83-222

2879/83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

6/6-83

Р4-83-222

В.И.Иноземцев

НОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1983

В классической динамике гамильтонова система с двумя степенями свободы интегрируема, если известен независимый от гамильтониана H интеграл движения K, $\{K, H\}_P = 0$, $\{\ldots\}$ - скобки Пуассона. При этом любая траектория системы в 4-мерном фазовом пространстве находится на одной из гиперповерхностей $\{H = \mathrm{const}, K = \mathrm{const}\}$, которые должны быть двумерными. Интегрируемость классических систем с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i^2}{2} + V(q_1, q_2) \qquad /1/$$

установлена в ряде случаев, представляющих интерес для физики [/1-6/]. Недавно было показано, что исследование систем типа /1/ может быть полезным для решения вопроса об интегрируемости уравнений Янга-Миллса в классической теории поля [/7/].

Для всех известных интегрируемых систем типа /1/ интегралы движения K полиномиальны по импульсам. Уиттекер[/1/] нашел все потенциалы $V(q_1, q_2)$, для которых степени импульсов в K не превышают 2. Общий вид систем /1/, имеющих интегралы движения, кубичные по импульсам, неизвестен /некоторые такие системы удалось получить методом пар Лакса[/3/] /.

В этой заметке мы построим новую интегрируемую систему этого типа, пользуясь методом, предложенным Холтом [/5/].

В общем случае интеграл движения K, кубичный по импульсам, можно записать в форме

$$K = Ap_1^3 + Bp_1^2 p_2 + Cp_1 p_2^2 + Ep_2^3 + Fp_1 + Gp_2 \qquad /2/$$

/ $A, B, \ldots G$ - функции q_1 и q_2/.

Холт[/5/] показал, что /2/ является интегралом движения, если выполнены следующие условия:

I. A, B, C, E - полиномы по q_1, q_2:

$$\begin{aligned}
A &= \rho q_2^3 + \lambda_1 q_2^2 + \lambda_2 q_2 + a, \\
E &= -\rho q_1^3 + \mu_1 q_1^2 + \mu_2 q_1 + e, \qquad /3/ \\
B &= -3\rho a_1 q_2^2 - 2\lambda_1 q_1 q_2 + \mu_1 q_2^2 - \lambda_2 q_1 + p q_2 + b, \\
C &= 3\rho q_1^2 q_2 - 2\mu_1 q_1 q_2 + \lambda_1 q_1^2 - \mu_2 q_2 - p q_1 + c
\end{aligned}$$

/ρ, p, λ_i, μ_i, a, b, c, e - некоторые постоянные/.

II. Потенциал $V(q_1,q_2)$ удовлетворяет двум /в общем случае нелинейным/ уравнениям второго порядка:

$$(Y+\Phi(V))V_{12}+3EV_2-3AV_1+\Phi'(V)V_1V_2=0,$$
$$(Y+\Phi(V))(V_{22}-V_{11})-3V_1(E+B)-3V_2(A+C)+\Phi'(V)(V_2^2-V_1^2)=0, \qquad /4/$$

где

$$V_i=\frac{\partial V}{\partial q_i},\quad V_{ij}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j},\quad i,j=1,2;$$

$$Y(q_1,q_2)=-\frac{3}{4}\rho(q_1^2+q_2^2)^2+(\mu_1q_1-\lambda_1q_2)(q_1^2+q_2^2)+(3\mu_2-\lambda_2)\frac{q_1^2}{2}-$$
$$(3\lambda_2-\mu_2)\frac{q_2^2}{2}+pq_1q_2+(3e+b)a_1-(3a+c)q_2, \qquad /5/$$

Φ - некоторая /в общем случае произвольная/ функция V. Коэффициенты F и G связаны с Y, Φ, V простыми соотношениями

$$F=(Y+\Phi)V_1,\quad G=-(Y+F)V_2. \qquad /6/$$

Система уравнений /4/ имеет решения только при определенных соотношениях между постоянными в /3/ и определенном выборе функции $\Phi(V)$; ее общее решение неизвестно. Все нетривиальные частные решения /такие, для которых K не сводится к комбинации интегралов движения, содержащих низшие степени импульсов/ получены при постоянных коэффициентах A, B, C, E. Это, например, цепочка Тода [4], системы Калоджеро [3] и потенциал, найденный Холтом,

$$V=(q_1^2+\frac{4}{3}a_2^2+\delta)q_2^{-2/3}. \qquad /7/$$

Мы покажем, что нетривиальные в указанном выше смысле решения могут существовать и в том случае, когда некоторые из коэффициентов A, B, C, E зависят от q_1 и q_2. Выбирая постоянные в /3/ таким образом, что $A=E=0$, $B=q_2$, $C=-q_1$, согласно /5/ получим

$$Y=q_1q_2.$$

Система /4/ может быть представлена в форме

$$(q_1q_2+\Phi)V_{12}+\Phi'V_1V_2=0,$$
$$(q_1q_2+\Phi)(V_{22}-V_{11})-3(q_2V_1-q_1V_2)+\Phi'(V_2^2-V_1^2)=0. \qquad /8/$$

Структура уравнений /8/ допускает зависимость V от одного аргумента: $\eta=q_1q_2$, $V=r(\eta)$. Действительно, в этом случае /8/ эквивалентна системе двух обычных дифференциальных уравнений для двух функций, $\Phi(r(\eta))$, $r(\eta)$:

$$(\eta+\Phi)(r'+\eta r'')+\frac{d\Phi}{dr}\eta r'^2=0,$$
$$(\eta+\Phi)r''+3r'+\frac{d\Phi}{dr}r'^2=0. \qquad /9/$$

Нетривиальное решение /9/ может быть легко найдено:

$$\Phi(r)=2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-3/2},\quad V=r(\eta)=\lambda\eta^{-2/3}. \qquad /10/$$

Здесь λ - произвольная постоянная. Соответствующий потенциалу /10/ интеграл движения K согласно /3,5-6/ имеет вид

$$K=p_1p_2(p_1q_2-p_2q_1)+2\lambda(p_2q_2-p_1q_1)(q_1q_2)^{-2/3}$$
$$=(p_1^2-2H)p_1q_1-(p_2^2-2H)p_2q_2. \qquad /11/$$

Единственным интегралом движения классической системы с потенциалом /10/, содержащим импульсы в степени ниже 3, является гамильтониан H. Поэтому интеграл K не может быть представлен в виде комбинации более простых интегралов движения, полиномиальных по импульсам.

Вопрос об интегрируемости квантовой системы с гамильтонианом, определяемым потенциалом /10/, является открытым. Скобки Мойала [8] функций H и K не обращаются в нуль:

$$\{H,K\}_M=\frac{2}{h}\sin\left[\frac{1}{2}h\left(\sum_{i=1}^{2}\partial_{q_i}^{(H)}\partial_{p_i}^{(K)}-\partial_{p_i}^{(H)}\partial_{q_i}^{(K)}\right]H(p_1,p_2,q_1,q_2)\times\right.$$
$$\times K(p_1,p_2,q_1,q_2)=\frac{5h^2}{81}(q_1q_2)^{-8/3}(q_1^2+q_2^2).$$

Этот факт не позволяет построить известными способами квантовый интеграл движения. Прямым вычислением можно убедиться, что при канонических соотношениях коммутации между операторами p_i, q_i не существует каких-либо полиномов по импульсам степени не выше 3, коммутирующих с $H=\frac{p_1^2+p_2^2}{2}+\lambda(q_1q_2)^{-2/3}$.

Таким образом, этот гамильтониан, как и гамильтониан Холта /7/ [9], возможно, является примером неинтегрируемого в квантовомеханическом смысле. Причиной этого, как уже отмечалось в [9], по-видимому, является неопределенность при упорядочении операторов p_i, q_i в соответствующих классических интегралах движения типа /11/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E.T. Analytical Dynamics. Cambridge U.P., London, 1927.
2. Moser J. Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems. C.I.M.E. Lectures, Bressanone, Italy, 1978.
3. Переломов А.М. ЭЧАЯ, 1979, 10, с.850.
4. Henon M. Phys.Rev., 1974, B9, p.1921.
5. Holt C. J.Math.Phys., 1982, 23, p.1037.
6. Adler M. Comm.Math.Phys., 1977, 55, p.195.
7. Николаевский Е.С., Щур Л.Н. Письма в ЖЭТФ, 1982, 36, с.176.
8. Moyal L.E. Proc. Cambridge Phil.Soc., 1949, 45, p.99.
9. Hietarinta J. Phys.Lett., 1982, 93A, p.55.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля 1983 года.

Иноземцев В.И. Р4-83-222

Новая интегрируемая классическая система с двумя степенями свободы

Показано, что классическая система с гамильтонианом $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \lambda(q_1 q_2)^{-2/3}$ обладает интегралом движения $K = p_1 p_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) + 2\lambda(p_2 q_2 - p_1 q_1)(q_1 q_2)^{-2/3}$; квантовая система с тем же гамильтонианом не имеет отличных от H интегралов движения, содержащих импульсы в степени, не превышающей 3.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Inozemtsev V.I. P4-83-222

New Integrable Classical System with Two Degrees of Freedom

It is shown that a classical system with the Hamiltonian $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \lambda(q_1 q_2)^{-2/3}$ possesses a constant of the motion $K = p_1 p_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) + 2\lambda(p_2 q_2 - p_1 q_1)(q_1 q_2)^{-2/3}$; the quantum system with the same Hamiltonian has no other than H constants of the motion, polynomials in momenta being of order not higher than three.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов.