объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-83-664

В.И.Иноземцев

НОВЫЕ ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Направлено в журнал "Physica Scripta"

1983

Для понимания динамических свойств систем произвольного числа взаимодействующих частиц представляют особый интерес полностью интегрируемые N-частичные задачи. Их решение в некоторых случаях удалось найти в аналитической форме [1,2], позволяющей детально изучить процессы рассеяния [2] либо спектр связанных N-частичных состояний в квантовой механике [1,5].

В этой работе мы установим полную интегрируемость некоторых одномерных классических гамильтоновых систем, соответствующих движению N-взаимодействующих частиц во внешнем поле. Гамильтониан таких систем имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j^2}{2} + W(x_j)\right) + \sum_{j>k}^{N} V(x_j - x_k). \qquad /1/$$

Адлер [2] и Ольшанецкий и Переломов [3] показали, что полная интегрируемость имеет место для следующих пар $\{V, W\}$:

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\xi^2}, \quad W(\xi) = \gamma \xi^2, \qquad /2/$$

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma e^{\beta\xi}.$$

В недавней работе автора [4] были найдены новые наборы потенциалов $\{V, W\}$, для которых системы вида /1/ имеют N независимых аналитических интегралов движения:

$$V(\xi) = a^2/\xi^2, \quad W(\xi) = \gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^4, \qquad /3/$$

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma_1 \mathrm{ch}(2\beta\xi) + \gamma_2 \mathrm{ch}(\beta\xi),$$

где $a, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ - произвольные постоянные. Был указан способ построения интегралов движения I_k, $k = 1, \ldots, N$, являющихся симметричными комбинациями собственных значений матрицы Лакса L. Если $\{I_k\}$ находятся в инволюции, т.е. для любых индексов $1 \le k, n \le N$ выполняется равенство

$$\{I_k, I_n\}_P = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial I_k}{\partial p_j}\frac{\partial I_n}{\partial x_j} - \frac{\partial I_k}{\partial x_j}\frac{\partial I_n}{\partial p_j}\right) = 0, \qquad /4/$$

то соответствующие N-частичные системы являются полностью интегрируемыми. Мы покажем, что свойством полной интегрируемости обладают как системы с потенциалами /3/, так и системы несколько более общего вида, определяемые наборами

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\xi^2}, \qquad W(\xi) = \gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi^3 + \gamma_4 \xi^4, \qquad /5/$$

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, \qquad W(\xi) = \gamma_1 \mathrm{ch}(2\beta\xi + \delta) + \gamma_2 \mathrm{ch}(\beta\xi).$$

Все эти системы обладают парой Лакса, т.е. существуют матрицы L и M, такие, что из уравнений движения следует матричное равенство

$$\frac{dL}{dt} = [L, M], \qquad /6/$$

где $[L, M]$ - коммутатор L и M. Структура этих матриц для систем с потенциалами /3/ была установлена автором в /4/:

$$L = \begin{pmatrix} \ell & q \\ q & -\ell \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} m & s \\ -s & m \end{pmatrix}, \qquad /7/$$

где ℓ, q, m, s - матрицы размером $N \times N$,

$$\ell_{jk} = p_j \delta_{jk} + i(1-\delta_{jk}) R_{jk}, \quad R_{jk} = R(x_j - x_k),$$

$$m_{jk} = m_{jj} \delta_{jk} + i(1-\delta_{jk}) R'_{jk}, \qquad /8/$$

$$q_{jk} = \delta_{jk} Q(x_j); \quad s_{jk} = \frac{1}{2}\delta_{jk} Q'(x_j).$$

Функции $R(x_j - x_k)$, $Q(x_j)$ связаны с потенциалами V и W соотношениями

$$V(\xi) = -R^2(\xi) + \mathrm{const}, \qquad /9/$$

$$W(\xi) = \frac{1}{2} Q^2(\xi) + \mathrm{const}$$

и должны удовлетворять функциональным уравнениям

$$R_{j\nu} R'_{jk} + R_{jk} R'_{j\nu} = R_{k\nu}[T_{j\nu} - T_{jk}], \quad T_{j\nu} = T(x_j - x_\nu), \qquad /10/$$

$$R_{jk}(Q'(x_j) + Q'(x_k)) + 2R'_{jk}(Q(x_j) - Q(x_k)) = 0. \qquad /11/$$

Все решения системы /10/, /11/ были найдены автором в /4/:

$$R(\xi) = \frac{a}{\xi}, \qquad Q(\xi) = \gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi + \gamma_3, \qquad /12/$$

$$R(\xi) = \frac{a}{\mathrm{sh}\frac{\beta\xi}{2}}, \quad Q(\xi) = \gamma_1 \mathrm{ch}(\beta\xi + \delta) + \gamma_2.$$

Отметим, что $R(\xi)$ является нечетной, а $R'(\xi)$, $T(\xi)$ - четными функциями:

$$R_{jk} = -R_{kj}, \quad R'_{jk} = R'_{kj}, \quad T_{jk} = T_{kj}. \qquad /13/$$

Согласно /9/ решениям /12/ соответствуют потенциалы /3/.

Пары Лакса для систем, определяемых наборами /5/, имеют несколько более сложную структуру:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L & \tilde{Q} \\ \tilde{Q} & -L \end{pmatrix}, \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} M & \tilde{S} \\ -\tilde{S} & M \end{pmatrix}, \qquad /14/$$

где $\tilde{Q}, \tilde{S}$ - диагональные матрицы размером $2N \times 2N$:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{q} & 0 \\ 0 & \tilde{q} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{s} & 0 \\ 0 & -\tilde{s} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_{jk} = \delta_{jk}\tilde{Q}(x_j), \quad \tilde{s}_{jk} = \frac{1}{2}\delta_{jk}\tilde{Q}'(x_j).$$

Соотношение Лакса для матриц /14/ выполняется, если $Q(x_j)$, $\tilde{Q}(x_j)$ удовлетворяют функциональному уравнению /11/ и

$$W(\xi) = \frac{1}{2}(Q^2(\xi) + \tilde{Q}^2(\xi)) + \mathrm{const}. \qquad /15/$$

Если в качестве решений /10/, /11/ выбрать

$$R(\xi) = \frac{a}{\xi}, \quad Q(\xi) = \gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi + \gamma_3, \quad \tilde{Q}(\xi) = \gamma_1 \xi^2 + \gamma_4 \xi,$$

$$R(\xi) = \frac{a}{\mathrm{sh}\frac{\beta\xi}{2}}, \quad Q(\xi) = \gamma_1 \mathrm{ch}(\beta\xi) + \gamma_2, \quad \tilde{Q}(\xi) = \gamma_3 \mathrm{ch}(\beta\xi + \delta),$$

то из /15/ следует, что потенциал $W(\xi)$ имеет в этом случае форму /5/.

Наборы N независимых интегралов движения для систем с потенциалами /3/ и /5/ могут быть построены следующим образом:

$$I_k = \mathrm{Sp}(L^{2k}), \quad \tilde{I}_k = \mathrm{Sp}(\tilde{L}^{2k}), \quad k = 1, \ldots, N, \qquad /16/$$

В отличие от систем /2/, рассмотренных Адлером [2], в системах /3/, /5/ отсутствуют простые асимптотические состояния, позволяющие использовать для доказательства инволютивности $\{I_k\}$ сравнительно несложную технику Мозера [6]. Более эффективным является алгебраический метод исследования скобок Пуассона, предложенный Переломовым [7]. Приведем основные этапы доказательства инволютивности интегралов $\{I_k\}$ этим методом для систем /3/ /в случае потенциалов /5/ схема доказательства остается прежней, хотя вычисления значительно более громоздки/.

Рассмотрим собственные значения эрмитовой матрицы L /7/, алгебраическими функциями которых являются интегралы I_k /16/. Если скобки Пуассона любой пары этих собственных значений $\{\lambda, \omega\}$ обращаются в нуль, то $\{I_k\}$ находятся в инволюции. Пусть $\phi = \binom{\phi_1}{\phi_2}$, $\chi = \binom{\chi_1}{\chi_2}$ - нормированные собственные векторы L, соответствующие собственным значениям λ и ω /$\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2$ - N-мерные векторы/. По определению, $L\phi = \lambda\phi$, $L\chi = \omega\chi$, или, в подробной записи,

$$\sum_{k\neq j} \ell_{jk}\, \phi_{1k} + Q(x_j)\phi_{2j} = \lambda\phi_{1j}, \quad -\sum_{k\neq j} \ell_{jk}\, \phi_{2k} + Q(x_j)\phi_{1j} = \lambda\phi_{2j}, \qquad /17/$$

$$\sum_{k\neq j} \ell_{jk}\, \chi_{1k} + Q(x_j)\chi_{2j} = \omega\chi_{1j}, \quad -\sum_{k\neq j} \ell_{jk}\, \chi_{2k} + Q(x_j)\chi_{1j} = \omega\chi_{2j}$$

/здесь и далее суммирование проводится по индексам, изменяющимся от 1 до N/.

Используя структуру матрицы L /7,8/ и соотношения

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} = (\phi, \frac{\partial L}{\partial x_j}\phi), \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p_j} = (\phi, \frac{\partial L}{\partial p_j}\phi),$$

представим скобки Пуассона $\{\lambda, \omega\}$ в форме

$$\{\lambda, \omega\}_P = \sum_j Q'(x_j)(Z_j + \bar{Z}_j) + i\sum_{j,k\neq j} R'_{jk}(U_{jk} - \bar{U}_{jk}), \qquad /18/$$

где

$$Z_j = (\bar{\phi}_{1j}\bar{\chi}_{1j} + \bar{\phi}_{2j}\bar{\chi}_{2j})(\phi_{1j}\chi_{2j} - \phi_{2j}\chi_{1j}), \qquad /19/$$

$$U_{jk} = \bar{\phi}_{1j}\bar{\chi}_{1j} A^{(11)}_{jk} + \bar{\phi}_{2j}\bar{\chi}_{2j} A^{(22)}_{jk} - \bar{\phi}_{2j}\bar{\chi}_{1j} A^{(21)}_{jk} - \bar{\phi}_{1j}\bar{\chi}_{2j} A^{(12)}_{jk},$$

$$A^{(\alpha\gamma)}_{jk} = \phi_{\alpha j}\chi_{\gamma k} - \phi_{\alpha k}\chi_{\gamma j}, \quad \alpha, \gamma = 1, 2. \qquad /20/$$

Поскольку из /17/ следуют соотношения

$$\phi_{1j}\chi_{1j} = -\frac{i}{\lambda-\omega}\sum_{\nu\neq j} R_{j\nu} A^{(11)}_{j\nu} + \frac{Q(x_j)}{\lambda-\omega}(\chi_{1j}\phi_{2j} - \chi_{2j}\phi_{1j}),$$

$$\phi_{1j}\chi_{2j} = -\frac{i}{\lambda+\omega}\sum_{\nu\neq j} R_{j\nu} A^{(12)}_{j\nu} + \frac{Q(x_j)}{\lambda+\omega}(\phi_{1j}\chi_{1j} + \phi_{2j}\chi_{2j}) \qquad /21/$$

и еще два соотношения для $\phi_{2j}\chi_{2j}$, $\phi_{2j}\chi_{1j}$, получаемые из /21/ заменой индексов /$1 \rightleftarrows 2$/, можно привести второе слагаемое в /18/ к виду

$$i\sum_{j,k\neq j} R'_{jk}(U_{jk} - \bar{U}_{jk}) = i\sum_{j,k\neq j} R'_{jk} Q(x_j)(Y_{jk} - \bar{Y}_{jk}) -$$

$$-\sum_{\substack{j,k\neq j\\ \nu\neq j}} R_{k\nu}(T_{j\nu} - T_{jk})[(\lambda-\omega)^{-1}(A^{(11)}_{jk}\bar{A}^{(11)}_{j\nu} - A^{(22)}_{jk}\bar{A}^{(22)}_{j\nu}) + \qquad /22/$$

$$+ (\lambda+\omega)^{-1}(A^{(21)}_{j\nu}\bar{A}^{(21)}_{jk} - A^{(12)}_{j\nu}\bar{A}^{(12)}_{jk})],$$

где

$$Y_{jk} = (\lambda-\omega)^{-1}(A^{(11)}_{jk} - A^{(22)}_{jk})(\bar{\chi}_{1j}\bar{\phi}_{2j} - \bar{\chi}_{2j}\bar{\phi}_{1j}) -$$

$$-(\lambda+\omega)^{-1}(A^{(21)}_{jk} + A^{(12)}_{jk})(\bar{\phi}_{1j}\bar{\chi}_{1j} + \bar{\phi}_{2j}\bar{\chi}_{2j}) \qquad /23/$$

и для преобразования множителей типа $R_{jk}R'_{j\nu} + R_{j\nu}R'_{jk}$ использовано функциональное уравнение /10/. Проводя в последнем слагаемом /22/ суммирование по одному из индексов ν или k с учетом свойств симметрии /13/ и соотношений типа

$$i\sum_{k\neq\nu} R_{\nu k} A^{(11)}_{jk} = -p_\nu A^{(11)}_{j\nu} - Q(x_\nu)(\phi_{1j}\chi_{2\nu} - \phi_{2\nu}\chi_{1j}) + \qquad /24/$$

$$+\omega\phi_{1j}\chi_{1\nu} - \lambda\phi_{1\nu}\chi_{1j},$$

найдем окончательное выражение для второго слагаемого в скобке Пуассона /18/:

$$i\sum_{j,k\neq j} R'_{jk}(U_{jk} - \bar{U}_{jk}) = i\sum_{j,k\neq j} R'_{jk} Q(x_j)(Y_{jk} - \bar{Y}_{jk}) +$$

$$+ i\sum_{j,\nu\neq j} T_{j\nu} Q(x_\nu)(X_{j\nu} - \bar{X}_{j\nu}), \qquad /25/$$

$$X_{j\nu} = (\lambda-\omega)^{-1}[\bar{A}^{(11)}_{j\nu}(\phi_{1j}\chi_{2\nu} - \phi_{2\nu}\chi_{1j}) + \bar{A}^{(22)}_{j\nu}(\phi_{2j}\chi_{1\nu} - \phi_{1\nu}\chi_{2j})] +$$

$$+ (\lambda+\omega)^{-1}[\bar{A}^{(12)}_{j\nu}(\phi_{1j}\chi_{1\nu} + \phi_{2\nu}\chi_{2j}) + \bar{A}^{(21)}_{j\nu}(\phi_{2j}\chi_{2\nu} + \phi_{1\nu}\chi_{1j})].$$

Отметим, что все слагаемые в правой части /22/, имеющие нулевой порядок по $Q(x_j)$, $Q(x_\nu)$, обращаются в нуль вследствие свойств симметрии R_{jk}, R'_{jk}, $A^{(\alpha\gamma)}_{jk}$.

Далее, воспользовавшись равенствами, следующими из /21/,

$$\phi_{1j}\chi_{1j} + \phi_{2j}\chi_{2j} = -i(\lambda-\omega)^{-1}\sum_{\nu\neq j} R_{j\nu}(A^{(11)}_{j\nu} - A^{(22)}_{j\nu}),$$

$$\phi_{1j}\chi_{2j} - \phi_{2j}\chi_{1j} = -i(\lambda+\omega)^{-1}\sum_{\nu\neq j} R_{j\nu}(A^{(12)}_{j\nu} + A^{(21)}_{j\nu}),$$

преобразуем первое слагаемое в /18/ и выражение для Y_{jk} /23/, приведя скобку Пуассона $\{\lambda, \omega\}$ к виду

$$\{\lambda, \omega\}_P = (\lambda^2 - \omega^2)^{-1} \sum_{\substack{j,\, k\neq j \\ \nu\neq j}} \{(R'_{j\nu}R_{jk} + R'_{jk}R_{j\nu})Q(x_j) + R_{jk}R_{j\nu}Q'(x_j)\}\times$$

$$\times[(A^{(11)}_{j\nu} - A^{(22)}_{j\nu})(\bar{A}^{(12)}_{jk} + \bar{A}^{(21)}_{jk}) + (\bar{A}^{(11)}_{j\nu} - \bar{A}^{(22)}_{j\nu})(A^{(12)}_{jk} + A^{(21)}_{jk})] + \qquad /26/$$

$$+ i\sum_{j,\,\nu\neq j} T_{j\nu}Q(x_\nu)(X_{j\nu} - \bar{X}_{j\nu}).$$

Симметричное по индексам (k, ν) выражение в фигурной скобке можно преобразовать при $k\neq\nu$, трижды используя функциональное уравнение /11/ так, чтобы результат не содержал слагаемых с $Q'(x_j)$, $Q'(x_k)$, $Q'(x_\nu)$:

$$(R'_{j\nu}R_{jk} + R'_{jk}R_{j\nu})Q(x_j) + R_{jk}R_{j\nu}Q'(x_j) =$$

$$= Q(x_\nu)\left[R_{jk}R'_{j\nu} + \frac{R_{jk}R_{j\nu}R'_{\nu k}}{R_{\nu k}}\right] + (k \rightleftarrows \nu). \qquad /27/$$

Заметим также, что при $k\neq\nu$ имеет место равенство

$$R_{jk}(R'_{j\nu}R_{\nu k} + R_{j\nu}R'_{\nu k}) = -R^2_{\nu k}T_{j\nu}, \qquad /28/$$

являющееся следствием функциональных уравнений /10/, /11/.

Таким образом, с учетом /27-28/ скобка Пуассона /26/ может быть представлена в форме

$$\{\lambda, \omega\}_P = (\lambda^2 - \omega^2)^{-1}\sum_{j,\,k\neq j}\{2R'_{jk}Q(x_j) + Q'(x_j)R_{jk}\}R_{jk}\times$$

$$\times[(A^{(11)}_{jk} - A^{(22)}_{jk})(\bar{A}^{(12)}_{jk} + \bar{A}^{(21)}_{jk}) + (\bar{A}^{(11)}_{jk} - \bar{A}^{(22)}_{jk})(A^{(12)}_{jk} + A^{(21)}_{jk})] +$$

$$(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}\sum_{\substack{j,k\neq j \\ \nu\neq j,\, k\neq\nu}} T_{j\nu}Q(x_\nu)R_{k\nu}[(A^{(11)}_{j\nu} - A^{(22)}_{j\nu})\times$$

$$\times(\bar{A}^{(12)}_{jk} + \bar{A}^{(21)}_{jk}) + (\bar{A}^{(11)}_{j\nu} - \bar{A}^{(22)}_{j\nu})(A^{(12)}_{jk} + A^{(21)}_{jk}) + (k \rightleftarrows \nu)] + \qquad /26a/$$

$$+ i\sum_{j,\,\nu\neq j} T_{j\nu}Q(x_\nu)(X_{j\nu} - \bar{X}_{j\nu}).$$

Поскольку выражение в квадратной скобке в первой сумме /26a/ симметрично относительно индексов (j, k), то перестановкой этих индексов и использованием уравнения /11/ можно показать, что эта сумма обращается в нуль. Выполняя во втором слагаемом в /26a/ суммирование по индексу k с помощью соотношений типа /24/ и используя определение $X_{j\nu}$ /25/, окончательно найдем

$$\{\lambda, \omega\}_P = \sum_{j,\,\nu\neq j} T_{j\nu}Q(x_\nu)(\lambda^2 - \omega^2)^{-1}(Z_{j\nu} - \bar{Z}_{j\nu}), \qquad /26б/$$

где

$$Z_{j\nu} = \omega(\bar{A}^{(11)}_{j\nu}A^{(21)}_{j\nu} + \bar{A}^{(22)}_{j\nu}A^{(12)}_{j\nu} + A^{(11)}_{j\nu}\bar{A}^{(21)}_{j\nu} + A^{(22)}_{j\nu}\bar{A}^{(12)}_{j\nu}) + \qquad /29/$$

$$+ \lambda(\bar{A}^{(11)}_{j\nu}A^{(12)}_{j\nu} + \bar{A}^{(22)}_{j\nu}A^{(21)}_{j\nu} + A^{(11)}_{j\nu}\bar{A}^{(12)}_{j\nu} + A^{(22)}_{j\nu}\bar{A}^{(21)}_{j\nu}).$$

Но, как легко заметить, величины $Z_{j\nu}$ вещественны; следовательно, правая часть /26б/ обращается в нуль для любых пар $\{\lambda, \omega\}$, что и доказывает инволютивность набора интегралов движения $\{I_k\}$.

Таким образом, согласно теореме Лиувилля системы /1/ с потенциалами /3,5/ являются полностью интегрируемыми. На наш взгляд, весьма интересным было бы установление связи таких систем с полупростыми алгебрами Ли [3], что способствовало бы поиску аналитической формы решений уравнений движения, определяемых гамильтонианом /1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero F. Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p. 411.
2. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 195.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1976, 1, p. 187.
4. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-83-418, Дубна, 1983.
5. Olshanetsky M.A. Perelomov A.M. Phys. Reports, 1981, 71, p. 314; 1983, 94, p. 312.
6. Moser J. Adv.Math., 1975, 16, p. 197.
7. Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1977, 1, p. 531.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 сентября 1983 года.

Иноземцев В.И.

Р4-83-664

Новые полностью интегрируемые многочастичные динамические системы

Установлена полная интегрируемость ряда N-частичных динамических задач о движении систем частиц с бинарным взаимодействием во внешнем поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Inozemtsev V.I.

P4-83-664

New Completely Integrable Multiparticle Dynamical Systems

Complete integrability is established for some N-body dynamical problems on the motion of particle systems with a binary interaction in an external field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой