объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-83-356

В.И.Иноземцев

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Направлено в журнал
"Journal of Physics A"

1983

Классические интегрируемые одномерные системы взаимодействующих частиц уже в течение десятилетия являются предметом всестороннего исследования /подробный обзор наиболее важных результатов приведен в работе Переломова [4] /. Известны также интегрируемые задачи о движении систем частиц во внешнем поле, когда гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^2}{2} + V_i(x_i) \right) + \sum_{i>j}^{n} V_{ij}(x_i - x_j). \qquad /1/$$

Это - система Ольшанецкого и Переломова [3]

$$V_{ij}(\xi) = \frac{\alpha}{\xi^2}, \quad V_i(\xi) = \beta\xi^2 \qquad /2/$$

и система Адлера [1]

$$V_{ij}(\xi) = \frac{\alpha}{\operatorname{sh}^2 \xi/2}, \quad V_i(\xi) = \beta e^{\xi}. \qquad /3/$$

Существуют ли другие интегрируемые системы с гамильтонианом вида /1/? В этой работе мы дадим положительный ответ на этот вопрос в случае $n = 2$, когда для интегрируемости достаточно найти одну функцию K переменных p_1, p_2, x_1, x_2, удовлетворяющую уравнению

$$\{K, H\}_P = 0 \qquad /4/$$

/ $\{\ldots\}_P$ - скобки Пуассона/.

Рассмотрим гамильтониан общего вида

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x_1, x_2)$$

и будем искать функцию K в виде полинома по импульсам p_1, p_2:

$$K = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{2i} A_{im}(x_1, x_2) p_1^m p_2^{2i-m} \qquad /5/$$

или

$$K = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{2i+1} A_{im}(x_1, x_2) p_1^m p_2^{2i-m+1}. \qquad /6/$$

При $\ell = 1$ системы с интегралами движения /5/ и /6/ исследовались Уиттекером [5] и Холтом [2].

Исходя из /4/ функции $V(x_1, x_2)$, $A_{im}(x_1, x_2)$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных /в общем случае нелинейной/.

Например, для функции /5/ эта система содержит $\ell^2 + 3\ell + 2$ уравнений:

$$\frac{\partial A_{\ell,2\ell}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial A_{\ell,0}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial A_{\ell m}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{\ell,m+1}}{\partial x_2} = 0 \quad (m = 0, \ldots, 2\ell - 1),$$

$$\frac{\partial A_{s,2s}}{\partial x_1} = (2s+2) A_{s+1,2s+2} \frac{\partial V}{\partial x_1} + A_{s+1,2s+1} \frac{\partial V}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial A_{s,0}}{\partial x_2} = A_{s+1,1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + (2s+2) A_{s+1,0} \frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad /7/$$

$$\frac{\partial A_{sm}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{s,m+1}}{\partial x_2} = (m+2) \frac{\partial V}{\partial x_1} A_{s+1,m+2} + (2s+1-m) \frac{\partial V}{\partial x_2} A_{s+1,m+1}$$

$$(s = 1, \ldots, \ell - 1; \; m = 0, \ldots, 2s - 1),$$

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 2\frac{\partial V}{\partial x_1} A_{12} + A_{11} \frac{\partial V}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial A_{00}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1} A_{11} + 2 A_{10} \frac{\partial V}{\partial x_2}.$$

При этом функции $A_{\ell m}$ являются полиномами по x_1, x_2, степени 2ℓ и $2\ell + 1$ для /5/ и /6/ соответственно; условие совместности уравнений для $A_{\ell-1,m}$ представляет собой линейное уравнение порядка 2ℓ или $2\ell + 1$ для $V(x_1, x_2)$, коэффициенты которого определяются величинами $A_{\ell m}$. После того, как найдено его решение, зависящее от 2ℓ /или $2\ell + 1$ / произвольных функций одной переменной, уравнения для остальных коэффициентов A_{im} в /5/, /6/ приводят либо к некоторой системе функциональных уравнений, либо к одному такому уравнению: для /5/ $\ell = 2$, для /6/ $\ell = 1$.

