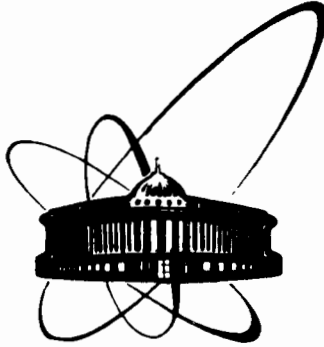


183-411



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

4595/83

29/IV-83

P4-83-411

В.Г.Картавенко

РЕШЕНИЯ СОЛИТОННОГО ТИПА  
В ЯДЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1983

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно вырос интерес к изучению нелинейных динамических явлений практически во всех областях современной физики. Во многом это связано с тем, что в последнее десятилетие был достигнут прогресс в развитии методов точного решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для которых фундаментальным является понятие солитона-частного решения типа импульсных уединенных волн, способных распространяться без изменения формы и энергии\*.

Интерес к изучению нелинейных динамических явлений в ядерных системах стимулируется бурным развитием физики тяжелых ионов. Описание процесса столкновения двух сложных ядер проводится в основном с помощью классических /гидродинамический подход<sup>3-4</sup>/ или квазиклассических /TDHF<sup>5-6</sup>/, динамическая теория Томаса-Ферми (DTFT)<sup>7</sup>/ методов. Появившиеся недавно первые работы, явно использующие в ядерной физике понятие солитона, можно условно разбить на две группы. В работах<sup>8-9</sup> солитон соответствовал распространению в ядерной материи локализованного возмущения плотности. В работах<sup>10-11</sup> понятие солитона было использовано для построения модели для ядерного потенциала и описания столкновения ядер как столкновения двух "потенциальных мешков". Указывалось на возможность существования в ядерной материи не только изоскалярных солитонов, но и солитонов других типов: спиновых, изоспиновых и спин-изоспиновых<sup>8</sup>. Была отмечена возможность возникновения солитоноподобных сгустков пионного поля<sup>12</sup>. Во всех этих работах применялись хорошо известные солитонные решения уравнений Кортевега-де Вриза /КдВ/ :  $\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0$ , или нелинейного кубического уравнения Шредингера (S3) :  $i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0$ , где индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

В данной работе мы покажем, как в квазиклассическом пределе уравнения ядерной гидродинамики с силами Скимма можно свести к нелинейному уравнению Шредингера вида  $i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi - G|\psi|^4\psi = 0$ ,  $G > 0$ , которое наряду с упоминавшимися выше подходами мо-

---

\* Популярное введение в теорию солитонов можно найти, например, в коллективной монографии<sup>1</sup>. Более полное определение солитона и ссылки на важнейшие работы последних лет можно найти в недавно вышедшем обзоре<sup>2</sup>.

жет быть использовано для анализа статистических и динамических явлений физики тяжелых ионов. Будут рассмотрены основные свойства одномерных и сферически-симметричных солитонных решений и показано, что они описывают свойства ядерной плотности в основном состоянии гораздо лучше, чем солитоны КдВ или  $S\bar{S}^{10-11}$ . Кроме того, на основе этого уравнения можно описывать солитоны обоих типов: движение ядра как целого и распространение возмущений в ядерной материи.

## 2. ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЙ ЯДЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ К НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА

Напомним кратко схему квантовогидродинамического подхода, используемого нами для описания явлений релаксации в реакциях с тяжелыми ионами<sup>13-15</sup>.

Гамильтониан системы нуклонов с двухчастичным взаимодействием  $V(\vec{x})$  можно следующим образом записать в терминах коллективных операторов плотности  $\rho(\vec{x})$  тока  $j_k(\vec{x})$ <sup>13,16</sup>:

$$H \equiv \frac{m}{2} \int d\vec{x} j^2(\vec{x}) - \frac{1}{\rho(\vec{x})} j^2(\vec{x}) + \frac{\hbar^2}{8m} \int d\vec{x} \frac{|\vec{\nabla}\rho(\vec{x})|^2}{\rho(\vec{x})} + \mathcal{E}[\rho], \quad /1/$$

$$\mathcal{E}[\rho] \equiv \int d\vec{x} d\vec{y} \rho(\vec{x}) V(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}),$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям:

$$[\rho(\vec{x}), j_k(\vec{y})] = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{x})), \quad /2/$$

$$[j_k(\vec{x}), j_l(\vec{y})] = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta(\vec{x} - \vec{y}) j_l(\vec{x})) + i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} (\delta(\vec{x} - \vec{y}) j_k(\vec{y})).$$

Гамильтониан /1/ эквивалентен обычному гамильтониану ядра с точки зрения уравнений движения для операторов  $\rho$  и  $j_k$ :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\rho, H], \quad i\hbar \frac{\partial j_k}{\partial t} = [j_k, H]. \quad /3/$$

Ограничиваясь в дальнейшем анализом чисто колебательного движения /то есть полагая движение ядерного поля безвихревым/, удобно ввести оператор потенциала скорости  $\phi(\vec{x})$ :

$$j_k(\vec{x}) \equiv \frac{1}{2} \{ \rho(\vec{x}), \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(\vec{x}) \}_+ . \quad /4/$$

Операторы  $\rho$  и  $\phi$  связаны каноническими коммутационными соотношениями, следующими из /2/ и /4/:

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\rho(\vec{x}), \rho(\vec{y})] = 0, \quad /5/$$

$$[\rho(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = i \frac{\hbar}{m} \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Построить в общем виде решение нелинейных операторных уравнений движения /3/, пригодное для описания ядро-ядерных столкновений, в настоящее время невозможно. Решение линеаризованных по оператору  $\phi$  и оператору отклонения плотности от равновесной  $\delta\rho \equiv \rho - \rho_0$  уравнений /3/ тоже представляет собой достаточно сложную задачу<sup>13,15,17</sup>. Поэтому рассмотрим квазиклассический предел уравнений движения /3/ для  $\rho$  и  $\phi$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \phi) = 0, \quad /6/$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi|^2 - \frac{\hbar^2}{4m^2} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{2\rho^2} \right) + \frac{1}{m} \left( \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \rho} - \lambda \right) = 0.$$

Система /6/ имеет интегралы движения: число частиц  $A = \int \rho dx$ , импульс системы  $\vec{P} = m \int \rho \vec{\nabla} \phi dx$  и энергию

$$E = \frac{m}{2} \int d\vec{x} \rho |\vec{\nabla} \phi|^2 + \frac{\hbar^2}{8m} \int d\vec{x} \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{\rho} + \mathcal{E}[\rho].$$

В статистическом случае уравнения /6/ сводятся к обычному уравнению Томаса-Ферми для плотности ядра в основном состоянии. При соответствующем выборе начальных и граничных условий система уравнений /6/ может быть использована для анализа процесса столкновения тяжелых ионов с ядрами.

Легко видеть, что система уравнений /6/ может быть переписана в форме одного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - \left( \frac{\delta \mathcal{E}(|u|^2)}{\delta |u|^2} - \lambda \right) u = 0 \quad /7a/$$

для комплексной функции  $u(\vec{x}, t) = \rho^{1/2}(\vec{x}, t) \exp(i m \phi(\vec{x}, t) / \hbar)$ . Выберем функционал взаимодействия в виде сил Скирма<sup>18</sup>:

$$\mathcal{E}[\rho] = -\frac{3}{8} |t_0| \int d\vec{x} \rho^2(\vec{x}) + \frac{t_3}{16} \int d\vec{x} \rho^3(\vec{x}).$$

Такие простейшие, зависящие от плотности, эффективные силы с успехом применяются в расчетах по методу Хартри-Фока для описания свойств ядер в основном состоянии /19/ и различных динамических расчетах /5-7/. При таком выборе взаимодействия уравнение /7а/ может быть переписано следующим образом:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \frac{3}{4} |t_0| |u|^2 u - \frac{3}{16} t_3 |u|^4 u + \lambda u = 0. \quad /7б/$$

Отметим сам факт, что уравнения безвихревой ядерной гидродинамики можно записать в виде нелинейного уравнения Шредингера. Такие уравнения с различными типами нелинейности с успехом используются при анализе самых различных нелинейных явлений /1,2/. Например, релятивистский вариант уравнения /7б/ соответствует нелинейной теории поля:  $\square\psi = k^2\psi - \mu^2|\psi|^2\psi + \lambda|\psi|^4\psi$ , изучавшейся в работах /20,21/. Нелинейность типа /7б/ встречалась при исследовании нелинейного затухания Ландау для плазменных волн /22/. Несмотря на упомянутые работы /более подробные ссылки можно найти в обзорах /2/ /, уравнение типа /7б/ изучено пока очень плохо. Поэтому кроме конкретного приложения этих уравнений к задачам ядерной физики представляет интерес дальнейшее изучение свойств решений таких уравнений.

### 3. СВОЙСТВА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ

#### А. Общие соотношения

Рассмотрим свойства солитонных решений уравнения /7б/. Такие уединенные волны обычно ищутся в виде

$$u(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x} - \vec{v}t - \vec{x}_0) \exp\left(i \frac{\omega - m\vec{v}^2/2 + \lambda}{\hbar} + i \frac{m\vec{v}\vec{x}}{\hbar} + \sigma_0\right),$$

где параметры  $\vec{x}_0, \sigma_0, \vec{v}, \omega$  определяются начальным положением центра волны ( $\vec{x}_0$ ), начальным сдвигом фазы ( $\sigma_0$ ), импульсом и энергией волны.  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - \omega \Psi + \frac{3|t_0|}{4} \Psi^3 - \frac{3}{16} t_3 \Psi^5 = 0 \quad /8а/$$

и граничным условиям  $\Psi(\infty) = \Psi_R(\infty) = \Psi_R(0) = 0$ , где дифференцирование производится по переменной  $\vec{R} = \vec{x} - \vec{v}t - \vec{x}_0$ . Приведем уравнение /8а/ для удобства к безразмерному виду с помощью подстановок:

$$\vec{x}' \equiv \sqrt{\frac{6mt_0^2 B}{\hbar^2 t_3}} (\vec{x} - \vec{v}t - \vec{x}_0), \quad /9/$$

$$\Psi \equiv \sqrt{\frac{4|t_0|B}{t_3}} \tilde{\Psi}, \quad B \equiv \frac{\omega t_3}{3t_0^2},$$

тогда

$$\Delta_{\vec{x}'} \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}^3 + B \tilde{\Psi}^5. \quad /8б/$$

Для одномерных и сферически-симметричных решений это уравнение осуществляет экстремум действия с лагранжианом:

$$\tilde{\mathcal{L}} = T + I_2/2 - I_4/4 + B I_6/6, \quad /10/$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx' x'^{N-1} \tilde{\Psi}_x'^2, \quad I_n = \int_0^\infty dx' x'^{N-1} \tilde{\Psi}^n,$$

где  $N$  - размерность пространства. Между функционалами  $T(B)$ ,  $I_n(B)$  существуют две связи. Умножим уравнение /8б/ на  $\tilde{\Psi} x'^{N-1}$  и проинтегрируем по  $x'$  от нуля до бесконечности. С учетом граничных условий получим

$$2T + I_2 - I_4 + B I_6 = 0. \quad /11/$$

Второе соотношение получим с помощью масштабного преобразования /23/:

$$x'' = \Lambda x', \quad \tilde{\Psi}^{(\Lambda)} = \tilde{\Psi}(\Lambda x'),$$

при котором  $T^{(\Lambda)} = \Lambda^{N-2} T$ ,  $I_n^{(\Lambda)} = \Lambda^N I_n$ , и вариационного принципа:  $(d\tilde{\mathcal{L}}^{(\Lambda)}/d\Lambda)_{\Lambda=1} = 0$ . В результате имеем теорему вириала:

$$(N-2)T + N(I_2/2 - I_4/4 + B I_6/6) = 0. \quad /12/$$

Исключая из /11/, /12/ функционал  $T$ , получим следующие точные соотношения:

$$I_4 = 4 I_2 \quad (N=3), \quad /13/$$

$$B I_6 = 9 I_4/8 - 3 I_2/2 \quad (N=1).$$

Соотношения /11/-/13/ облегчают расчет наблюдаемых физических величин. В частности, в выражении для энергии на частицу

$$\frac{\tilde{H}}{A} = \frac{H - \lambda A}{A} = \frac{mv^2}{2} - \lambda + \frac{3t_0^2 B}{t_3 I_2} \left( 2T - \frac{I_4}{2} + \frac{BI_6}{3} \right).$$

С помощью /11/ можно исключить градиентные члены:

$$\frac{\tilde{H}}{A} = \frac{mv^2}{2} - \lambda + \frac{3t_0^2}{t_3} B \left( -1 + \frac{I_4}{2I_2} - \frac{2}{3} B \frac{I_6}{I_2} \right).$$

Дальнейшее упрощение достигается с помощью соотношений /13/:

$$\frac{\tilde{H}}{A} = \frac{mv^2}{2} - \lambda + \frac{3t_0^2}{t_3} B \left( 1 - \frac{2BI_6}{3I_2} \right) \quad (N=3), \quad /14/$$

$$\frac{H}{A} = \frac{mv^2}{2} - \lambda - \frac{3t_0^2 BI_4}{4t_3 I_2} \quad (N=1).$$

Выражение для импульса на частицу:

$$\vec{P}/A = m\vec{v}. \quad /15/$$

Число нуклонов (N=3):

$$\Lambda = \frac{16\pi\hbar^3 t_2^{1/2}}{(6m)^{3/2} t_0^2} \cdot \frac{I_p(B)}{\sqrt{B}}. \quad /16a/$$

### Б. Одномерные решения

В одномерном случае уравнения /8/ имеют аналитические одно-солитонные решения\* :

$$\tilde{\Psi}(x') = 2(1 + \sqrt{1 - B/B_0} \operatorname{ch} 2x')^{-1/2}, \quad B_0 \equiv 3/16, \quad /17/$$

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{16\omega}{3|t_0|}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{16t_3\omega}{3t_0^2}} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{8m\omega}{\hbar^2}} (x - vt - x_0) \right) \right)^{-1/2}.$$

При  $B \rightarrow 0$  решение  $\tilde{\Psi}$  переходит в известное решение кубического уравнения Шредингера  $\sqrt{2} \operatorname{sech}(x')$ .

Аналитическая форма решения /17/ позволяет получить в явном виде выражения для "числа частиц"<sup>/24/</sup>:

\* Аналогичное решение получено также В.Г.Маханьковым.

$$\tilde{Q} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \sqrt{\frac{8\hbar^2}{mt_3}} \operatorname{Arth} \left( \sqrt{\frac{B}{B_0}} \right), \quad /16b/$$

и энергии на частицу:

$$\frac{\tilde{H}}{\tilde{Q}} = \frac{mv^2}{2} - \lambda - \frac{9t_0^2}{16t_3} \left( 1 - \frac{\sqrt{B/B_0}}{\operatorname{Arth}(\sqrt{B/B_0})} \right). \quad /18/$$

Одномерное решение /17/ описывает так называемый "слой", используемый в одномерных расчетах по методам TDHF<sup>/5,6,24/</sup> и DTFT<sup>/7/</sup>, когда столкновение двух ядер моделируется столкновением двух "слоев". Число нуклонов A связано следующим приближенным соотношением с  $\tilde{Q}$ :  $A \approx \tilde{Q}^3 \pi / 6\rho_0^2$ , где  $\rho_0$  - плотность ядерной материи.

Существование аналитического решения /17/ значительно упрощает динамические расчеты, так как начальные условия можно задавать аналитически, а не решать численно уравнение Томаса-Ферми. В приложении показано, как связать полученное нами аналитическое решение /17/ со статистическими решениями уравнений DTFT, которые решались численно.

### В. Сферически-симметричные решения

Из теории нелинейных дифференциальных уравнений известно, что переход от одномерной задачи к случаю большего числа измерений может кардинально изменить свойства решений. Не исключением является и уравнение /8/. Выпишем это уравнение для сферической симметрии:

$$\tilde{\Psi}_{x'x'} + 2\tilde{\Psi}_{x'x'} / x' = \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}^3 + B\tilde{\Psi}^5. \quad /8в/$$

Рассмотрим это уравнение на фазовой плоскости  $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}_{x'})$ . Для этого удобно отождествить  $x'$  со "временем", а /8в/ рассматривать как уравнение движения эффективной "частицы" под действием консервативных "сил":  $F(\tilde{\Psi}) = -d\tilde{V}/d\tilde{\Psi}$ , и "сил трения"  $-2\tilde{\Psi}_{x'x'}/x'$ . "Потенциал"  $\tilde{V} = \tilde{\Psi}^2/2 + \tilde{\Psi}^4/4 - B\tilde{\Psi}^6/6$  имеет минимум в точках:

$$\tilde{\Psi} = \pm A_1 \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4B}}{2B}},$$

и максимум при  $\tilde{\Psi} = 0$  и  $\tilde{\Psi} = \pm A_2 = \pm \sqrt{(1 + \sqrt{1 - 4B})/2B}$ . "Потенциал"  $\tilde{V}$  обращается в нуль в точках:

$$\tilde{\Psi} = 0, \quad \tilde{\Psi} = \pm P_1 \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 16B/3}}{(4B/3)}}.$$

$$\Psi = \pm P_2 \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 16B/3}}{(4B/3)}}.$$

Картина фазовых траекторий для уравнения /8в/ качественно такая же, как в случае кубической нелинейности ( $B=0$ )<sup>/25/</sup> или в случае с насыщением нелинейности /"силы"  $F(\tilde{\Psi}) = \tilde{\Psi}^3/(1 + \tilde{\Psi}^2)$ <sup>/26/</sup>. При  $B < B_0$  любая траектория, начинающаяся на оси ( $\Psi_{x'} = 0$ ) при  $x' \rightarrow \infty$ , оканчивается в одной из трех точек:  $(0, 0)$  или в "яме"  $(\pm A_1, 0)$ . Путем постепенного изменения начальной амплитуды  $\tilde{\Psi}(0)$  можно получить счетное множество солитонных траекторий, начинающихся на оси  $\Psi_{x'} = 0$  и оканчивающихся при  $x' \rightarrow \infty$  в нуле. Каждой такой траектории соответствует строго определенное начальное значение амплитуды  $\tilde{\Psi}_c(0)$ . Сколько угодно малое отклонение  $\tilde{\Psi}(0)$  от  $\tilde{\Psi}_c(0)$  приводит к тому, что при  $x' \rightarrow \infty$  траектории будут оканчиваться не в нуле, а в одной из "ям". Область существования солитонных решений  $B < B = 3/16$ , причем  $P_1(B) < \tilde{\Psi}_c(0) < A_2(B)$ . Примеры фазовых траекторий для уравнения типа /8в/ можно найти в работе<sup>/20/</sup>.

На рис.1 приведены результаты численного интегрирования уравнения /8в/ для безузловых солитонных решений. Видно, что в этом случае амплитуды  $\tilde{\Psi}_c(0)$  лежат в достаточно узкой области:  $2 \leq \tilde{\Psi}_c(0) \leq 4,337$ . Как и в одномерном случае, переход  $B \rightarrow B_0$  соответствует переходу к ядерной материи. Мы подробно его рассмотрим в следующем разделе.

На рис.2 приведены результаты расчета функции  $I_2/\sqrt{B}$ , определяющей посредством соотношения /16а/ зависимость числа нуклонов /А/ от параметра В. Видна очень резкая зависимость А(В). Причем область от тяжелых ионов /А > 10/ до любых существующих ядер лежит в пределах  $0,17 > B > 0,11$ .

При  $B > 0,1$  можно построить приближенное аналитическое описание точных солитонных решений уравнения /8в/. Для этого выберем пробную функцию в виде

$$\tilde{\Psi}_{SF}(x') = \tilde{\Psi}(0) \sqrt{\frac{\text{sh}(\bar{R}/\bar{a})}{\text{ch}(\bar{R}/\bar{a}) + \text{ch}(x'/\bar{a})}}. \quad /19/$$

Такая функциональная зависимость была выбрана по аналогии с аналитическим односолитонным решением /17/ одномерной задачи и удовлетворяет необходимым граничным условиям. Кроме того, так как

$$\rho(x) = \Psi^2(x) = \frac{4|t_0|}{t_3} B \tilde{\Psi}^2(x'),$$

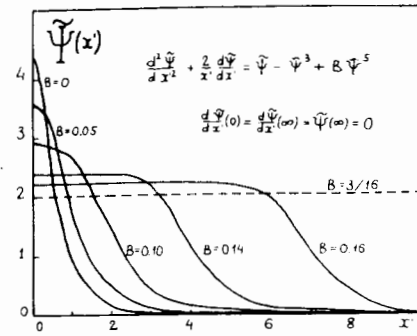


Рис.1. Безузловые сферически-симметричные солитонные решения.

то в этом случае  $\rho(x)$  совпадает по форме с так называемым симметризованным распределением Ферми<sup>/27/</sup> ( $\rho_{SF}$ ).  $\rho_{SF}$  по всем основным свойствам близко к обычному распределению Ферми  $\rho_F$ :  $\bar{R}$  определяет полуспад плотности,  $\bar{a}$  - ширину поверхностного

слоя. На больших расстояниях  $\rho_{SF}$  убывает в соответствии с правильным экспоненциальным законом. Кроме того,  $\rho_{SF}$  обладает по крайней мере двумя преимуществами по сравнению с  $\rho_F$ : 1/ важнейшие интегралы от  $\rho_{SF}$  /нормировка, среднеквадратичный радиус, фурье-преобразование/ вычисляются аналитически; 2/ в начале координат  $\rho_{SF}$  имеет нулевую производную. Последнее обстоятельство необходимо для того, чтобы приближенное решение /19/ удовлетворяло требованиям трансляционной инвариантности.

Приведем явные выражения для необходимых интегралов:

$$I_2 = \tilde{\Psi}^2(0) \frac{\bar{R}^3}{3} \left( 1 + \frac{\pi^2 \bar{a}^2}{\bar{R}^2} \right),$$

$$\frac{I_4}{I_2} = \tilde{\Psi}^2(0) \left[ \text{cth} \left( \frac{\bar{R}}{\bar{a}} \right) - \frac{\bar{a}}{\bar{R}} \left( 1 + \frac{2}{1 + \pi^2 \bar{a}^2 / \bar{R}^2} \right) \right], \quad /20/$$

$$\frac{I_6}{I_2} = \frac{\tilde{\Psi}^4(0)}{2} \left[ 3 \left( \text{cth} \left( \frac{\bar{R}}{\bar{a}} \right) - \frac{\bar{a}}{\bar{R}} \right) \left( \text{cth} \left( \frac{\bar{R}}{\bar{a}} \right) - \frac{2(\bar{a}/\bar{R})}{1 + \pi^2 \bar{a}^2 / \bar{R}^2} \right) - 1 \right],$$

$$\frac{I_{RR}}{I_2} = \frac{3\bar{R}^2}{5} \left( 1 + 7\pi^2 \bar{a}^2 / 3\bar{R}^2 \right), \quad I_{RR} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' x'^4 \tilde{\Psi}^2(x').$$

Сравнение результатов прямого численного интегрирования /8в/ и аппроксимации /19/ показало, что они практически совпадают при  $B \geq 0,1$ . Этого вполне достаточно для всех реальных ядер, так как при этом  $A \geq 6$  /см. рис.2/.

Таким образом, популярное феноменологическое выражение для плотности  $\rho_{SF}$  можно рассматривать как решение уравнения Томаса-Ферми с силами Скирма.

Полученные решения уравнений /8/ находятся в соответствии с результатами расчетов по методу Хартри-Фока и хорошо воспроиз-

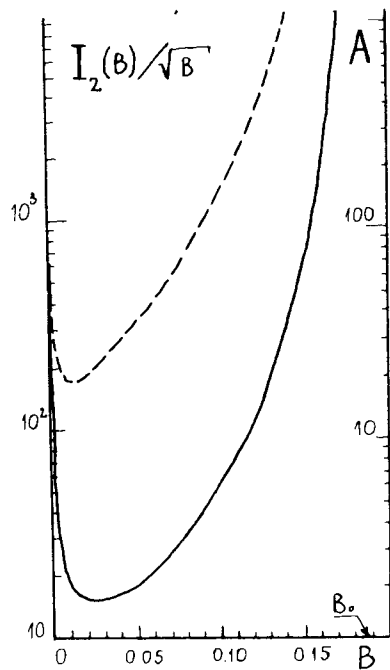


Рис.2. Зависимость безразмерной нормировки  $I_2/\sqrt{B}$  от параметра  $B$ :  $A$  - соответствующее число нуклонов системы; - - безузловые, ---- - одноузловые решения.

водят основные свойства ядерной плотности. В частности, из рис.1 видно, что плотность в центре ядра постепенно падает при переходе от легких ядер к более тяжелым. Для средних и тяжелых ядер существуют область постоянной плотности и поверхностный слой. Диффузность слоя  $a = \sqrt{\hbar^2 t_3 / 6 m t_0^2} B$ .  $a(B)$  примерно постоянна. При выбранных параметрах сил Скирма /см. приложение/  $a \approx 0,4$  Фм.

Для анализа среднеквадратичных радиусов ядер полезно составить выражение

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\langle r^2 \rangle^{1/2}}{A^{1/3}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{t_3}{16\pi t_0}\right)^{1/3} \frac{I_{RR}^{1/2}}{B^{1/2} I_2^{5/6}} \quad /21a/$$

Наиболее наглядно оно при  $B \geq 0,1$ , когда хорошо работает приближение /19/, /20/:

$$\bar{r}_0 = \left(\frac{3}{4\pi\rho(0)}\right)^{1/3} \frac{(1 + 7\pi^2 \bar{a}^2 / 3 \bar{R}^2)^{1/2}}{(1 + \pi^2 \bar{a}^2 / \bar{R}^2)^{1/3}} \quad /21б/$$

Проведенный на основе /21/ расчет радиусов показал, что зависимость радиуса от массового числа передается правильно ( $\sim A^{1/3}$ ), хотя рассчитанные величины радиусов немного меньше экспериментальных.

