собственных значений матрицы L [9].

Все известные ранее интегрируемые системы с гамильтонианом вида /1/ при произвольном N, за исключением цепочек Тода и системы осцилляторов с нелинейным взаимодействием [10], могут быть получены из /8/, /20-22/, /24/ посредством предельных переходов. В частности, результат работы [3] /5,6/ соответствует частным решениям /22/, /24/ вида

$$g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = g_4^2, \quad g_2^2 = g_3^2 = g_4^2, \quad g_1^2 = g_2^2 + 2g^2 \pm 2\sqrt{2}\, g g_2.$$

Это легко установить, пользуясь соотношением

$$\wp(2a\xi) = \frac{1}{4}\left[\wp(a\xi) + \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1}{2}\right) + \wp\left(a\xi + \frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\left(a\xi + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right].$$

В заключение отметим, что значительный интерес представляет нахождение связи рассмотренных здесь систем с сингулярными решениями нелинейных эволюционных уравнений. Возможно, что исследование этого круга вопросов позволит найти в явном виде решения уравнений движения, определяемых гамильтонианом /8/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flaschka H. Phys.Rev.B, 1974, 9, p.1924.
2. Moser J. Adv.Math., 1975, 16, p.197; Calogero F. Lett. Nuovo Cim., 1975, 13, p.411.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1976, 1, p.187; Invent.Math., 1976, 37, p.93.
4. Inozemtsev V.I. Phys.Lett., 1983, 98A, p.316.
5. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p.195.
6. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Phys.Rep., 1981, 71, p.314.
7. Airault H., McKean H.P., Moser J. Comm.Pure Appl.Math., 1977, 30, p.95; Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V. Nuovo Cim., 1977, 40B, p.339.
8. Strampp W., Devel W., Steeb W.-H. Lett.Math.Phys., 1983, 7, p.445.
9. Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1977, 1, p.531.
10. Grosse H. Acta Phys.Austr., 1980, 52, p.101.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1984 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р4-84-247
Расширение класса интегрируемых динамических систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли

Установлено существование нового класса вполне интегрируемых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли. Этот класс обобщает большинство из рассматривавшихся ранее интегрируемых систем, описывающих одномерное движение взаимодействующих частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. P4-84-247
Extension of the Class of Integrable Dynamical Systems Connected with Semisimple Lie Algebras

A new class is found of completely integrable systems connected with semisimple Lie algebras. This class generalizes most of the previously considered integrable systems describing a one-dimensional motion of interacting particles.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984