Нашей целью является поиск интегрируемых систем с гамильтонианом, имеющим вид /1/ при $n = 2$:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_{12}(x_1 - x_2). \qquad /8/$$

Можно показать, что в случае /6/ при $\ell = 1$ функциональное уравнение, о котором говорилось выше, не имеет нетривиальных решений, если рассматривать в качестве $V(x_1, x_2)$ функции типа /8/. В случае /5/ при $\ell = 2$ структура $V(x_1, x_2)$, подобная /8/, может появиться, если положить $A_{20} = A_{21} = A_{23} = A_{24} = 0$, $A_{22} = 1/2$.

При этом остальные уравнения /7/ имеют вид

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial A_{10}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad /9/$$

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 2\frac{\partial V}{\partial x_1} A_{12} + A_{11}\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial A_{00}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1} A_{11} + 2\frac{\partial V}{\partial x_2} A_{10}. \qquad /10/$$

Решение /9/ может быть легко найдено:

$$A_{12}(x_1, x_2) = V_2(x_2), \quad A_{10}(x_1, x_2) = V_1(x_1),$$
$$A_{11}(x_1, x_2) = \tilde V_{12}(x_1 + x_2) - V_{12}(x_1 - x_2), \qquad /11/$$
$$V(x_1, x_2) = \tilde V_{12}(x_1 + x_2) + V_{12}(x_1 - x_2) + V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

При подстановке /11/ в /10/ приходим к функциональному уравнению, которому должны удовлетворять V_1, V_2, V_{12}, $\tilde V_{12}$:

$$[\tilde V_{12}(x_1 + x_2) - V_{12}(x_1 - x_2)][V_2''(x_2) - V_1''(x_1)] + 2[\tilde V_{12}''(x_1 + x_2) - V_{12}''(x_1 - x_2)] \times$$
$$\times [V_2(x_2) - V_1(x_1)] + 3\tilde V_{12}'(x_1 + x_2)[V_2'(x_2) - V_1'(x_1)] + \qquad /12/$$
$$+ 3V_{12}'(x_1 - x_2)[V_2'(x_2) + V_1'(x_1)] = 0.$$

Общее решение этого уравнения автору неизвестно.

Некоторые из частных решений, для которых все четыре функции V_1, V_2, V_{12}, $\tilde V_{12}$ отличны от нуля, соответствуют системам, изучавшимся Ольшанецким и Переломовым при $n = 2$:

$$V_{12}(\xi) = \tilde V_{12}(\xi) = g^2 \wp(a\xi), \quad V_1(\xi) = V_2(\xi) = g_1^2 \wp(a\xi) + g_2^2 \wp(2a\xi), \qquad /13/$$

где либо $g_1^2 - 2g^2 + \sqrt{2} g g_2 = 0$, $g_1 \neq 0$, либо $g_1 = 0$, g , g_2 произвольны; $\wp(a\xi)$ - функция Вейерштрасса.

В физически интересном случае $\tilde V_{12} = 0$ удается найти все решения "укороченного" функционального уравнения

$$V_{12}(x_1 - x_2)[V_2''(x_2) - V_1''(x_1)] + 2V_{12}''(x_1 - x_2)[V_2(x_2) - V_1(x_1)] - \qquad /14/$$
$$- 3V_{12}'(x_1 - x_2)[V_2'(x_2) + V_1'(x_1)] = 0.$$

Действительно, в /12/ можно ввести новые переменные

$$r = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \rho = -\frac{x_1 + x_2}{2}$$

и новые неизвестные функции, связанные с V_1, V_2, V_{12} соотношениями

$$V_1(x_1) = \frac{d}{dr} N(r - \rho), \quad V_2(x_2) = \frac{d}{dr} L(-r - \rho), \quad V_{12}(x_1 - x_2) = \left[\frac{d\eta(r)}{dr}\right]^{-2}. \qquad /15/$$

При этом /14/ можно трижды проинтегрировать, приведя его к функциональному уравнению, не содержащему производных:

$$L(r + \rho) - N(r - \rho) = c_1(\rho)\eta^2(r) + c_2(\rho)\eta(r) + c_3(\rho), \qquad /16/$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные функции ρ. Разлагая /16/ в ряд по степеням ρ, можно убедиться, что функция $\eta(r)$ является решением одного из двух уравнений

$$\eta'^2 = d_1(\eta - \eta_0)^2 + d_2(\eta - \eta_0) + d_3$$

или $\eta'^2 = d_1(\eta - \eta_0)^2 + d_2 + d_3(\eta - \eta_0)^{-2}$.

Таким образом, существуют два набора решений /16/, для которых

$$\eta(r) = a\,\mathrm{ch}(\beta r + \gamma) + b \qquad \text{или} \qquad \eta(r) = \sqrt{a\,\mathrm{ch}(\beta r + \gamma) + b} + \eta_0,$$

где a, b, β, γ, η_0 - произвольные постоянные. Уравнение /14/ также имеет только два набора решений:

$$V_1(x_1) = \lambda_1 \mathrm{ch}(2\beta x_1 + \gamma_1 + 2\Delta) + \lambda_2 \mathrm{ch}(\beta x_1 + \gamma_2 + \Delta),$$
$$V_2(x_2) = \lambda_1 \mathrm{ch}(2\beta x_2 + \gamma_1 - 2\Delta) + \lambda_2 \mathrm{ch}(\beta x_2 + \gamma_2 - \Delta), \qquad /17а/$$
$$V_{12}(x_1 - x_2) = \lambda_3\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(x_1 - x_2)}{2} + \Delta\right)\right]^{-2}$$

и

$$V_1(x_1) = \lambda_1 \mathrm{ch}(\beta x_1 + \gamma_1 + \Delta),$$
$$V_2(x_2) = \lambda_1 \mathrm{ch}(\beta x_2 + \gamma_1 - \Delta), \qquad /17б/$$
$$V_{12}(x_1 - x_2) = \lambda_2\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(x_1 - x_2)}{2} + \Delta\right)\right]^{-2} + \lambda_3\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(x_1 - x_2)}{4} + \frac{\Delta}{2}\right)\right]^{-2},$$

где β, λ_1, λ_2, λ_3, γ_1, γ_2, Δ - произвольные постоянные.

Используя предельные переходы из /17а/-/17б/, можно получить как систему Ольшанецкого и Переломова /2/, так и систему Адлера /3/ при $n = 2$.

Можно указать также частные решения первоначального функционального уравнения /12/, имеющие структуру, сходную с /17а/-/17б/:

$$V_1(\xi) = V_2(\xi) = \lambda_1 \operatorname{ch}\beta\xi\,; \quad V_{12}(\xi) = \frac{\lambda_2}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}} + \frac{\lambda_3}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{4}}\,, \tag{18a}$$

$$\tilde{V}_{12}(\xi) = \frac{\lambda_4}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}} + \frac{\lambda_5}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{4}}\,,$$

$$V_1(\xi) = V_2(\xi) = \lambda_1 \operatorname{ch}\beta\xi + \lambda_2 \operatorname{ch} 2\beta\xi\,; \quad V_{12}(\xi) = \frac{\lambda_3}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}}\,, \tag{18б}$$

$$\tilde{V}_{12}(\xi) = \frac{\lambda_4}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\xi}{2}}\,.$$

Вопрос о существовании решений /12/, отличных от /13/, /17/-/18/, остается открытым.

На наш взгляд, представляют интерес также следующие проблемы, анализ которых выходит за рамки этой работы:

1/ выяснение характера движения частиц в системах типа /13а/, /17б/;

2/ построение пар Лакса подобно известным в предельных случаях /2/, /3/ при $n = 2$;

3/ возможные обобщения на системы n взаимодействующих частиц во внешнем поле.

Автор благодарен М.А.Ольшанецкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p. 195.
2. Holt C. J.Math.Phys., 1982, 23, p. 1037.
3. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1976, 1, p. 187.
4. Переломов А.М. ЭЧАЯ, 1979, 10, с. 850.
5. Whittaker E.T. Analytical Dynamics. Cambridge U.P., London, 1927.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июня 1983 года.

Иноземцев В.И. P4-83-356
Интегрируемые движения двух взаимодействующих частиц во внешнем поле

Рассматриваются классические системы с гамильтонианом $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_{12}(x_1 - x_2)$, соответствующие взаимодействию системы двух частиц на прямой с внешним полем. Найдены новые наборы потенциалов V_1, V_2, V_{12}, для которых эти системы являются интегрируемыми.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Inozemtsev V.I. P4-83-356
Integrable Models of Two Interacting Particles Motion in External Field

Classical systems with a Hamiltonian $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_{12}(x_1 - x_2)$ considered. They correspond to the two-particle system on a streight line with an external field. The new sets of V_1, V_2, V_{12} potentials are found for which these systems are integrable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

lear Research. Dubna 1983