Отметим, что построенное описание свойств ядерной плотности на основе решений уравнений /7/, /8/ гораздо лучше, чем описание, основанное на решениях уравнений КдВ или  $S3^{10,11}$ , когда  $\rho(x) \sim \text{sech}(x')$ . Это указывает на важность учета высших по сравнению с  $S3$  членов нелинейности [ $B \neq 0$ ].

### Г. Предел ядерной материи

В одномерном случае и в случае сферической симметрии переход к ядерной материи происходит при  $B \rightarrow B_0 = 3/16$ . В этом пределе

$$\lim_{B \rightarrow B_0} \tilde{\Psi}(x') = 2; \quad \lim_{B \rightarrow B_0} (T/I_2) = 0; \quad \lim_{B \rightarrow B_0} (I_n/I_2) = 2^{n-2},$$

$$\lim_{B \rightarrow B_0} \rho(x) = \frac{3|t_0|}{t_3} \equiv \rho_0, \quad \lim_{B \rightarrow B_0} \bar{r}_0 = \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3}, \quad /22/$$

$$\lim_{B \rightarrow B_0} \left(\frac{\tilde{H}}{A}\right)|_{v=0} = -\lambda - \frac{9t_0^2}{16t_3} \equiv E_F(\rho_0).$$

Выбранным параметрам сил Скирма /см. приложение/ соответствуют следующие величины:  $\rho_0 \approx 0,15$  Фм<sup>-3</sup>,  $E_F(\rho_0) \approx -16$  МэВ,  $\bar{r}_0 \approx 1,17$  Фм.

### Д. Устойчивость солитонных решений

Рассмотрим кратко вопрос об устойчивости солитонных решений уравнения /8/ \*. Для анализа устойчивости используем Q-теорему /2,21,26/, которая для нашей задачи формулируется так: солитонные безузловые решения устойчивы, когда  $dA/d\omega > 0$ . В одномерном случае вычисление производной можно провести аналитически, и  $dA/d\omega > 0$  при  $\omega < 3t_0^2/16t_3$  или  $B < B_0$ , то есть условие устойчивости в одномерном случае совпадает с условием существования солитонного решения.

В трехмерном случае

$$\frac{dA}{d\omega} > 0 \quad \text{при} \quad \frac{d}{dB} \left( \frac{I_2(B)}{\sqrt{B}} \right) > 0.$$

Из рис.2 видно, что условие устойчивости выполняется при  $B > 0,025$  /или  $A > 1,7$ /, то есть для всех ядер. Отметим, что при  $B=0$  решение неустойчиво. В теории плазмы это соответствует коллапсу ленгмюровских волн /2,22/ или нестабильности частицеподобных решений в нелинейной теории поля типа  $\Psi^4$  /см. ссылки

\*Один из важнейших в теории солитонов вопрос - вопрос об устойчивости /1,2,20-23,25,26/ - будет рассмотрен детально в следующей работе.

в работах /2,20,21/. В случае атомного ядра  $V = 0$  означает отсутствие отталкивания /  $t_3 = 0$  /, поэтому оставшееся притяжение приводит к "схлопыванию" / коллапсу / ядра.

Можно также показать, что полученные нами ранее уравнения для описания колебаний ядерной плотности /13,15/ непосредственно связаны с условиями устойчивости солитона. Устойчивость сферически-симметричных решений уравнения /8/ означает вещественность спектра частот колебаний сферического ядра с диффузной границей. Эту интересную задачу мы планируем рассмотреть в следующих работах.

#### Е. Узловые решения

Кроме безузловых решений, рассмотренных в предыдущих разделах, уравнение /8/ может иметь решения с узлами.

Рассмотрим одномерный случай. Умножим обе части уравнения /8б/ на  $\Psi_x'$  и один раз проинтегрируем:

$$\tilde{\Psi}_x' = \pm \sqrt{2(\tilde{E} - \tilde{V}(\tilde{\Psi}))} = \pm \sqrt{2\tilde{E} + \tilde{\Psi}^2 - \tilde{\Psi}^4/2 + B\tilde{\Psi}^6/3},$$

где константа интегрирования  $\tilde{E}$  имеет смысл "энергии", а  $\tilde{V}$  - "потенциал", введенный ранее в разделе В. Подстановкой  $z = \tilde{\Psi}^2$  это уравнение приводится к виду

$$z_x' = \pm 2\sqrt{z(2\tilde{E} + z - z^2/2 + Bz^3/3)}.$$

Так как подкоренное выражение - полином четвертой степени, то это уравнение может, в принципе, быть проинтегрировано в эллиптических функциях. Явный вид решения определяется величинами  $B$  и  $\tilde{E}$ . Односолитонное решение /17/ соответствует сепаратрисе:  $\tilde{E} = 0$ ,  $z_x'(\infty) = z(\infty) = z_x'(0) = 0$ . Среди других решений с  $\tilde{E} \neq 0$  будут частные решения, являющиеся аналогом хорошо известных "кноидальных" волн уравнения КдВ /1/. Для атомного ядра они будут иметь смысл нелинейных периодических колебаний в ядерной материи.

Для сферической симметрии такие периодические решения отсутствуют. Зато есть солитонные решения, имеющие узлы. На рис.3 показан пример такого одноузлового решения. На рис.2 есть график соответствия  $A(B)$  для одноузловых решений. Следует отметить, что одноузловые решения могут появиться при некотором минимальном числе нуклонов. При использованном выборе параметров сил Сфирма это  $A > 29$  /рис.2/. На рис.3 для ядра с  $A \sim 130$  показано нижайшее безузловое решение /основное состояние ядра/ и первое узловое решение. Физический смысл такого решения - изомер плотности. Наши расчеты показали, что это состояние имеет очень большую энергию возбуждения:  $E^* \approx 1700$  МэВ. Вопрос о стабильности такого решения требует специального исследования, так как в этом случае Q-теорема неприменима.

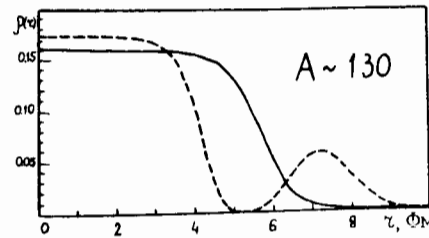


Рис.3. Пример сферически-симметричной ядерной плотности в основном /-/ и одноузловом изомерном состояниях /---/.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Просуммируем кратко полученные результаты. На первый взгляд, тривиальный результат, что уравнения ядерной гидродинамики можно переписать в виде нелинейного уравнения Шредингера, дал возможность использовать методы теории солитонов для анализа частных решений уравнений нелинейной гидродинамики.

Учет высших по сравнению с  $S^3$  членов нелинейности позволил построить реалистическое описание свойств ядерной плотности в основном состоянии. Развитое аналитическое описание таких решений значительно облегчает численные расчеты и способствует лучшему пониманию результатов таких расчетов. В сферически-симметричном случае показано, что результат прямого численного интегрирования для безузловых солитонных решений практически совпадает с феноменологическим симметризованным распределением Ферми  $\rho_{SF}$ . Это означает, что  $\rho_{SF}$  можно рассматривать как решение дифференциального нелинейного уравнения типа уравнения Томаса-Ферми с силами Сфирма.

Кратко исследована область стабильности полученных решений. Указано на возможность существования узловых сферически-симметричных солитонных решений типа изомеров плотности.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.Г.Маханькова и И.В.Барашенкова за многочисленные плодотворные дискуссии.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе Хольцварта по DTFT<sup>/7/</sup> использовался гамильтониан

$$H = \frac{\hbar^2}{10m} \left( \frac{3\pi^2\rho_0}{2} \right)^{2/3} \int d\vec{x} \rho \left( 2 + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) + \frac{\hbar^2}{8m} \int d\vec{x} \frac{|\vec{\nabla}\rho|^2}{\rho} + \frac{3}{8} \bar{t}_0 \int d\vec{x} \rho^2 + \frac{\bar{t}_3}{16} \int d\vec{x} \rho^3. \quad /п.1/$$



Параметры сил Скирма (SK-VI):  $\bar{t}_0 = -1100 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^{+3}$ ,  $\bar{t}_3 = 17000 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^{+6}$ . Гидродинамическое выражение для гамильтониана /1/, /8/, используемое в нашей работе, отличается от /П.1/ выражением для кинетической энергии.

Для статистического одномерного "слоя" уравнения /6/ полностью соответствуют уравнениям, полученным Хольцвартом:

$$\begin{cases} \delta H / \delta \rho = E(\rho), & /П.2/ \\ \rho_{xx} = \rho_x^2 / 2\rho + \rho(a + \beta\rho + \gamma\rho^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4}{5} \left( \frac{3\pi^2 \rho_0}{2} \right)^{2/3} + \frac{4m|E_F|}{\hbar^2}, & \beta = -3 \frac{m|\bar{t}_0|}{\hbar^2}, & /П.3/ \\ \gamma = \frac{3m\bar{t}_3}{4\hbar^2} + \frac{5}{6} \left( \frac{3\pi^2}{2\rho_0^2} \right)^{2/3}. \end{cases}$$

Для ядерной материи ( $\rho(x) = \rho_0 = 0,15 \text{ Фм}^{-3}$ ) уравнение /П.2/ фиксирует связь между плотностью ядерной материи и энергией Ферми  $E_F(\rho_0)$ . Для конечных ядер уравнения /П.2/ решались численно с граничными условиями:  $\rho(\infty) = \rho_x(\infty) = \rho_x(0) = 0$ .

Легко видеть, что эти условия полностью совпадают с граничными условиями солитонных решений. Простой подстановкой можно убедиться, что /П.2/ в этом случае имеет аналитическое решение вида /17/:

$$\rho(x) = \frac{4\alpha}{|\beta|} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{16\gamma\alpha}{3\beta^2} \text{ch}(\sqrt{2\alpha}x)} \right)^{-1}, \quad /П.4/$$

причем можно получить следующие соотношения:

$$\rho_0 = \frac{4\alpha}{|\beta|} = \frac{3|\bar{t}_0|}{t_3} = 0,15 \text{ Фм}^{-3}, \quad t_0 = \bar{t}_0,$$

$$t_3 = \bar{t}_3 + \frac{16\hbar^2}{10m\rho_0^2} \left( \frac{3\pi^2 \rho_0}{2} \right)^{2/3} = -22000 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^{+6}, \quad /П.5/$$

$$\lambda = -\frac{\hbar^2}{5m} \left( \frac{3\pi^2 \rho_0}{2} \right)^{2/3} = -14 \text{ МэВ},$$

$$E_F(\rho_0) = -\lambda - \frac{9t_0^2}{16t_3} = -16 \text{ МэВ}.$$

Эти величины и использовались в нашей работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны в действии /под ред. К.Лонгрена, Э.Скотта/. "Мир", М., 1981.
2. Маханьков В.Г. ЭЧАЯ, 1983, 14, с. 123; Phys.Reports, 1978, 35, p. 1.
3. Nix J.R. Prog.Part.Nucl.Phys., 1979, 2, p. 237.
4. Stöcker H. et al. Prog.Part.Nucl.Phys., 1980, 4, p. 133.
5. Davies K.T.R. et al. Preprint MAP-23, Oak Ridge, 1982.
6. Negele J.W. Rev.Mod.Phys., 1982, 54, p. 913.
7. Holzwarth G. Phys.Lett., 1977, 66B, p. 29.
8. Курилкин Н.Н., Мишустин И.Н., Ходель В.А. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, с. 463; ЯФ, 1980, 32, с. 1249.
9. Fowler G.N. et al. Phys.Lett., 1982, 115B, p. 286.
10. Gridnev K.A., Hefter E.E. Phys.Lett., 1980, 77A, p. 490.
11. Hefter E.F. Proc. 14 Summer School, Micolajki, Poland, 1981, p. 104.
12. Курилкин Н.Н., Мишустин И.Н., Ходель В.А. ЯФ, 1982, 36, с. 95.
13. Джолос Р.В., Картавенко В.Г., Пермяков В.П. ЯФ, 1981, 34, с. 1444.
14. Джолос Р.В., Иванова С.П., Картавенко В.Г. Изв. АН СССР, сер.физ., 1981, 45, с. 1927.
15. Картавенко В.Г. ОИЯИ, Е4-82-554, Дубна, 1982.
16. Dashen R.F., Sharp D.H. Phys.Rev., 1968, 165, p. 1857.
17. Румянцев Б.А. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 114; Препринт ИЯФ, 77-19, Новосибирск, 1977.
18. Skyrme T.H.R. Nucl.Phys., 1959, 9, p. 615.
19. Quentin P., Flocard H. Ann.Rev.Nucl.Sci., 1978, 28, p. 523.
20. Anderson D.L.T. J.Math.Phys., 1971, 12, p. 945.
21. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p. 2739; Nucl.Phys., 1976, B115, p. 1; Nucl.Phys., 1976, B115, p. 32.
22. Веряев А.А., Цытович В.И. Изв. вузов, Радиофизика, 1977, 20, с. 1634.
23. Маханьков В.Г., Катъшев Ю.В. ОИЯИ, P2-1047, Дубна, 1977.
24. Bonche P., Koonin S., Negele J.W. Phys.Rev., 1976, C13, p. 1226.
25. Янкаускас З.К. Изв. вузов, Радиофизика, 1966, 9, с. 412.
26. Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Изв. вузов, Радиофизика, 1973, 26, с. 1020.
27. Елдышев Ю.Н., Лукьянов В.К., Поль Ю.С. ЯФ, 1972, 16, с. 506.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 июня 1983 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,  
если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
Д1,2-12036	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12450	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д4-80-271	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-385	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	4 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Картавенко В.Г. P4-83-411  
Решения солитонного типа в ядерной гидродинамике

Показано, что в квазиклассическом пределе уравнения ядерной гидродинамики с силами Скимры можно свести к нелинейному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - \frac{3}{4} t_0 |u|^2 u - \frac{3}{16} t_3 |u|^4 u + \lambda u = 0,$$

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv |u(\vec{x}, t)|^2, \quad \phi(\vec{x}, t) \equiv (\hbar/m) \arg u(\vec{x}, t),$$

которое может быть использовано для анализа статических и динамических явлений физики тяжелых ионов. Рассмотрены основные свойства одномерных и сферически-симметричных солитонных решений и показано, что они хорошо описывают свойства ядерной плотности в основном состоянии. Исследована стабильность солитонных решений. Указано на возможность существования сферически-симметричных узловых изомерных состояний ядерной плотности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kartavenko V.G. P4-83-411  
Soliton Type Solution in Nuclear Hydrodynamics

It is shown that equations of nuclear hydrodynamics with the Skyrme forces can be reduced in the quasiclassical limit to the nonlinear Schrödinger equation:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u - \frac{3}{4} t_0 |u|^2 u - \frac{3}{16} t_3 |u|^4 u + \lambda u = 0,$$

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv |u(\vec{x}, t)|^2, \quad \phi(\vec{x}, t) \equiv (\hbar/m) \arg u(\vec{x}, t),$$

which can be used for analysing statical and dynamical phenomena of heavy ion reactions. The main features of one-dimensional and spherical symmetric soliton solutions are analysed, and are shown to describe well the properties of a nuclear density in the ground state. The stability of the soliton solutions is briefly investigated. It is pointed that spherical symmetric nodal isomer states of a nuclear density may exist.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой