3/X-83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-83-418

В.И.Иноземцев

О ДВИЖЕНИИ КЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1983

Число известных к настоящему времени классических интегрируемых многочастичных систем, взаимодействие в которых определяется двухчастичными силами, крайне ограничено [1-3]. Все эти системы одномерны и имеют гамильтониан вида

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i>j}^{N} V(x_i - x_j), \qquad /1/$$

где

$$V(\xi) = \{ \frac{a^2}{\xi^2}, \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, a^2 \wp(\beta\xi) \} \qquad /2а/$$

или

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\xi^2} + \beta^2 \xi^2 , \qquad /2б/$$

$\wp(\beta\xi)$ - функция Вейерштрасса; a, β - произвольные /не обязательно вещественные/ постоянные.

Интегрируемость задач о движении таких систем частиц во внешнем поле удалось установить в еще меньшем числе случаев [4,5]. Если представить гамильтониан взаимодействия системы /1/ с внешним полем в форме

$$H_{int} = \sum_{i=1}^{N} W(x_i), \qquad /3/$$

то эти случаи таковы:

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\xi^2}, \quad W(\xi) = \gamma \xi^2, \qquad /4а/$$

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma e^{\beta\xi} . \qquad /4б/$$

В работе [6] автором было показано, что для двух степеней свободы список /4а-б/ может быть значительно расширен и, в частности, включает набор

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 \frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma_1 \mathrm{ch}\, 2\beta\xi + \gamma_2 \mathrm{ch}(\beta\xi + \delta) . \qquad /5/$$

В этой заметке мы покажем, что часть результатов [6] может быть обобщена для систем N частиц, т.е. получим новые наборы $\{V, W\}$, для которых N-частичные системы с гамильтонианом $H = H_0 + H_{int}$ обладают N независимыми интегралами движения.

Исходным пунктом нашего рассмотрения является эквивалентность уравнений движения, определяемых гамильтонианом H_0 с потенциалами вида /2а/, и матричного равенства [1,2]

$$\frac{d\ell}{dt} = \{\ell, H_0\}_P = [\ell, m], \qquad /6/$$

где ℓ, m - матрицы размером $N\times N$, $\{\ldots\}_P$ - скобки Пуассона, $[\ell, m] = \ell m - m\ell$. Вследствие /6/ собственные значения ℓ не зависят от времени и составляют набор N независимых интегралов движения. Структура матриц ℓ и m, образующих пару Лакса, была впервые найдена в [1,2]:

$$\ell_{jk} = p_j \delta_{jk} + (1-\delta_{jk}) R(x_j - x_k), \qquad /7/$$

$$m_{jk} = m_{jj} \delta_{jk} + (1-\delta_{jk}) R'(x_j - x_k), \quad j,k = 1,\ldots,N.$$

Функция $R(\xi)$, связанная с потенциалом $V(\xi)$ соотношением $V(\xi) = R^2(\xi) + \mathrm{const.}$, может принимать значения из следующего набора:

$$R(\xi) = \{ \frac{a}{\xi}, \frac{a}{\mathrm{sh} \frac{\beta\xi}{2}}, a\, \mathrm{cth} \frac{\beta\xi}{2}, \frac{a\, \mathrm{cn}\beta\xi}{\mathrm{sn}\beta\xi}, a \frac{\mathrm{dn}\beta\xi}{\mathrm{sn}\beta\xi} \} . \qquad /8/$$

Если движение системы определяется гамильтонианом $H = H_0 + H_{int}$, причем H_{int} имеет вид /3/, вычисление производной матрицы по времени с учетом /6/, /7/ также не составляет труда:

$$\frac{d\ell}{dt} = \{\ell, H_0 + H_{int}\}_P = [\ell, m] - w' , \qquad /9/$$

где w' - диагональная матрица: $w'_{jk} = \delta_{jk} W'(x_j)$.

Рассмотрим теперь матрицы L и M размером $2N\times 2N$, имеющие блочную структуру вида

$$L = \begin{pmatrix} \ell & q \\ q & -e \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & s \\ -s & m \end{pmatrix}, \qquad /10/$$

где q, s - диагональные матрицы размером $N\times N$:

$$q_{jk} = \delta_{jk} Q(x_j), \quad s_{jk} = \delta_{jk} S(x_j). \qquad /11/$$

Из /10/ следует, что соотношение Лакса, позволяющее получить дополнительные интегралы движения,

$$\frac{dL}{dt} = [L, M], \qquad /12/$$

имеет место, если выполняются матричные равенства

$$\frac{d\ell}{dt} = [\ell, m] - \{s, q\}, \qquad /13а/$$

$$\frac{dq}{dt} = [q, m] + \{s, \ell\}, \qquad /13б/$$

где $\{a, b\}$ - антикоммутатор матриц a, b.

Сравнивая /13а/ с /9/, найдем связь между функциями Q, S, W:

$$2Q(\xi)S(\xi) = W'(\xi). \qquad /14/$$

Вычисляя производную матрицы q и учитывая структуру q, s, ℓ, m /7/, /11/, получим, что /13б/ эквивалентно следующим уравнениям для Q, S, R:

$$[Q(\xi) - Q(\eta)]R'(\xi-\eta) + R(\xi-\eta)[S(\xi) + S(\eta)] = 0, \qquad /15а/$$

$$Q'(\xi) = 2S(\xi). \qquad /15б/$$

Исключая S из /14/, /15/, найдем, что условие изоспектральности матрицы L /12/ имеет место, если $Q(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$2[Q(\xi) - Q(\eta)]R'(\xi-\eta) + R(\xi-\eta)[Q'(\xi) + Q'(\eta)] = 0 \qquad /16/$$

и

$$W(\xi) = \frac{1}{2}Q^2(\xi) + \text{const}. \qquad /17/$$

Нетрудно найти решения /16/, принимая во внимание, что R - одна из функций /8/. Эти решения нетривиальны лишь в случае $R(\xi) = \frac{a}{\xi}$, $Q = \gamma\xi$ /при этом мы приходим к известной интегрируемой системе /4а// и

$$R(\xi) = \frac{a}{\xi}, \quad Q(\xi) = \gamma\xi^2 + \rho, \qquad /18/$$

$$R(\xi) = \frac{a}{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\xi}{2}}, \quad Q(\xi) = \gamma\,\mathrm{ch}(\beta\xi + \delta) + \rho,$$

где δ, ρ - произвольные постоянные. Согласно /12/, /17-18/ системы с гамильтонианом $H_0 + H_{int}$, определяемые наборами

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\xi^2}, \quad W(\xi) = \gamma\xi^4 + \delta\xi^2, \qquad /19/$$

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma\,\mathrm{ch}(2\beta + \delta),$$

имеют N независимых интегралов движения вида

$$I_k = \frac{1}{2k}\,\mathrm{Sp}(L^{2k}), \quad k = 1,\dots,N. \qquad /20/$$

Выполнение матричных равенств типа /9/, /13б/ указывает путь к построению еще одного класса N-частичных систем, обладающих парой Лакса. Действительно, из /9/, /13б/, /15/ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d\ell^2}{dt} = [\frac{\ell^2}{2}, m] - \frac{1}{2}\{\ell, w'\}, \qquad /21а/$$

$$\frac{dq}{dt} = [q, m] + \frac{1}{2}\{\ell, q'\}. \qquad /21б/$$

Складывая /21а/, /21б/, получим:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\ell^2}{2} + q) = [\frac{\ell^2}{2} + q, m] + \frac{1}{2}\{\ell, q' - w'\}.$$

Легко видеть, что при условии $W(\xi) = Q(\xi)$ пара матриц $\tilde{L} = \frac{\ell^2}{2} + q$, $\tilde{M} = m$ размером $N\times N$ удовлетворяет соотношению Лакса /12/, т.е. вследствие существования решения уравнения /16/ типа /18/ набор

$$V(\xi) = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}}, \quad W(\xi) = \gamma\,\mathrm{ch}(\beta\xi + \delta) \qquad /22/$$

также определяет N-частичную систему с гамильтонианом $H_0 + H_{int}$, обладающую N независимыми интегралами движения

$$I_k = \frac{1}{k}\,\mathrm{Sp}(\tilde{L}^k), \quad k = 1,\dots,N. \qquad /23/$$

Отметим, что система Адлера [5] /4б/ является частным случаем /22/ при $\delta \to +\infty$, $\gamma e^{\delta} \to \mathrm{const}$.

Поскольку при движении частиц в системах /19/, /22/ не возникает простых асимптотических состояний, исследование скобок Пуассона интегралов движения /20/, /23/ $\{I_j, I_k\}_P$ требует привлечения алгебраических методов /если эти величины обращаются в нуль, соответствующие динамические системы являются полностью интегрируемыми/. Это исследование будет проведено автором в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero F. Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p. 411.
2. Moser J. Adv.Math. 1975, 16, p. 197.
3. Переломов А.М. ЭЧАЯ, 1979, 10, с. 850.
4. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Meth.Phys., 1976, 1, p. 187.
5. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 195.
6. Иноземцев В.И. ОИЯИ, Р4-83-356, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1983 года.

Иноземцев В.И. Р4-83-418

О движении классических интегрируемых систем взаимодействующих частиц во внешнем поле

Методом изоспектральной деформации найдены новые классические системы с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i)\right) + \sum_{i>j}^{N} V(x_i - x_j) \quad (N \geq 2),$$

обладающие N независимыми интегралами движения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Inozemtsev V.I. P4-83-418

On Motion of Classical Integrable Systems of Interacting Particles in the External Field

New classical systems with a Hamiltonian of the form:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2} + W(x_i)\right) + \sum_{i>j}^{N} V(x_i - x_j) \quad (N \geq 2),$$

possessing N independent integrals of motion are found within the isospectral deformation method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой