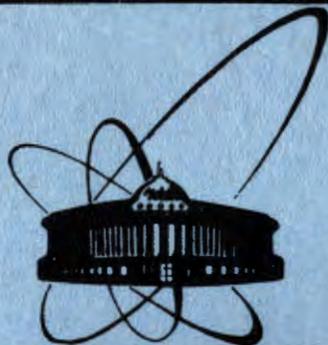


28/IV-84



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2125/84

P4-84-18

В.Б.Беляев, М.М.Мансуров

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНЫХ СЕЧЕНИЙ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АДРОНОВ С ЯДРАМИ
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных характеристик процессов взаимодействия адронов с ядрами является полное сечение. Часто при планировании экспериментальных измерений полное сечение процесса требуется знать еще до проведения самого эксперимента. Однако при вычислении полного сечения многочастичного процесса приходится сталкиваться с трудностями конструирования волновых функций непрерывного спектра в конечном состоянии. В атомно-молекулярной физике используются методы, позволяющие обойти эти трудности /1/. Одним из них является метод моментов, с помощью которого было предложено вычислять полные сечения /2/ взаимодействия адронов с ядрами. Приведем некоторые формулы из /2/, которые понадобятся ниже для нахождения полного сечения π -ядерного взаимодействия.

2. ФОРМАЛИЗМ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Полное сечение удобно представить следующим образом:

$$\sigma_{\lambda}(E) = (2\pi)^4 V^{-1} \sum_{\gamma} |\langle \psi_{\gamma E} | (H - E) \phi_{\lambda E} \rangle|^2, \quad /1/$$

где $|\phi_{\lambda E}\rangle$ - начальное состояние с энергией E в с.ц.и. Введем "внеэнергетическую" функцию

$$C(E, E') = \sum_{\gamma} |\langle \psi_{\gamma E'} | (H - E) \phi_{\lambda E} \rangle|^2, \quad /2/$$

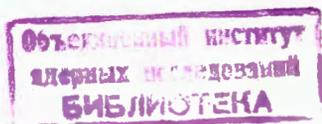
откуда видно, что /2/ на энергетической поверхности $E' = E$ определяет сечение /1/. Определим моменты функции $C(E, E')$:

$$S(-k) = \int (E' - \tilde{E})^{-k} C(E, E') dE'; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad /3/$$

\tilde{E} - произвольная энергия, не совпадающая с E' . Моменты /3/ можно вычислить с помощью функций $|\phi_{\tilde{E}}^n\rangle$ таких, что

$$(H - \tilde{E}) |\phi_{\tilde{E}}^{n+1}\rangle = |\phi_{\tilde{E}}^n\rangle, \quad /4/$$

$$|\phi_{\tilde{E}}^0\rangle = (H - E) |\phi_{\lambda E}\rangle. \quad /5/$$



Действительно, из /4/, /5/ имеем

$$|\phi_{\mathbf{E}}^n\rangle = (\mathbf{H} - \mathbf{E})^{-n} (\mathbf{H} - \mathbf{E}) |\phi_{\lambda\mathbf{E}}\rangle = \sum_{\gamma} f |\psi_{\gamma\mathbf{E}'}\rangle (\mathbf{E}' - \mathbf{E})^{-n} \langle \psi_{\gamma\mathbf{E}'} | (\mathbf{H} - \mathbf{E}) \phi_{\lambda\mathbf{E}} \rangle, \quad /6/$$

тогда

$$S(-\mathbf{k}) = \langle \phi_{\mathbf{E}}^n | \phi_{\mathbf{E}}^{k-n} \rangle. \quad /7/$$

Моменты /7/ можно вычислить, используя разложение по конечно-мерному базису, не прибегая к ненормированным функциям сложной структуры, отвечающим продуктам реакции, затем на основе /3/ восстановить функцию $C(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ по ее моментам /7/ и по значению при $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ найти сечение /1/.

3. ПИОН-ЯДЕРНОЕ РАССЕЯНИЕ

В этом случае полный гамильтониан системы пион-ядро

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \mathbf{V}, \quad /8/$$

где \mathbf{H}_0 - оператор кинетической энергии π -мезона относительно центра масс ядра, \mathbf{h} - гамильтониан ядра, \mathbf{V} - пион-ядерное взаимодействие. Переходя от энергетических переменных \mathbf{E} к безразмерным \mathbf{x} так, что $\mathbf{x} = \sqrt{2\mu}\mathbf{E}/\beta$, где β - протяженность $\pi\mathbf{N}$ -потенциала, μ - приведенная пион-ядерная масса, и учитывая удобство выбора $\mathbf{E} < 0$, моменты /3/ можно переписать следующим образом:

$$S_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_m \int \frac{C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} \, d\mathbf{y}}{(\mathbf{y}^2 + \mathbf{x}^2)^m}; \quad a_m = 2^m \left(\frac{\mu}{\beta^2}\right)^{m-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad /9/$$

Обычно функцию $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ восстанавливают с помощью сходящихся стильтесовских отображений /1,2/. Воспользуемся иным способом и будем искать функцию $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в специальном виде:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^m C^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad C^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{y}) \mathbf{y}. \quad /10/$$

где индекс m соответствует количеству учитываемых моментов, а f_i - неизвестные функции. Тогда соотношения /9/ можно рассматривать как интегральные уравнения для отыскания этих функций. Таким образом, в нулевом порядке имеем

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim C^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_0(\mathbf{x}) f_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}. \quad /11/$$

Используя /9/ для $m = 0$, получаем

$$S_0(\mathbf{x}) = a_0 f_0(\mathbf{x}) \int f_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y},$$

$$C^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mu}{\beta^2} \frac{S_0(\mathbf{x}) S_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}}{J_{00}}, \quad \text{где } J_{00} = \int S_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y} \quad /12/$$

и сечение нулевого порядка

$$\sigma^{(0)}(\mathbf{x}) = (2\pi)^4 \frac{\mu^2}{\beta^3} \frac{S_0^2(\mathbf{x})}{J_{00}}. \quad /13/$$

Далее, для двух моментов $S_0(\mathbf{x})$ и $S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ имеем $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim C^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + C^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $C^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеет вид /12/, то есть

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \frac{\mu}{\beta^2} \frac{S_0(\mathbf{x}) S_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}}{J_{00}} + f_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{y}) \mathbf{y}. \quad /14/$$

Подставляя /14/ в /9/ для $m = 0$ и 1, получаем

$$\frac{\beta^2}{\mu} f_1(\mathbf{x}) I_{01} = 0; \quad m = 0 \quad /15/$$

$$S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{2\mu}{\beta^2} S_0(\mathbf{x}) \frac{J_{10}}{J_{00}} + 2f_1(\mathbf{x}) I_{11}; \quad m = 1, \quad /16/$$

где введены следующие обозначения:

$$J_{00} = \int S_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y}; \quad I_{01} = \int f_1(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y}; \quad /17/$$

$$J_{10} = \int \frac{S_0(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2 + \bar{\mathbf{x}}^2}; \quad I_{11} = \int \frac{f_1(\mathbf{y}) \mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2 + \bar{\mathbf{x}}^2},$$

и так как мы ищем ненулевую функцию $f_1(\mathbf{x})$, то из /15/ следует, что $I_{01} = 0$. Из /16/ найдем вид функции

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - \frac{2\mu}{\beta^2} S_0(\mathbf{x}) \frac{J_{10}}{J_{00}}}{2I_{11}}. \quad /18/$$

В случае вычисления $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ только по двум моментам параметр $\bar{\mathbf{x}}$ можно определить из условия $I_{01} = 0$, и сечение $\sigma(\mathbf{x}) \sim \sigma^{(0)}(\mathbf{x}) + \sigma^{(1)}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\sigma(\mathbf{x}) \sim (2\pi)^4 \frac{\mu}{\beta} \left[\frac{\mu}{\beta^2} \frac{S_0^2(\mathbf{x})}{J_{00}} + \frac{(S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - \frac{2\mu}{\beta^2} S_0(\mathbf{x}) \frac{J_{10}}{J_{00}})^2}{4I_{11}^2} \right],$$

где

$$4I_{11}^2 = 2 \int \left[S_1(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}) - \frac{2\mu}{\beta^2} S_0(\mathbf{y}) \frac{J_{10}}{J_{00}} \right] \frac{\mathbf{y}^2 \, d\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2 + \bar{\mathbf{x}}^2}. \quad /19/$$

Таким образом, для вычисления сечения необходимо знать явный вид моментов $S_0(\mathbf{x})$ и $S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$. Пользуясь /7/, для $\mathbf{k} = \mathbf{m} = 0$ и 1 получаем

$$S_0(E) = \langle \eta V | V \eta \rangle = \langle \eta | V^2 | \eta \rangle, \quad /20/$$

$$S_1(E, \bar{E}) = \langle \eta V | G | V \eta \rangle, \quad /21/$$

где $|\eta\rangle$ - волновая функция начального состояния, а $G = (\bar{E} - H_0 - h - V)^{-1}$ - полная функция Грина. Отметим, что /20/, в отличие от обычного борновского приближения, содержит информацию о непрерывном спектре благодаря соотношению полноты.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Для нахождения момента $S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ из /21/ необходимо знание полной функции Грина G , удовлетворяющей уравнению Липпмана-Швингера:

$$G = G_0 + G_0 V G, \quad /22/$$

где $G_0 = (\bar{E} - H_0 - h)^{-1}$ - ядерная функция Грина, V - пион-ядерный потенциал. Для решения уравнения /22/ воспользуемся вариационным принципом Швингера, что эквивалентно замене V оператором конечного ранга /3/ в виде

$$V = \frac{V | \chi \rangle \langle \chi | V}{\langle \chi | V | \chi \rangle}, \quad /23/$$

где $|\chi\rangle$ - пробная функция, которую примем равной $|\eta\rangle$. Тогда решение уравнения /22/ с потенциалом /23/ имеет вид

$$G = G_0 + \frac{G_0 V | \eta \rangle \langle \eta | V G_0}{\langle \eta | V | \nu \rangle - \langle \eta | V G_0 V | \eta \rangle}. \quad /24/$$

Для вычисления функции Грина мишени G_0 воспользуемся приближением, учитывающим только первый член спектрального разложения ядерного гамильтониана h :

$$h = \sum_n E_n |n\rangle \langle n|, \quad /25/$$

то есть $h \sim E_1 |1\rangle \langle 1|$, где $|1\rangle$ - волновая функция, а E_1 - энергия связи основного состояния ядра. Тогда для G_0 получаем

$$G_0 = (\bar{E} - H_0)^{-1} + |1\rangle E_1 (\bar{E} - H_0 - E_1)^{-1} (\bar{E} - H_0)^{-1} \langle 1|. \quad /26/$$

5. πd -РАССЕЯНИЕ

Для вычисления полного сечения πd -рассеяния в рамках метода моментов воспользуемся волновой функцией дейтрона $\psi_d(\mathbf{r}) = N e^{-\alpha^2 r^2}$,

где параметр $\alpha^2 = 0,2 \text{ Фм}^{-2}$ найден по значению среднеквадратичного радиуса $\langle r^2 \rangle = 4,41 \text{ Фм}^{-2}$. Пион-ядерный потенциал $V = \sum_{i=1}^2 V_{\pi N_i}$,

а пион-нуклонный потенциал $V_{\pi N}$ является сепарабельным, учитывающим взаимодействие только в S -волне:

$$V_{\pi N} = \sum_T V_{2T} P(T); \quad V_{2T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = - \frac{\lambda_{2T}}{2m} g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}'), \quad /27/$$

$$g(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2 + \beta^2)^{-1}; \quad \lambda_{2T} = \frac{\beta}{\pi^2} \frac{a_{2T}}{a_{2T} \beta^{-2}},$$

где m - приведенная πN -масса; a_{2T} - длины рассеяния пиона на нуклоне в изотопических состояниях $T_{\pi N} = 1/2$ и $3/2$; β - протяженность πN -потенциала; $a_1 = 0,257 \text{ Фм}$; $a_3 = 0,154 \text{ Фм}$; $\beta = 3,5 \text{ Фм}^{-1}$. Волновая функция начального состояния в смешанном представлении $\langle \mathbf{k}, \bar{\mathbf{r}} | \eta \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \psi_d(\bar{\mathbf{r}})$. Тогда вычисленные по формулам /20/ и /21/ с учетом /24/ и /26/ моменты имеют вид

$$S_0(\mathbf{x}) = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{\beta^5 (x^2 + 1)^2} \left[1 + \frac{4}{\pi} \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha x} I_0 \right], \quad /28/$$

где

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{y e^{-ay^2} \text{sh} 2axy}{(y^2 + 1)^2} dy; \quad a = \frac{\beta^2}{8\alpha^2},$$

и

$$S_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{2u \cdot \mathbf{J}}{u + \mathbf{J}}; \quad u = \frac{\lambda}{\beta^4 (x^2 + 1)^2}. \quad /29/$$

Здесь

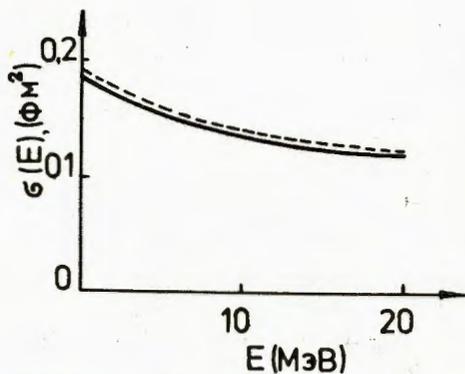
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{\beta^5 (x^2 + 1)^2} \frac{\mu}{\beta^2} \left[\frac{1}{(1 + \bar{x})^2} + \Delta\phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right];$$

$$\Delta\phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha x} M(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} \bar{x}^2}}{2\alpha x} 4x^2 N(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right];$$

$$M(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \int_0^\infty \frac{y e^{-ay^2} \text{sh} 2axy}{(y^2 + 1)^2 (y^2 + \bar{x}^2)} dy;$$

$$N(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \int_0^\infty \frac{y e^{-\frac{a}{2} y^2} \text{sh} axy}{(y^2 + 1)^2 (y^2 + \bar{x}^2) (y^2 + \bar{x}^2 - z^2)} dy;$$

$$\lambda = \frac{2\beta^4}{(2\pi) m} \frac{1}{3} \left(\frac{a_1}{a_1 \beta - 2} + \frac{2a_3}{a_3 \beta - 2} \right);$$



$z^2 = 2\mu / (\beta^2) E_1$, где $E_1 = 0,0113 \text{Фм}^{-1}$ — энергия связи дейтрона.

Используя выражения /13/ и /19/, с учетом /28/ и /29/ получим сечения, представленные на рисунке. Сплошная кривая вычислена по формуле /13/, пунктирная — по формуле /19/. Как видно из рисунка, вклад в сечение от второго момента мал. Таким образом, можно надеяться, что при отсутствии резонансов между частицами в

конечном состоянии указанный метод будет обладать достаточно быстрой сходимостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langhoff W. et al. Phys.Rev., 1977, A16, No. 4, p. 1513; Langhoff P.W. Phys.Rev., 1976, A14, No 3, p. 1042; Shohat J.A., Tamarkin J.D. The Problem of Moments., Am.Math.Soc., Proc. 1943.
2. Эфрос В.Ф. ЯФ, 1978, 28, с. 1658.
3. Зубарев А.Л. Вариационный принцип в квантовой механике. Энергоиздат, М., 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1984 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D2,4-83-179	Труды XV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Дубна, 1982.	4 р. 80 к.
	Труды УШ Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982 /2 тома/	11 р. 40 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Беляев В.Б., Мансуров М.М. P4-84-18
Вычисление полных сечений взаимодействия адронов с ядрами при низких энергиях

На примере взаимодействия π -мезона с дейтроном практически реализуется вычисление полного сечения без использования волновых функций конечного состояния. Найдена зависимость сечения от энергии. Исследуется сходимость метода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Belyaev V.B., Mansurov M.M. P4-84-18
Calculation of Total Cross Section of Hadron-Nuclei Interaction at Low Energies

Total cross section is calculated of the pion-deuteron interaction without using the final-state wave functions. The energy dependence of the cross section is found, and the convergence of the method is studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984