сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5116/83

Р4-83-495

В.А.Николаев

О R-МАТРИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ S-ФАЗ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ

1983

1. В последние годы оживился интерес к феноменологическому описанию низкоэнергетического нуклон-нуклонного рассеяния с помощью P-матричного подхода, разработанного в шестидесятых годах в работах [1,2]. Так, в связи с идеей о существовании шестикварковых состояний с барионным числом 2 большой резонанс получили публикации [3,4], в которых была дана параметризация низших фаз мезон-мезонного и нуклон-нуклонного рассеяния с помощью P-матрицы полюсного вида. В [3,4] энергии, соответствующие полюсам, соотносились с собственными значениями энергий многокварковых систем, заключенных в объеме удерживающего MIT-мешка.

Следует отметить, однако, что в собственно P-матричном подходе параметры P-матрицы /логарифмической производной волновой функции относительного движения NN-системы/ явно не связаны с наблюдаемыми величинами, хотя в принципе P-матрицу можно связать с S-матрицей, которая, в свою очередь, непосредственно связана с наблюдаемыми сечениями. Поэтому вопрос об определении физического смысла этих параметров вызывает естественный интерес, особенно в связи с проблемой выяснения природы шестикварковой системы, возникающей, как предполагается, при сближении нуклонов на малые взаимные расстояния [5-8].

В настоящей работе мы рассмотрим некоторые формальные аспекты полюсного представления P-матрицы и физического смысла полюсов и вычетов в них. Исследуется общая структура P-матрицы для одноканального случая методом, принятым в R-матричной теории.

2. Рассмотрим случай одноканального потенциального упругого рассеяния. Известно, что задачу рассеяния можно сформулировать с помощью как R-матрицы, так и P-матрицы [2], которые связаны между собой соотношением $R = P^{-1}$. Функции R и $(-P)$ удовлетворяют уравнению Риккати [9]

$$\frac{dR(r,\epsilon)}{dr} = R^2 + U(r)R - v(r) + \epsilon . \qquad /1/$$

Действительно, легко проверить, что подстановка

$$R = -\frac{1}{\chi}\frac{d\chi}{dr}$$

в уравнение Шредингера приводит к уравнению /1/, в котором $U = 0$, $v = 2\mu V(r)/\hbar^2$, $\epsilon = 2\mu E/\hbar^2$, где $V(r)$ - потенциал, μ - - приведенная масса, E - энергия задачи. Относительно решений уравнений Риккати справедлива следующая теорема [9]. Решение уравнения Риккати $R(r,\epsilon)$ с начальным условием $R(0,\epsilon) = R_0$, где R_0 - вещественно, принадлежит пространству R-функций от параметра ϵ для любого конечного значения r, если $U(r)$ и $v(r)$ являются вещественными непрерывными функциями. Пространство R-функций определяется,как пространство мероморфных функций комплексного переменного, мнимые части которых неотрицательны в верхней полуплоскости и неположительны в нижней. Вытекающие отсюда свойства R-функций:

а/ функция вещественна на вещественной оси и только на вещественной оси $R(\epsilon^*) = (R(\epsilon))^*$.

б/ Производная от R-функции положительна в каждой регулярной точке вещественной оси.

в/ Все полюса R-функции лежат на вещественной оси. Эти полюса простые и имеют отрицательные вычеты.

г/ Любая R-функция может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд Миттаг-Леффлера:

$$R = \alpha\epsilon + \beta + \sum_\mu \left(\frac{\gamma_\mu^2}{E_\mu - \epsilon} - \frac{\gamma_\mu^2}{E_\mu}\right), \qquad /2/$$

где α и γ_μ^2 - положительны, $\sum_\mu(\gamma_\mu^2/E_\mu) < \infty$, а β и E_μ - вещественны.

Поскольку, как было отмечено, $(-P)$ принадлежит пространству R-функций, теорема в общем случае обеспечивает полюсный характер P-матрицы.

