27/II-84

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

1146/84

P4-83-796

М.И.Широков

# СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ И КОНФАЙНМЕНТ ИЗЛУЧЕНИЯ В МОДЕЛИ N ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ АТОМОВ

Направлено в журнал "Physica A"

1983

## 1. Введение

В работе рассматривается система $N$ осцилляторных атомов, заключенная в объеме, размер которого $\ell$ много меньше характерной длины волны излучения атомов.

Будет показано, что если система находится в особом возбужденном состоянии (называемом сверхизлучающим), то скорость излучения фотонов оказывается много большей, чем скорость излучения отдельного атома. Термин "сверхизлучение" в этой работе означает только это явление. Высоковозбужденные состояния нашей системы не переходят в сверхизлучающее состояние, ср. [1], гл. 8, § 4,/ и [2], раздел 2.

В разделе 2 с помощью некоторого канонического преобразования гамильтониан системы сводится к гамильтониану одного осцилляторного квазиатома, "электрон" которого имеет заряд $e\sqrt{N}$. В разделе 3 показано, как можно учесть кулоновское взаимодействие электронов атомов системы в дипольном приближении. В разделе 4 предлагается способ расчета задач об излучении фотонов возбужденной системой, использующий новое определение закона распада [3].

Сверхизлучение в системе $N$ осцилляторных атомов ранее рассматривалось в работе [4]. Обсуждалась модель, содержащая помимо наших приближений много дополнительных приближений известной модели Дикке [5] (их список приведен в нашем заключении). С помощью соответственно модифицированного подхода Дикке (использование группы $SU(1,1)$ вместо $SU(2)$) авторы выявили только сам факт наличия сверхизлучения, не входя в детали. В частности, не было указано, что сверхизлучающее состояние только одно и что остальные коллективные состояния совсем не излучают.

## 2. Модель и каноническое преобразование

Система $N$ нерелятивистских бесспиновых заряженных частиц, связанных потенциалами $V_i$ и взаимодействующих с квантованным электромагнитным полем, описывается гамильтонианом

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m}\left[\vec{p}_i-e\vec{A}(\vec{q}_i)\right]^2+V_i(\vec{q}_i)\right\}+\sum_{i<j}\frac{e^2}{|q_i-q_j|}+H_{ph}\,, \qquad (1)$$

$$H_{ph}=\frac{1}{8\pi}\int d^3x\left[\vec{E}_\perp^2(\vec{x})+(\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}))^2\right]. \qquad (2)$$

Выбрана кулоновская калибровка $\mathrm{div}\,A=0$. Частицы считаются тождественными и будут называться электронами. Заметим, что никакой антисимметризации или симметризации не требуется, поскольку мы предполагаем, что волновые функции электронов не перекрываются заметно /6/.

Чтобы упростить вывод явления сверхизлучения, мы игнорируем временно кулоновское взаимодействие электронов. В следующем разделе будет показано, что его приближенный учет не изменяет существенно ни результат, ни его вывод. Положим далее, что $V_i(\vec{q}_i)=m\varkappa^2(\vec{q}_i-\vec{R}_i)^2/2$, и выберем начало координат в точке $\sum_i\vec{R}_i$, так что $\sum_i\vec{R}_i=0$. Заменим $e\vec{A}(\vec{q}_i)$ в (I) на $eA(0)$. Тогда $i$-й электрон будет испускать фотон не в точке $q_i$, но в точке 0 – в "центре тяжести" всех атомов. Это приближение (дипольное или длинноволновое) оправдано, если размер системы $\ell=\max|\vec{R}_i|$ много меньше, чем длина $\lambda\cong 1/\varkappa$ испускаемых фотонов, см. след. раздел.

После этих замен гамильтониан приобретает вид

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m}\left[\vec{p}_i-e\vec{A}(0)\right]^2+\frac{m\varkappa^2}{2}(\vec{q}_i-\vec{R}_i)^2\right\}+H_{ph} \qquad (3)$$

и оказывается квадратичной функцией операторов (координат и импульсов электронов и операторов рождения – уничтожения фотонов). Гейзенберговские уравнения для них оказываются линейными и могут быть точно решены. Полученная модель в случае $N=1$ рассматривалась в 1951 г. Ван Кампеном /7/.

Покажем, что гамильтониан (3) может быть приведен к еще более простому виду без каких-либо дополнительных предположений.

Разлагая $\vec{A}(\vec{x})$ по электрическим и магнитным мультиполям /8/, находим, что $\vec{A}(0)$ выражается только через электрические дипольные фотонные операторы

$$a^e_{k1M}\,,\quad (a^e_{k1M})^+\,,\quad 0\le k<\infty\,,\quad M=-1,0,+1. \qquad (4)$$

Можно в $H_{ph}$, см. (2), оставить лишь ту его часть $H^d_{ph}$, которая содержит только операторы (4), поскольку фотоны высших мультипольностей не взаимодействуют с электронами в дипольном приближении.

Операторы (4) можно заменить операторами, пронумерованными не циклическими проекциями $M$, а декартовыми, напр. $a_{k1x}=(a_{k1-1}-a_{k1+1})/\sqrt{2}$. Тогда оказывается, что $A_x(0)$ зависит только от $a_{k1x}$ и $a^+_{k1x}$ /9/. В результате гамильтониан модели разделяется на три взаимно коммутирующие части $H_x+H_y+H_z$ /9/. Достаточно рассматривать только одну из них:

$$H_x=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_{ix}^2}{2m}+\frac{m\varkappa^2}{2}q_{ix}'^2\right)-\frac{e}{m}A_x(0)\sum_{i=1}^{N}p_{ix}+\sum_i\frac{e^2}{2m}A_x^2(0)+H^d_{phx}. \qquad (5)$$

Использовано обозначение $q'_{ix}=q_{ix}-R_{ix}$. Индекс $x$ далее будем опускать.

Переходим к выводу явления сверхизлучения. Из (5) следует, что в дипольном приближении взаимодействие электронов с фотонами осуществляется только через оператор $\sum p_{ix}$. Член $\sum e^2A_x^2(0)/2m=Ne^2A_x^2(0)/2m$ не зависит от операторов электронов. Задача состоит в том, чтобы выделить из (5) часть, которая содержала бы фотонные операторы и коллективный оператор $\sum p_{ix}$ и которая коммутировала бы с остатком (5). (Заметим, что $\sum p_{ix}$ не коммутирует с $q_1, q_2, \ldots, q_N$). Для этого мы заменим операторы $q_i$ и $p_i$, $i=1,\ldots,N$, другим набором электронных операторов $\check{q}_s$, $\check{p}_s$, который содержит $\sum p_i$ и является каноническим в смысле $[\check{q}_s,\check{q}_{s'}]=[\check{p}_s,\check{p}_{s'}]=0$, $[\check{q}_s,\check{p}_{s'}]=i\delta_{ss'}$. Старые переменные $q_i$, $p_i$ и новые $\check{q}_s$, $\check{p}_s$ должны быть связаны каноническим преобразованием, т.е. сохраняющим перестановочные состояния. Укажем простой класс таких преобразований, который приводит (5) к наиболее простому виду:

$$\begin{aligned} q'_i&=\sum_{s=0}^{N-1}O_{is}\check{q}_s\,, & p_i&=\sum_{s=0}^{N-1}O_{is}\check{p}_s\,, & i&=1,2,\ldots N\,,\\ \check{q}_s&=\sum_{i=1}^{N}O_{is}q'_i\,, & \check{p}_s&=\sum_{i=1}^{N}O_{is}p_i\,, & s&=0,1,\ldots N-1. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь $O$ есть ортогональная $N\times N$ матрица $O^TO=1$. Мы положим, что $S$ принимает значения $0,1,\ldots,N-1$, и считаем, что $\check{p}_0\sim\sum p_i$ (тогда и $\check{q}_0\sim\sum q_i$, см. (6)). Это значит, что элементы $O_{i0}$ нулевой строки $O$ должны быть все равны $1/\sqrt{N}$, поскольку должно быть $\sum_i O_{i0}^2=1$.

$$\check{p}_0=N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}p_i\quad;\quad \check{q}_0=N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}q_i\,. \qquad (7)$$

Остальные строки $O$ можно выбрать многими способами, если $N\ge 3$ [I]. Этот произвол не влияет на закон распада возбужденной системы, см. далее раздел 4.

Ортогональное преобразование (6) сохраняет сумму квадратов: $\sum p_i^2=\sum\check{p}_s^2$ и $\sum q_i'^2=\sum\check{q}_s^2$; и мы получаем

$$H=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\frac{\check{p}_s^2}{2m}+\frac{m\varkappa^2}{2}\check{q}_s^2\right)+\frac{\check{p}_0^2}{2m}+\frac{m\varkappa^2}{2}\check{q}_0^2-\frac{e\sqrt{N}}{m}\check{p}_0A(0)+ \qquad (8)$$
$$+(e\sqrt{N})^2A^2(0)/2m+H^d_{ph}\,.$$

---

I) Общая ортогональная $N\times N$ матрица имеет $N(N-1)/2$ произвольных параметров. Их следует выбирать так, чтобы $O_{i0}=1/\sqrt{N}$, $i=1,\ldots N$. Но это не фиксирует всех $N(N-1)/2$ параметров, если $N\ge 3$.

Все члены суммы $\sum_s$ из (8) взаимно коммутируют. Они описывают набор из $N-1$ осцилляторов, которые не взаимодействуют с фотонами и друг с другом. Поэтому их возбуждение не может высвечиваться.

Фотоны взаимодействуют только с коллективным $s=0$ осциллятором. Как видно из (8), это взаимодействие описывается гамильтонианом одной (квази) частицы с массой $m$ и зарядом $e\sqrt{N}$, связанной осцилляторным потенциалом. Известно, как найти время жизни такого "атома" или скорость его распада $\gamma_0$, используя теорию возмущений или приближение Вайскопфа-Вигнера. В нашем случае можно найти и точный закон распада, см /3/. Поскольку $\gamma_0$ пропорционально квадрату заряда, то скорость распада нашего "атома" равна $N\gamma$, где $\gamma$ есть скорость распада обычного одиночного осцилляторного атома.

Покажем, как возникают явления сверхизлучения и конфайнмента излучения в нашей модели.

Сначала заметим, что падающие на нашу систему мягкие фотоны возбуждают именно коллективный осциллятор с $s=0$. Система оказывается в возбужденных состояниях $\check{a}_0^+\Omega_0$, $(\check{a}_0^+)^2\Omega_0$ и т.д. Здесь $\Omega_0$ означает "голый" вакуум (нет фотонов и все электронные осцилляторы не возбуждены), $\check{a}_0=\check{p}_0/\sqrt{2m\varkappa}-i\check{q}_0\sqrt{m\varkappa/2}$. Другой способ возбуждения системы осуществляется включением внешнего электрического поля $\vec{E}(x,t)$. Его действие на систему описывается включением в (I) члена $e\sum_i \vec{q}_i\cdot\vec{E}_i(\vec{q}_i,t)$.

Если поле однородно в объеме, который занимает система, $\vec{E}(\vec{q}_i,t)=\vec{E}(t)$, то оно связано только с коллективной координатой $\sum_i q_i=\sqrt{N}\,\check{q}_0$ и возбуждает только осциллятор с $s=0$.

Пусть наша система возбуждена так, что энергия $N\varkappa$ сконцентрирована в сверхизлучающем состоянии: начальное состояние $(\check{a}_0^+)^N\Omega_0$. Тогда эта энергия высвечивается полностью со скоростью $\gamma_0=N\gamma$. Для сравнения рассмотрим $N$ одиночных изолированных атомов. Пусть при $t=0$ все они возбуждены так, что общая энергия возбуждения равна $N\varkappa$ (начальное состояние $a_1^+\dots a_N^+\Omega_0$). Эта энергия высвечивается со скоростью $\gamma$, в $N$ раз меньшей, чем $\gamma_0$.

Для иллюстрации заточения излучения в нашей системе рассмотрим ее начальное состояние $a_j^+\Omega_0$, $a_{jx}=p_{jx}/\sqrt{2m\varkappa}-iq_{jx}\sqrt{m\varkappa/2}$. Возбужден только $j$-й атом по моде $x$, чей гамильтониан есть (5). Оператор $a_{jx}$ (индекс $x$ далее опускается) может быть разложен по коллективным операторам $\check{a}_s=\check{p}_s/\sqrt{2m\varkappa}-i\check{q}_s\sqrt{m\varkappa/2}$, $s=0,\dots N-1$. Разложение имеет вид $a_j=\sum_s O_{js}\check{a}_s$, см. (6). Поэтому и состояние $a_j^+\Omega_0$ разлагается по коллективным состояниям $\check{a}_s^+\Omega_0$,



$s=0,1,\dots N-1$. Только одно из них с $s=0$ высвечивается (быстро), остальные стабильны. Поскольку проекция $a_j^+\Omega_0$ на $\check{a}_0^+\Omega_0$ равна $1/\sqrt{N}$, то только $1/N$-я часть начальной энергии высвечивается, остальная заточается в атомах системы. В разделе 4 рассматривается высвечивание начального состояния $a_1^+\dots a_N^+\Omega_0$ и другие случаи.

Явление конфайнмента излучения обсуждалось и для модели Дикке, но только в рамках первого порядка теории возмущений, см., например, /10/.

## 3. Кулоновское взаимодействие в длинноволновом приближении

Напомним, что длинноволновое или дипольное приближение обычно используется при расчете матричных элементов $\langle\psi_{n'}|eA(\vec{x})|\psi_n\rangle$ переходов системы из состояния $\psi_n$ в $\psi_{n'}$. Обычное разложение $A(\vec{x})$ по операторам рождения-уничтожения содержит $\exp i\vec{k}\vec{x}$. В матричном элементе эту экспоненту можно заменить на $\exp i\vec{k}0=1$, если $k\ell\ll 1$, где $\ell$ – размер системы.

В теории с гамильтонианом (I) или (3) есть расходимости, поэтому мы введем обрезание больших энергий фотонов во взаимодействии. Это можно представить как размазывание точечного электрона:

$$eA(\vec{q}_i)\equiv e\int A(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{q}_i)\,d^3x \to e\int A(x)\,F(\vec{x}-\vec{q}_i)\,d^3x \equiv e\widetilde{A}(\vec{q}_i). \quad (9)$$

Тогда наше дипольное приближение формулируется как $e\widetilde{A}(q_i)\to e\widetilde{A}(0)$. В этом приближении модель искаженно описывает процессы с фотонами больших энергий. Если мы хотим, чтобы она удовлетворительно описывала фотоны с энергией $k\lesssim\varkappa$, следует потребовать, чтобы $\ell\ll 1/\varkappa$. Это налагает ограничение на число атомов в нашей системе: $N\lesssim \ell^3/a^3$, где $a$ – размер осцилляторного атома, $a\cong(m\varkappa)^{-1/2}$.

Покажем, что если используется приближение $e\widetilde{A}(\vec{q}_i)\to e\widetilde{A}(0)$, то и кулоновское взаимодействие тоже должно описываться в соответствующем приближении.

С помощью гамильтониана

$$H=\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m}\left[\vec{p}_i-e\vec{\widetilde{A}}(0)\right]^2+H_{ph}+\sum_i \frac{m\varkappa^2}{2}(\vec{q}_i-\vec{R}_i)^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{|\vec{q}_i-\vec{q}_j|} \quad (10)$$

можно вычислить $\partial A(x,t)/\partial t=-i[A(x,t),H]$ и затем $\partial^2A/\partial t^2$ и получить известное уравнение для поперечного вектор-потенциала:

$$\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{\widetilde{j}}_\perp(\vec{x},t). \quad (11)$$

$j_\perp(\vec{x},t)$ обозначает поперечную часть плотности тока $j(\vec{x},t)$. Заметим, что (II) не зависит от двух последних членов в (I0). Если сделаны замены $eA(\vec{q}_i)\to e\tilde{A}(\vec{q}_i)\to eA(0)$, то обычное выражение $\vec{j}(x,t)=e\sum_i \vec{v}_i(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{q}_i(t))$ заменяется на $\tilde{j}(x,t)=e\sum_i \vec{v}_i(t)\,F(\vec{x})$. Тогда и обычное выражение для плотности заряда $\rho(x,t)=e\sum_i \delta(\vec{x}-\vec{q}_i(t))$ тоже должно быть изменено. Действительно, уравнение сохранения тока в виде $\operatorname{div}\tilde{j}+\partial\rho/\partial t=0$ не имеет места. Можно подозревать, что размазанные электроны должны иметь плотность заряда $e\sum_i F(\vec{x}-\vec{q}_i(t))$. Но и это выражение не удовлетворяет уравнению сохранения тока с током $\tilde{j}$. Разложим $F(\vec{x}-\vec{q}_i(t))$ в ряд Тейлора:

$$F(\vec{x}-\vec{q}_i(t))=F(\vec{x})-\sum(\vec{q}_i(t)\vec{\nabla})F(\vec{x})+\dots,$$

и опустим все невыписанные члены. Можно проверить, что плотность

$$\tilde{\rho}(\vec{x},t)=eNF(x)-e\sum_{i=1}^{N}(\vec{q}_i(t)\cdot\vec{\nabla})F(\vec{x}) \qquad (I2)$$

удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\tilde{j}+\partial\tilde{\rho}/\partial t=0$.

Заметим, что кулоновские члены $\frac{1}{2}\sum e^2/|\vec{q}_i-\vec{q}_j|$ могут быть представлены интегралом

$$\frac{1}{2}\int d^3x\int d^3y\,\frac{\rho(\vec{x})\,\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|},\qquad \rho(\vec{x})=e\sum_{i=1}^{N}\delta(\vec{x}-\vec{q}_i). \qquad (I3)$$

Если $\rho(\vec{x})$ должно быть заменено на $\tilde{\rho}(\vec{x})$, см. (I2), то и кулоновские члены должны быть представлены интегралом

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint d^3x\,d^3y\,\frac{\tilde{\rho}(\vec{x})\tilde{\rho}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}&=\frac{1}{2}\iint d^3x\,d^3y\,\Big\{e^2N^2\,\frac{F(\vec{x})F(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}-\\ &-e^2NF(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum_i(\vec{q}_i\vec{\nabla})F(\vec{y})-e^2N\sum_i(\vec{q}_i\vec{\nabla})F(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}F(\vec{y})+\\ &+e^2\sum_i(\vec{q}_i\vec{\nabla})F(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\sum_j(\vec{q}_j\vec{\nabla})F(\vec{y})\Big\}=\\ &=C\text{-число}+\frac{1}{2}e^2I\,[(\sum q_{ix})^2+(\sum q_{iy})^2+(\sum q_{iz})^2].\end{aligned} \qquad (I4)$$

Последняя строка в (I4) может быть получена с помощью фурье-преобразования $F(\vec{x})$ и $1/|\vec{x}-\vec{y}|$. Второй и третий члены в фигурных скобках оказываются равными нулю, и

$$I=\frac{4\pi}{3}\int d^3x\,|F(\vec{x})|^2. \qquad (I5)$$

$C$-число из (I4) в гамильтониане может быть игнорировано, и кулоновские члены представляются в (5) выражением

$$\frac{1}{2}e^2I(\sum_i q_{ix})^2=\frac{1}{2}e^2I(\sum_i q'_{ix})^2=\frac{1}{2}e^2IN\check{q}_0^2.$$

Напомним, что $\vec{q}\,'_i=\vec{q}_i-\vec{R}_i$ и что $\sum_i\vec{R}_i=0$.



Мы видим, что в (8) кулоновские члены представляются дополнительным членом $\frac{1}{2}e^2IN\check{q}_0^2$, который может быть объединен с $m\varkappa^2\check{q}_0^2/2$:

$$\frac{m\varkappa^2}{2}\Big(1+\frac{e^2NI}{m\varkappa^2}\Big)\check{q}_0^2\equiv\frac{m\varkappa_0^2}{2}\check{q}_0^2. \qquad (I6)$$

Итак, приближенный учет кулоновских членов приводит к единственному следствию: в члене $m\varkappa^2\check{q}_0^2/2$ в (8) константа $\varkappa^2$ заменяется на $\varkappa_0^2$.

Интеграл I, см. (I5), зависит от параметра обрезания (и расходится, если $F(\vec{x})$ заменено на $\delta(\vec{x})$, см. (9)). Поэтому $\varkappa_0^2$ не может быть выражено только через параметры $m$, $\varkappa$, $e$, входящие в исходный гамильтониан (I). В духе перенормировочной идеологии надо просто $\varkappa_0^2$ приравнять к соответствующей наблюдаемой величине[2], см /II/.

Обсудим еще одну возможную модификацию приближенного кулоновского взаимодействия. В гамильтониане (I) нет членов кулоновского самодействия, т.е. членов из $\sum_{ij}e^2/|\vec{q}_i-\vec{q}_j|$ с $i=j$. Такие члены можно исключить и из (I4), вычитая $\sum_i q_i'^2$ из $(\sum q_i')^2=\sum_i\sum_j q_i'q_j'$. В (5) тогда добавляется член

$$\frac{1}{2}e^2I\,[(\sum_i q_i')^2-\sum_i q_i'^2].$$

Мы объединяем члены $\frac{1}{2}e^2I\sum_i q_i'^2=\frac{1}{2}e^2I\sum_s\check{q}_s^2$ с членами $\frac{1}{2}m\varkappa^2\sum_i q_i'^2$ из (5) и с членами $\frac{1}{2}m\varkappa^2\sum_s\check{q}_s^2$ из (8). Таким образом, исключение членов кулоновского самодействия приводит только к тому, что в (5) и в сумме $\sum_{s=1}^{N-1}$ из (8) под константой $\varkappa^2$ следует подразумевать перенормированную величину $\varkappa^2(1-e^2I/m\varkappa^2)$.

## 4. Закон распада возбужденной системы $N$ атомов

Гамильтонианы (5) или (I0) содержат члены вида $(a_i^+a_k^+ + \text{э.с.})$ во взаимодействии $e\sum_i p_iA$[3]. Они порождают процессы типа "атом возбуждается и испускает фотон". Как показано в /3/, присутствие таких "плохих" членов не позволяет использовать обычное определение закона распада как вероятности выживания начального нестабильного состояния $\Phi$: $|\langle\Phi|\exp(-iHt)|\Phi\rangle|^2$.

[2] Точнее говоря, $\varkappa_0-\varkappa$ есть вклад приближенного кулоновского взаимодействия в полный сдвиг уровня.

[3] Оператор $a_i^+=p_i/\sqrt{2m\varkappa}+iq_i\sqrt{m\varkappa/2}$ переводит основное состояние осциллятора в первое возбужденное. Мы назовем $a_i^+$ оператором рождения фонона сорта $i$.

Известно другое определение: в форме среднего значения ( в начальном состоянии $\varphi$ ) гейзенберговского оператора числа фотонов, см., например /1/, гл. 8. Оно тоже не годится по следующей причине. Вычисления показывают, что это среднее не равно нулю в случае, когда начальное состояние есть $\Omega_0$ (нет фотонов и фононов [3]).

Другими словами, в этом случае в системе можно найти фотоны и фононы при $t>0$ , хотя нет физических причин для их появления.

Обычно эту трудность избегают путем выбрасывания "плохих" членов взаимодействия (квантовое "приближение вращающейся волны" /1/). Вместо этого я изменяю определение закона распада следующим образом: число фононов сорта $i$ в момент $t$ дается выражением

$$n_i(t) = \langle \varphi, \hat{n}_i(t)\, \varphi \rangle - \langle \Omega_0, \hat{n}_i(t)\, \Omega_0 \rangle , \tag{17}$$

т.е. из среднего значения гейзенберговского оператора $\hat{n}_i(t) = a_i^+(t)\, a_i(t)$ вычитается "фон" – среднее значение $\hat{n}_i(t)$ в состоянии "голого" вакуума $\Omega_0$ . Определение (17) прежде всего гарантирует, что $n_i(t)=0$ всегда, если $\varphi = \Omega_0$ . Для случая модели с $N=1$ в /3/ было показано, что $0 < n_i(t) \le 1$ при всех $t$ , если $\varphi$ есть однофононное состояние, и что $n_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$ [4]. Определение переходит в обычные, см. выше, если во взаимодействии нет "плохих" членов (или они выкинуты) /3/.

Перед тем как ( и для того чтобы) рассматривать систему из $N$ атомов, покажем, как проще всего точно вычислить (17) в случае $N=1$ . Пусть $\varphi = a^+\Omega_0$: вначале имеется один фонон [3]. Тогда

$$n(t) = \langle \Omega_0 |\, a a^+(t)\, a(t)\, a^+ \,| \Omega_0 \rangle - \langle \Omega_0 |\, a^+(t)\, a(t) \,| \Omega_0 \rangle .$$

"Перетащим" оператор $a$ через $a^+(t)\,a(t)$ направо до встречи с вектором $|\Omega_0\rangle$, который $a$ аннулирует. Одновременно "перетаскиваем" $a^+$ налево к $\langle\Omega_0|$ :

$$\begin{aligned} a a^+(t)\, a(t)\, a^+ &= \{ a^+(t)\, a + [a, a^+(t)] \} \{ a^+ a(t) + [a(t), a^+] \} = \\ &= a(t)\, a a^+ a(t) + a^+(t)\, a\, [a(t), a^+] + \\ &+ [a, a^+(t)]\, a^+ a(t) + [a, a^+(t)][a, a^+(t)]^+ . \end{aligned} \tag{18}$$

---

4) У меня нет общего доказательства, что $n(t)$ обладает такими свойствами в теории любой нестабильной системы. По-видимому, безупречное определение требует введения понятия "одетых" частиц вместо "голых", см., например, раздел 4 в /3/.



Коммутатор $[a, a^+(t)]$ есть $c$ – число $\alpha^*(t)$ в нашей модели, см. ниже. Поэтому второй и третий члены исчезают между $\langle\Omega_0|$ и $|\Omega_0\rangle$. Опуская их, продолжаем (18):

$$\begin{aligned} a^+(t)\,[a^+ a + 1]\, a(t) + |\alpha(t)|^2 &= |\alpha(t)|^2 + \\ + \{ a^+ a^+(t) + [a^+(t), a^+] \} \{ a(t)\, a + [a, a(t)] \} &+ a^+(t)\, a(t). \end{aligned} \tag{19}$$

Последний член в (19) взаимно уничтожается с "фоном", и мы получаем

$$n(t) = |[a^+, a(t)]|^2 + |[a, a(t)]|^2 .$$

В нашей модели $a(t)$ есть линейная функция шредингеровских операторов $a, a^+, a_k, a_k^+$ , $0<k<\infty$, см. /3/:

$$a(t) = \alpha(t)\, a + \beta(t)\, a^+ + \int_0^\infty dk\, [\alpha(k)\, a_k + \beta(k)\, a_k^+] , \tag{20}$$

поэтому

$$n(t) = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 \cong e^{-\gamma t} ; \quad 1/\varkappa < t < \infty ; \quad \gamma = \frac{2e^2\varkappa^2}{3m} . \tag{21}$$

Вычисление $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ см. в /3/. Фотонная часть (20) не нужна для вычисления $n(t)$ .

Аналогично рассмотрим случай $N$ атомов. Рассчитаем число фононов сорта $i$ в момент $t$ , если вначале $L$ атомов были однократно возбуждены $1 \le L \le N$ . Например, $\varphi = a_1^+ \dots a_L^+ \Omega_0$ ,

$$n_i(t) = \langle \Omega_0 |\, a_1 \dots a_L\, a_i^+(t)\, a_i(t)\, a_1^+ \dots a_L^+ | \Omega_0 \rangle - \langle \Omega_0 |\, a_i^+(t)\, a_i(t) | \Omega_0 \rangle \tag{22}$$

Сначала "перетаскиваем" $a_1$ через $a_i^+(t)\, a_i(t)$ направо и $a_1^+$ – налево и используем тот факт, что $a_1 a_2^+ \dots a_L^+ \Omega_0 = 0$. Затем "перетаскиваем" $a_2$ и $a_2^+$ и т.д. Получаем

$$\begin{aligned} n_i(t) &= \sum_{j=1}^{L} \{ |c(j,i)|^2 + |c(j^+,i)|^2 \} , \\ c(j,i) &\equiv [a_j, a_i(t)] ; \quad c(j^+,i) \equiv [a_j^+, a_i(t)] . \end{aligned} \tag{23}$$

Чтобы рассчитать $c(j,i)$ и $c(j^+,i)$, мы должны иметь выражение $a_i(t)$ через шредингеровские операторы нашей модели. Опишем способ его получения.

Сначала выражаем $a_i(t)$ через $p_i(t)$ и $q_i(t)$ : $a_i(t) = p_i(t)/\sqrt{2m\varkappa} - i q_i(t)\sqrt{m\varkappa/2}$ . Затем вместо $p_i(t)$ и $q_i(t)$ вводим $\check{p}_s(t)$ и $\check{q}_s(t)$ (см. (6)). После этого $\check{p}_0(t)$ заменяется на $[\check{a}_0(t) + a_0^+(t)]/\sqrt{2m\varkappa_0}$ , см. раздел 3 (и аналогично $\check{q}_0(t)$ ). Другие

$\check{p}_s(t)$, $s=1,\dots N-1$ заменяются на $[\check{a}_s(t)+a_s^+(t)]/\sqrt{2m\varkappa}$. Поскольку коллективные осцилляторы с номерами $s=1,\dots N-1$ свободные, то $\check{a}_s(t)=\check{a}_s \exp(-i\varkappa t)$. Для $\check{a}_0(t)$ используется (20), (2I), где $\gamma$ должно быть заменено на $\gamma_0 = 2(e\sqrt{N})^2\varkappa_0^2/3m$. Затем выполняются обратные преобразования: $\check{a}_s, \check{a}_s^+ \to \check{p}_s, \check{q}_s \to p_j, q_j \to a_j, a_j^+$, $j=1,2,\dots N-1$. Результат может быть представлен в следующем виде (члены, содержащие фотонные шредингеровские операторы,не выписываются, так как они нам не нужны):

$$a_i(t) = -\sum_{j=1}^N C(j^+,i)a_j + \sum_{j=1}^N C(j,i)a_j^+ + \dots, \tag{24}$$

$$C(j^+,i) = (-\delta_{ij} + 1/N)e^{-i\varkappa t} - \frac{1}{N}\left[\alpha(t) + 2iS_0^2\, \mathrm{Im}\,\alpha(t) - 2iC_0S_0\, \mathrm{Im}\,\beta(t)\right],$$

$$C(j,i) = \frac{1}{N}\left[\beta(t) + 2iS_0^2\, \mathrm{Im}\,\beta(t) - 2iC_0S_0\, \mathrm{Im}\,\alpha(t)\right],$$

$$C_0 \equiv \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varkappa_0}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_0}}\right), \qquad S_0 \equiv \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varkappa_0}{\varkappa}} - \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_0}}\right). \tag{25}$$

Подчеркнем, что матрица $O$ из (6) не фигурирует в результате. Она встречается дважды в описанных выше преобразованиях,и мы использовали условие ортогональности $O$ в виде

$$\sum_{s=1}^N O_{is}O_{js} = \delta_{ij} - O_{i0}O_{j0} = \delta_{ij} - 1/N.$$

Теперь можно получить выражение для асимптотического числа фононов всех сортов, когда вначале было $L$ фононов:

$$n_L(t\to\infty) = \sum_{i=1}^N n_i(t\to\infty) = L\left(1-\frac{1}{N}\right). \tag{26}$$

Для получения (26) используется (23),(24),(25) и асимптотическое поведение $\alpha(t)$ и $\beta(t)$: из (2I) следует, что $\alpha(t),\ \beta(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Формула для $n_L(t)$ слишком громоздка,и я выпишу только случай $\varkappa_0=\varkappa$ (кулоновское взаимодействие выбрасывается):

$$n_L(t) = L\left\{\frac{1}{N}\left[|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2\right] + 1 - \frac{1}{N}\right\} \cong$$
$$\cong L\left\{\frac{1}{N}e^{-\gamma_0 t} + 1 - \frac{1}{N}\right\}, \quad \gamma_0 = 2(e\sqrt{N})^2\varkappa^2/3m = N\gamma. \tag{27}$$

Заметим, что если кулоновское взаимодействие учитывается, то соотношение $\gamma_0 = N\gamma$ заменяется следующим: отношение $\gamma_0/\varkappa_0^2$ в $N$ раз больше, чем $\gamma/\varkappa^2$.

Аналогично можно рассчитать число фотонов (энергии $K$ или любой энергии ), если вначале были возбуждены атомы.

Вместо задач с начальным состоянием можно рассчитать задачи следующего типа: до $t=0$ состояние системы описывается стабильным "физическим" вакуумом $\Omega$ ( собственный вектор $H$ с наименьшей энергией). В момент $t=0$ включается внешнее электрическое поле на короткое время $\tau$. Оно возбуждает атомы. Вычисляется число фононов или фотонов при $t>\tau$ ( в этом случае "фон" должен быть определен как число "голых" фононов или фотонов в состоянии $\Omega$ ).



## Заключение

Было показано, что сверхизлучение и конфайнмент излучения в нашей модели могут быть выведены посредством сведения многоатомной задачи к одноатомной.

Конфайнмент излучения может представлять не меньший интерес, чем сверхизлучение. Например, можно попробовать применить это явление к известной проблеме отсутствия наблюдаемого распада протона (напомним, что большинство калибровочных теорий объединения предсказывает нестабильность протона): распад протонов в ядрах не наблюдается потому, что проекция на сверхизлучающее состояние давно распалась, а сейчас мы имеем дело с долгоживущими модами ( другое объяснение см. в /I2/). Конечно, реализация этой идеи требует отдельного исследования.

Наша модель не содержит многих приближений, которые обычно предполагаются в моделях сверхизлучения. Не выбрасывался член $e^2A^2$. Не использовалось одномодовое приближение для электромагнитного поля (учитывались все фотонные моды). Не потребовалось квантовое "приближение вращающейся волны", см. раздел 4. Мне не известны работы, в которых при обсуждении сверхизлучения учитывалось бы как-либо кулоновское взаимодействие (заметим, что взаимодействия такого типа учитываются в других проблемах, например, в теории нелинейных оптических эффектов в кристаллах /I3/).

Мы использовали только два приближения ( и частный вид атомного потенциала). Нерелятивистское описание заряженных частиц не кажется серьезным недостатком для описания оптических явлений.

Более серьезным дефектом является наш вариант дипольного приближения: фотоны испускаются в "центре тяжести" всех атомов. Возможно рассмотрение улучшенного варианта: каждый электрон испускает фотон в центре $R_i$ своего осцилляторного потенциала. Можно показать, что соответствующая модель все еще точно решается. Для случая $N=2$ она обсуждалась в /I4/. Оказывается, что наше ортогональное преобразование $O$ (т.е. $\check{p}_0 = (p_1+p_2)/\sqrt{2}$, $\check{p}_1 = (p_1-p_2)/\sqrt{2}$ и т.д.) в этом случае приводит к двум коллективным модам, которые распадаются независимо с разными скоростями распадов $\gamma_0$ и $\gamma_1$, причем $\gamma_1 \ll \gamma_0$, если расстояние $|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ между атомами много меньше, чем длина волны излучения.

Модель можно применять к системам, потенциалы которых близки к осцилляторным, например к системам молекул. Но основная польза от точно решаемой модели заключается в возможности проверять приближения, которые мы вынуждены применять в более реальных теориях.

Я благодарен за полезные обсуждения В.А. Загребнову, А.С. Шумовскому, Л.А. Шелепину и В.П. Карасеву.

Литература

I. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", Москва,1978.
2. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. УФН, 1980, 131, 653.
3. Широков М.И. ЯФ, 1975, 21, 674.
4. Лизин И.М., Махвиладзе Т.М., Шелепин Л.И. Труды ФИАН, 1976, 87, 32.
5. Dicke R.H. Phys.Rev., 1954, 93, 99.
6. Мессиа А. Квантовая механика, т. 2, гл. XIУ, § 8. "Наука", Москва, 1979.
7. Van Kampen N.G. Math.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1951, 26, No 15.
8. Роуз М. Поля мультиполей. ИИЛ,Москва, 1957.
9. Еганова И.А., Широков М.И. ЯФ, 1969, 9, 1097.
10. Stenholm S. Physics Rep.,1973, 6C, 3, Sect 1.3.
11. Arecchi F.T., Kim D.M. Optics Commun.,1970, 2, 324.
12. Horwitz L.P., Katznelson E. Phys. Rev. Let., 1983,50 1184.
13. Овандер Л.Н. УФН, 1965, 86,3.
14. Широков М.И. Сообщение ОИЯИ, Р2-8022,Дубна, 1974, § 4.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 ноября 1983 года.



Широков М.И. Р4-83-796
Сверхизлучение и конфайнмент излучения
в модели N осцилляторных атомов

Дан простой вывод явления сверхизлучения в системе N осцилляторных атомов. Используется нерелятивистское описание электронов и дипольное приближение. Никакие другие приближения не применяются. В частности, учитывается кулоновское взаимодействие электронов атомов. Показано, что кроме сверхизлучения существует явление конфайнмента излучения: часть возбуждения системы не высвечивается, а заточается в атомах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Shirokov M.I. P4-83-796
Superradiance and Radiation Confinement
in a Model of N Oscillatory Atoms

A simple derivation of the superradiance phenomenon is presented for an ensemble of N oscillatory atoms. We use a nonrelativistic description of atom electrons and the long-wavelength approximation for their interaction with photons. No other approximations are used. In particular, the Coulomb interaction of electrons also is taken into account. Besides the superradiance, the system is shown to reveal the phenomenon of radiation confinement: a part of the system excitation is not radiated being restrained in the atoms.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод автора