При некоторых дополнительных предположениях можно исключить линейный член. Это утверждение доказывается для величины, обратной к логарифмической производной в [10]. А поскольку всякая дробно-линейная функция $Q = (a_1R + b_1)/(a_2R + b_2)$, где R принадлежит пространству R-функций, a_1, a_2, b_1 и b_2 вещественны $(a_1b_2 - a_2b_1 > 0)$ и тоже принадлежат пространству R-функций, то отсутствие линейного члена в P^{-1} обеспечивает отсутствие такового и в P при тех же условиях. Далее линейный член будет нами всюду опускаться.

3. Смысл энергий E_μ и вычетов γ_μ^2 выявляется в рамках конкретных моделей. Так, в R-матричной теории ядерных реакций для этого обычно используется формула Грина, справедливая для двух произвольных решений u_1, u_2 уравнения Шредингера с энергиями E_1 и E_2:

$$\left(u_2\frac{du_1}{dr} - u_1\frac{du_2}{dr}\right)_{r=b} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_1 - E_2)\int_0^b u_1u_2dr = 0, \qquad /3/$$

удовлетворяющих граничному условию $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Если теперь выбрать в качестве одного из них решение u_λ с граничным условием $u_\lambda(b) = 0$ и энергией E_λ /это решение можно интерпретировать, как собственное состояние системы во

внутренней области $r \le b$/, то из формулы /3/ следует

$$\left(u_E(r)\frac{du_\lambda(r)}{dr}\right)_{r=b} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_\lambda - E)\int_0^b u_E(r)u_\lambda(r)\,dr = 0, \qquad /4/$$

где $u_E(r)$ - решение задачи рассеяния при произвольно взятой энергиии E. Из уравнения /4/ видно, что $u_E(b)$ обращается в нуль при $E = E_\lambda$, так как в общем случае входящие в /4/ интеграл и производная не равны нулю. Можно разложить решение $u_E(r)$ по решениям $u_\lambda(r)$ во внутренней области:

$$u_E(r) = \sum_\lambda c_\lambda u_\lambda(r), \qquad /5/$$

где

$$c_\lambda = \int_0^b u_E(r)u_\lambda(r)\,dr. \qquad /6/$$

Тогда, используя /4/, получим

$$c_\lambda = \frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)_{r=b}}{E - E_\lambda}u_E(b). \qquad /7/$$

Очевидно, ряд /5/ не является равномерно сходящимся к $u_E(r)$ во всем интервале $[0, b]$, так же как и ряд, составленный из производных, и поэтому не может быть продифференцирован для вычисления логарифмической производной в точке b.

Мы попытаемся решить эту проблему таким образом, чтобы вообще избежать дифференцирования. С этой целью сначала воспользуемся уравнением /3/ для двух решений с бесконечно мало отличающимися энергиями и предельным переходом $E_1 \to E_2$ и получим известное [2] выражение для производной по энергии

$$\frac{dP}{dE} = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{u_E^2(b)}\int_0^b u_E^2(r)\,dr. \qquad /8/$$

Для вывода /8/ следует воспользоваться определениями

$$\left(\frac{du_i}{dr}\right)_{r=b} = P(E_i)\,u_{E_i}. \qquad /9/$$

Выражение /8/ еще раз подчеркивает монотонный характер логарифмической производной как функции энергии в регулярных точках. Теперь представим $u_E(r)$ в виде суммы двух функций:

$$u_E(r) = u_1(r) + \tilde{u}(r), \qquad /10/$$

где $u_1(r)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u_1(0) = u_1(b) = 0, \qquad /11/$$

а $\tilde{u}$ обращается в нуль при $r = 0$ и определяет функцию $u_E(r)$ при $r \ge b$.

В силу граничных условий /11/ имеем все основания разложить функцию $u_1(r)$ по $u_\lambda(r)$ при $r \le b$:

$$u_1 = \sum_\lambda a_\lambda \cdot u_\lambda(r), \qquad /12/$$

где

$$a_\lambda = \int_0^b u_1(r)\, u_\lambda(r)\, dr. \qquad /13/$$

Воспользовавшись теоремой Грина для $u_E(r)$ и u_λ, будем иметь

$$\left(\frac{du_\lambda}{dr}\tilde{u}_E(r)\right)_{r=b} + \frac{2\mu}{h^2}(E_\lambda - E)\, a_\lambda + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_\lambda - E)\int_0^b \tilde{u}\, u_\lambda\, dr = 0, \qquad /14/$$

откуда

$$a_\lambda = \frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)_b \cdot \tilde{u}(b)}{E - E_\lambda} - \int_0^b \tilde{u}(r)\, u_\lambda(r)\, dr. \qquad /15/$$

Потребовав $a_\lambda = 0$, т.е. чтобы функция $u_E(r)$ исчерпывалась функцией $\tilde{u}_E(r)$, будем иметь

$$\int_0^b u_E(r)\, u_\lambda(r)\, dr = \frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)_b \cdot u_E(b)}{E_\lambda - E}. \qquad /16/$$

Требование $a_\lambda = 0$ в /15/ эквивалентно условию

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{b-\epsilon} u_E^2(r)\, dr = \lim_{\epsilon\to 0}\sum_\lambda \left[\int_0^{b-\epsilon} u_E(r)\, u_\lambda(r)\, dr\right]^2. \qquad /17/$$

Используя /8/, /16/, /17/, имеем

$$\left(\frac{dP}{dE}\right)_{r=b} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_\lambda \frac{\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)^2_{r=b}}{(E - E_\lambda)^2}. \qquad /18/$$

Согласно представлению /2/ полюса производной dP/dE совпадают с полюсами самой P-матрицы. Следовательно, естественно отождествить E_λ с полюсами P-матрицы, а вычеты-с величинами $\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)^2_b$. Таким образом,

$$P_{\epsilon\to 0}(E, b-\epsilon) \equiv P^{(-)}(E, b) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_\lambda \frac{\left(\frac{du_\lambda}{dr}\right)^2_b}{(E - E_\lambda)} + P_0. \qquad /19/$$

В последнем выражении P_0 - не зависящая от энергии величина. Из приведенного доказательства следует, что полюсам логарифмической производной соответствуют собственные числа задачи во

внутренней области с граничным условием, требующим обращения в нуль волновой функции в точке $r = b$. Вычеты в полюсах определяются производными от собственных функций внутренней задачи. Следует подчеркнуть, что собственные значения и собственные функции внутренней задачи определяют левую логарифмическую производную /или левую P-матрицу в общем случае/. P-матричный подход подразумевает непрерывность логарифмической производной, если потенциал несингулярен на границе внутренней и внешней областей.

4. Далее получим уравнение, которому удовлетворяют вычеты. Согласно уравнению /1/ при $R = -P$ имеем

$$-\frac{dP}{dr} = P^2 - v(r) + \epsilon. \qquad /20/$$

Подставим сюда выражение для P в окрестности ее полюса

$$P \approx \frac{r_\lambda(b)}{E - E_\lambda(b)}, \qquad /21/$$

получим

$$-\frac{dr_\lambda(b)}{db}(E - E_\lambda) - r_\lambda(b)\frac{dE_\lambda}{db} = r_\lambda^2(b) + (\epsilon - v(b))(E - E_\lambda(b))^2. \qquad /22/$$

При $E \to E_\lambda$ имеем

$$r_\lambda(b) = -\frac{dE_\lambda(b)}{db}. \qquad /23/$$

Легко видеть, что постоянный по энергии член P_0 в /19/ не изменит этого результата. Выражение /23/ совпадает с использованным в [3] для оценки величины вычетов P-матрицы. Однако в [3] использовалось уравнение для P-матрицы свободного движения.

5. Сделаем некоторые выводы, вытекающие из представлений /19/ и /23/.

Очевидно, что если ближайший полюс P-матрицы лежит достаточно далеко, то логарифмическая производная становится не зависящей от энергии. Этому случаю соответствует ситуация, когда b выбирается достаточно малым, а во внутренней области присутствует кор потенциала, который вытеснит уровень далеко вверх. /Мы не рассматриваем здесь случая предельной нелокальности, совместимой с принципом причинности [2]/.

Поскольку и вычет, и значения полюса определяются из решения задачи во внутренней области, они не могут быть независимы. В этом отношении подходы, в которых значения вычетов и энергий полюсов варьируются независимо, являются, строго говоря, непоследовательными. Уравнение /23/ затрудняет непосредственное использование результатов, получаемых в модели мешков, для оценки величины P-матрицы. Так, например, в модели удерживающего мешка масса состояния определяется из условия минимизации энергии, как функции размера мешка. Это, в свою очередь, означает, что если логарифмическая производная вычисляется на границе мешка, то вычет основного состояния мешка согласно /23/ обратится в ноль. Именно это обстоятельство приводит к необходимости при оценке величины вычетов вычитать из энергии мешка член, соответствующий удержанию. В /3/ был предложен рецепт выбора подходящего b из условия совпадения среднеквадратичных расстояний между кварками в мешке и в состоянии двух невзаимодействующих нуклонов, заключенных в объем с радиусом b. В связи с этим следует подчеркнуть, что использование собственно P-матричного подхода никак не связано с выбором некоторого физического b. Выбор b определяется нашими возможностями вычисления спектра гамильтониана во внутренней области.

В заключение автор выражает свою признательность В.К.Лукьянову за помощь в работе и полезные обсуждения, А.И.Титову за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feshbach H., Lomon E.L. Phys.Rev., 1956, 102, p.891.
2. Feshbach H., Lomon E.L. Ann.Phys. (N.Y.), 1964, 29, p.19; Lomon E.L., Feshbach H. Ann.Phys. (N.Y.), 1968, 48, p.94.
3. Jaffe R.L., Low F.E. Phys.Rev., 1979, D19, p.2105.
4. Jaffe R.L., Shatz M.P. Preprint GALT-68-775, 1980.
5. Efimov V.N., Schulz H. Nucl.Phys., 1978, A309, p.344; Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-82-564, Дубна, 1982.
6. Lomon E.L. Proceedings of the Journees d'Etudes de la Division Physique Theorique, Aussois, March 1980, p.111-1.
7. Mulders P.J. Phys.Rev., 1982, D26, p.3039.
8. Simonov Yu.A. Phys.Lett., 1981, 107B, p.1; Симонов Ю.А. Ядерная физика, 1982, т.36, с.722.
9. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях. ИЛ, М., 1960, с.65.
10. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. "Мир", М., 1976, с.114.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Николаев В.А. Р4-83-495
О Р-матричной аппроксимации S-фаз нуклон-нуклонного рассеяния

Рассмотрены формальные основания полюсного представления Р-матрицы задачи рассеяния. Исследуется общая структура Р-матрицы для одноканального случая методом, принятым в R-матричной теории. Показано, что полюсам логарифмической производной соответствуют собственные значения и собственные функции гамильтониана во внутренней области с граничным условием, требующим обращения в нуль волновой функции на границе внутренней и внешней областей. Вычеты в полюсах определяются квадратами производных от собственных функций внутреннего гамильтониана и равны производным от собственных чисел по радиусу разделения на внутреннюю и внешнюю области b. Подчеркивается, что использование собственно Р-матричного подхода никак не связано с выбором некоторого физического b. Выбор b определяется нашими возможностями вычисления спектра гамильтониана во внутренней области.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Nikolaev V.A. P4-83-495
On a P-Matrix Approximation of Nucleon-Nucleon Scattering S-Phase Shifts

Formal grounds are considered for a pole representation of the P-matrix of the scattering problem. A general structure of the P-matrix is investigated for the single-channel case by a method accepted in the R-matrix theory. It is shown that eigenvalues and eigenfunctions of the Hamiltonian of an interior region determine the pole representation of the left logarithmic derivative to within an additive constant. A relation for residues at poles is obtained. Residues corresponding to poles are determined by derivatives squared from eigenfunctions of inner Hamiltonian and are equal to derivatives from eigenvalues over radius of separation into the interior and external regions b. It is emphasized that the use of strictly P-matrix approach is not connected with the choice of a certain physical P. The choice of P is determined by our possibilities of calculating the Hamiltonian spectrum in the interior region.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой