объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-83-220

М.И.Широков

НЕАДДИТИВНЫЕ "ВЕРОЯТНОСТИ" И НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА

Направлено в "Journal of Physics, A"

1983

I. ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является исследование системы аксиом, которая совпадает с колмогоровской аксиоматикой для теории вероятностей, за исключением аксиомы сложения. Последняя гласит, что вероятность объединения непересекающихся событий A и B равна сумме вероятностей A и B. Эта аксиома заменяется другим законом аналогично тому, как простое сложение нерелятивистских скоростей заменяется известным законом сложения релятивистских (параллельных) скоростей.

Укажем два возможных физических приложения неаддитивных "вероятностей".

Решение φ уравнения Шредингера для N невзаимодействующих частиц, как известно, равно произведению волновых функций отдельных частиц:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_N) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\dots\psi_N(x_N) . \quad \text{(I)}$$

Это обстоятельство важно для вероятностной интерпретации волновой функции ψ, поскольку известное правило умножения вероятностей независимых событий следует из (I), см. /I/. Далее мы покажем, что это правило жестко связано с законом сложения. Пусть теперь в уравнение Шредингера введен нелинейный член вида $F(\varphi)\varphi$.

Тогда (I) уже не имеет места, как правило, см.,например, /2/. Можно предположить поэтому, что в будущем нелинейном обобщении квантовой механики правило умножения будет другим, как и закон сложения, см. далее раздел 3. Исследование неаддитивных "вероятностей" может иметь значение как предварительный этап в попытке построения нелинейной квантовой теории.

Другим примером применения может быть теория "скрытых переменных", призванная восстановить причинность в теории микромира. Эти переменные ненаблюдаемы (скрыты) по определению, и поэтому распределения по ним могут и не иметь свойств относительных частот результатов наблюдений, см. /3/ и далее раздел 4.

Раздел 2 посвящен краткому изложению аксиоматики теории вероятностей. В разделе 3 исследуется класс естественных обобщений аксиомы сложения. Все они оказываются эквивалентными в некотором смысле обычному сложению. С помощью этой эквивалентности в разделе 4 обсуждаются физические приложения неаддитивных "вероятностей". Результаты работы суммированы в Заключении.

2. АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.I. Аксиомы Колмогорова

Исходным понятием является множество Ω элементарных событий (пример такого события - выпадение какой-либо грани игральной кости). Его всевозможные подмножества A, B, ... называются событиями (пример: выпадение грани с четным числом очков). Для A, B, ... определены следующие операции: объединение, или взятие суммы: $A \cup B$, или $A+B$ (A или B); пересечение, или произведение: $A \cap B$, или AB (A и B); дополнение $\bar{A}$ к A (те элементы Ω, которые не принадлежат A, т.е. событие не-A). К множеству всех событий добавляется элемент 0 - невозможное событие. Аксиома I гласит, что полученная алгебра событий F является булевой. Далее мы используем следующие свойства этой алгебры:

$$A+B=B+A, \qquad AB=BA, \tag{2}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C, \qquad A(BC)=(AB)C, \tag{3}$$

$$A(B+C)=AB+AC. \tag{4}$$

Это коммутативные, ассоциативные и дистрибутивный законы соответственно.

Аксиома II: каждому элементу $A \in F$ сопоставляется неотрицательное действительное число $P(A)$, называемое вероятностью.

Аксиома III. Число $P(\Omega)$, сопоставляемое всему множеству Ω, должно быть равно I.

Аксиома сложения IV: если A, B не пересекаются, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{5}$$

Подробности см. в /4/, а также в других изложениях теории вероятностей /5-7/.

2.2. Дополнительные аксиомы

Несмотря на употребление терминов "событие" и "вероятность", ничто в перечисленных аксиомах не указывает на то, что $P(A)$ есть именно вероятность. Они определяют специальный случай общей теории меры, и $P(A)$ может, например, толковаться как величина, пропорциональная весу или объему куска A некоторого тела. Теория вероятностей выделяется из теории меры с помощью таких понятий, как "случайность" и "независимые многократные испытания", см. /4/, гл.I, § 5. Для наших целей удобно сформулировать их в виде двух дополнительных аксиом. Из них возможно будет вывести, что $P(A)$ имеет смысл относительной частоты появления события A в многократных испытаниях (относительно понятия испытания см., например, /5,6/).

Аксиома случайности. Элемент $A \in F$ называется случайным событием, если при испытании он либо наступает (осуществляется), либо нет. Исключением является случай $P(A)=1$, тогда событие обязательно наступает в каждом испытании.

Из-за свойства случайности $P(A)$ не может быть определено в одном испытании. Необходимы многократные независимые испытания. Это понятие можно раскрывать как прямое произведение N множеств Ω (одновременное бросание N одинаковых костей). Обозначим его Ω_N. Рассмотрим следующее составное событие: на первой кости наступило событие A_1, на второй - A_2 и т.д. Оно может быть представлено как пересечение $\cap$ следующих событий из Ω_N:

$A_1 \cap \Omega \ldots \cap \Omega$ (выпало A_1 на первой кости и что-то на остальных), $\Omega \cap A_2 \cap \Omega \ldots \cap \Omega$ и т.д. Это пересечение мы обозначим

$$A_1 A_2 \ldots A_N .$$

Аксиома умножения. Мера любого составного события $A_1 A_2 \ldots A_N$ равна произведению $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_N)$, если испытания независимы [x)].

Покажем, что аксиому умножения можно заменить другим положением качественного характера.

Аксиома независимости. Если испытания независимы, то мера любого события из Ω_N есть непрерывная функция одних только мер $P(A)$ событий из исходного множества F при любых численных значениях $P(A)$ (удовлетворяющих, конечно, аксиомам II и Ш). Последнее условие есть существенное отличие от аксиомы умножения.

Теорема. Аксиома умножения следует из аксиомы независимости.

Доказательство. Пусть $P(A_1 A_2 \ldots A_N)$ есть некоторая функция $m(p_1, p_2, \ldots p_N)$ вероятностей $p_i = P(A_i)$, $A_i \in F$. Некоторые из аргументов p_1, p_2, ... p_N могут совпадать (как, например, в случае, когда N больше, чем число элементов F). Рассмотрим событие

$$(A_1' + A_1'')A_2 \ldots A_N \equiv (A_1' + A_1'')\mathcal{D} , \quad \mathcal{D} \equiv A_2 A_3 \ldots A_N .$$

Раскрывая сокращение $(A_1' + A_1'')A_2 \ldots A_N$ и используя (4), получаем

$$(A_1' + A_1'')\mathcal{D} \equiv (A_1' + A_1'') \cap \Omega \ldots \cap \Omega\, \mathcal{D} =$$

$$= (A_1' \cap \Omega \ldots \cap \Omega + A_1'' \cap \Omega \ldots \cap \Omega)\mathcal{D} \equiv A_1'\mathcal{D} + A_1''\mathcal{D} .$$

В силу аксиомы сложения IУ имеем для непересекающихся A_1' и A_1''

x) В книгах по теории вероятностей этот (соответственно измененный) тезис рассматривается как определение независимых испытаний. Я предполагаю, что это понятие определяется отдельно в каждом приложении теории вероятностей при помощи соображений, не использующих этот тезис.

$$P((A_1' + A_1'')\mathcal{D}) = P(A_1'\mathcal{D} + A_1''\mathcal{D}) = P(A_1'\mathcal{D}) + P(A_1''\mathcal{D}) .$$

Это соотношение означает, что функция $m(p_1, p_2, \ldots) = P(A_1 A_2 \ldots)$ должна обладать свойством

$$m(p_1' + p_1'', p_2, \ldots p_N) = m(p_1', p_2, \ldots p_N) + m(p_1'', p_2, \ldots p_N) . \qquad (6)$$

Поскольку (6) должно иметь место при любых p_1' и p_1'' , то мы имеем для m известное функциональное уравнение Коши по отношению к первому аргументу: $m(x+y, \ldots) = m(x, \ldots) + m(y, \ldots)$. Его непрерывное решение имеет вид $m(p_1, p_2 \ldots p_N) = p_1 \varphi(p_2, \ldots p_N)$, где $\varphi(p_2, \ldots p_N)$ –пока произвольная функция, см. 2.II в /8/. Рассуждая аналогично относительно зависимости m от других аргументов, получаем, что $m(p_1, p_2, \ldots p_N) = C p_1 p_2 \ldots p_N$. Аксиома Ш дает

$$1 = P(\Omega_N) = P(\Omega\, \Omega \ldots \Omega) = m(1, 1, \ldots 1) = C .$$

Таким образом, $P(A_1 A_2 \ldots A_N) = p_1 p_2 \ldots p_N$, что и требовалось доказать.

2.3. Частотное истолкование аксиоматической вероятности

Рассмотрим составное событие, состоящее в том, что в M из N одинаковых независимых испытаний осуществляется некоторое событие A , а в остальных $N-M$ испытаниях событие $\bar{A}$, т.е. не-A. В учебниках теории вероятностей с помощью аксиом сложения и умножения для меры $P_A(M)$ этого события выводится выражение

$$P_A(M) = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}\,[P(A)]^M\,[1 - P(A)]^{N-M} . \qquad (7)$$

Это биномиальное распределение по M имеет максимум при $M_{max} = N \cdot P(A)$, и он тем резче, чем больше N . Рассмотрим вероятность P_Δ того, что относительная частота M/N находится в малом интервале $(P(A) - \Delta,\ P(A) + \Delta)$:

$$P_\Delta = \sum_{M=M_-}^{M_+} P_A(M) \quad ; \quad M_\mp = (P(A) \mp \Delta)\,N . \qquad (8)$$

Согласно закону больших чисел $P_\Delta \to 1$ при $N \to \infty$ при сколь угодно малом $\Delta > 0$. Это означает, что M/N обязательно находится в интервале $(P(A) - \Delta, P(A) + \Delta)$ в пределе $N \to \infty$ (см. Аксиому случайности). Мы получили точную формулировку определения вероятности по Мизесу: $P(A) = \lim M/N$ при $N \to \infty$.

3. НЕАДДИТИВНЫЕ "ВЕРОЯТНОСТИ"

Пусть A_1 и A_2 – два непересекающихся события и w_1 и w_2 – действительные числа, которые им приписываются (ср.с Аксиомой II в предыдущем разделе). Законом композиции w_1 и w_2 будем называть функцию $S(w_1, w_2)$, значение которой есть действительное число, приписываемое событию $A_1 \cup A_2$. Простой пример: $S(w_1, w_2) = w_1 + w_2$. Более сложный закон композиции:

$$S(w_1, w_2) = (w_1 + w_2)[1 + w_1 w_2 / K^2]^{-1} . \qquad (9)$$

Числа $w = W(A)$, подчиняющиеся неаддитивному закону композиции, будут называться квазивероятностями.

Вместо аксиомы сложения IУ теперь принимаем

$$W(A+B) = S(W(A), W(B)) \equiv W(A) \oplus W(B), \qquad (5^{I})$$

если A и B не пересекаются. Аксиому I оставляем неизменной, как и аксиому II : $W(A) \geq 0$, и аксиому III : $W(\Omega) = 1$.

Из свойств коммутативности (2) и ассоциативности (3) алгебры событий F вытекает, что операция S или $\oplus$ должна быть коммутативной и ассоциативной:

$$W(A) \oplus W(B) = W(A+B) = W(B+A) = W(B) \oplus W(A), \qquad (I0)$$

$$W(A) \oplus [W(B) \oplus W(C)] = W(A + (B+C)) =$$

$$= W((A+B)+C) = [W(A) \oplus W(B)] \oplus W(C). \qquad (II)$$

Аксиомы случайности и независимости формулируются так же, как в 2.2. Но теперь квазивероятность $m(w_1, \ldots w_N)$ составного события из Ω_N не равна простому произведению квазивероятностей $w_1, \ldots w_N$. Действуя точно так же, как при доказательстве Теоремы из 2.2, получим, что вид функции $m(w_1, \ldots w_N)$ теперь должен определяться системой функциональных уравнений вида

$$m(S(w_1', w_1''), w_2, \ldots w_N) = S(m(w_1', w_2 \ldots w_N), m(w_1'', w_2 \ldots w_N)) \qquad (I2)$$

с заданной функцией S (выписано уравнение по первому аргументу). Подчеркнем, что (I2) может рассматриваться и как уравнение для S при фиксированном m. Уравнение (I2) далее не будет обсуждаться, потому что вид m может быть найден более простым способом, см. далее конец пункта 3.3.

Я не обсуждаю здесь вопросы типа: как определить среднее значение или функцию корреляции; чем заменяется понятие интеграла (необходимое, когда случайная величина непрерывна). Моей целью будет нахождение класса возможных нелинейных ассоциативных законов композиции.

3.I. Ассоциативные законы композиции

Потребуем, чтобы законы композиции, кроме свойств (I0) и (II), обладали бы еще двумя следующими естественными свойствами: α и β. В аксиоматике Колмогорова, где закон композиции задан, эти свойства следуют из аксиом II, III, IУ.

α) Квазивероятность невозможного события 0 равна нулю: $W(0) = 0$. Значения всех остальных квазивероятностей лежат в интервале (0,I).

В частности, это означает, что если $w_1, w_2 \in (0,1)$, то и $S(w_1, w_2) \in 0,1$. Далее, из $W(A+0) = W(A) \oplus W(0) = W(A)$ следует, что $w \oplus 0 = w$ или $S(0, w) = S(w, 0) = w$.

Эти свойства фактически усиливают аксиомы II и III. В аксиоматике Колмогорова из III и (5) следует

$$1 = P(\Omega + 0) = 1 + P(0),$$

откуда $P(0) = 0$. Далее из III и (5) следует для любого A, что

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) .$$

Если сумма неотрицательных, согласно II, величин $P(A)$ и $P(\bar{A})$ равна I, то каждое из них не превосходит I.

β) $S(w_1, w_2)$ должна быть непрерывной строго возрастающей функцией своих аргументов: если $w_2 > w_1$, то $S(w, w_2) > S(w, w_1)$ (и $S(w_2, w) > S(w_1, w)$, поскольку S коммутативна).

Это свойство оправдывается соображениями типа: если к w "прибавляется" по закону $\oplus$ ненулевая квазивероятность w', то результирующая квазивероятность должна быть больше w и w'.

Теперь воспользуемся общим решением уравнения ассоциативности

$$S(S(u,v), w) = S(u, S(v,w)) \qquad (I3)$$

в поле действительных чисел, см. [8], раздел 6.2. Оно имеет следующий вид:

$$S(v,w) = f\left(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)\right), \tag{14}$$

где f - любая действительная, непрерывная и строго возрастающая функция (I4) имеет место при следующих условиях: значения v, w и $S(v,w)$ принадлежат некоторому заданному интервалу (у нас это интервал (0,I) согласно α); S обладает свойством β (является *reducible* по терминологии 6.2 в /8/).

Смысл (I4) следующий: берем некоторую функцию f, преобразуем v и w в другие действительные числа $p=f^{-1}(v)$ и $q=f^{-1}(w)$, используя обратную функцию f^{-1}, вычисляем сумму $p+q$ и затем $f(p+q)$. Получаем число $S(v,w)$, соответствующее v и w, т.е. некоторый закон композиции.

Можно переписать (I4) в виде

$$f^{-1}(S(v,w)) = f^{-1}(v) + f^{-1}(w), \tag{15}$$

откуда следует, что $f^{-1}(v)$ и $f^{-1}(w)$ просто складываются, когда квазивероятности v и w подвергаются композиции $S(v,w)$.

Еще одна полезная форма (I4) имеет вид

$$S(f(p), f(q)) = f(p+q). \tag{16}$$

Отсюда видно, что полученные законы S оказываются также и коммутативными, см. 6.22 в /8/.

Если закон S задан, то можно найти f, решая функциональное уравнение (I6). Оно обсуждено в /8/, раздел 2.2. В частности, его непрерывные решения f существуют, когда $p, q, p+q \in (0,1)$, при условии, что $S(v,w)$ есть непрерывная и строго возрастающая функция v и w (свойство β), см. 6.2.3 в /8/.

Заметим, что $S(f(p), f(0)) = f(p)$ ввиду (I6). Поэтому нулевое значение $p=0$ соответствует нулю операции S, т.е. нулевому значению $w=0$, см. свойство α.

Далее, решения уравнения (I6) обладают следующим свойством: если $f(p)$ есть решение, то и $f(cp)$ - тоже решение (c -любая действительная константа). Любое решение $f(p)$ должно принимать значение I (при некотором p), поскольку S принимает это значение (например, $S(W(A), W(\bar{A}) = W(\Omega) = 1)$. Можно выбрать такую константу c, что $f(cp)$ будет принимать значение I при $p=1$.

Итак, можно выбрать такое решение (I6), что наряду с $f(0)=0$ будем иметь также $f(1)=1$. Тогда преобразование $w=f(p)$ переводит интервал (0,I) значений p в интервал (0,I) значений w.

3.2. Примеры

Закон $v + w = (v+w)(1+\alpha vw)$ оказывается неассоциативным и поэтому несовместим с аксиомой I.

Закон (9) ассоциативный. Обсудим сначала случай $k<1$. Рассмотрим равенство $W(A) \oplus W(\bar{A}) = 1$ в случае, когда $k < W(A) < 1$. Тогда можно показать, что $W(A) \oplus W(\bar{A})$ не может превосходить $W(A)$, т.е. не может равняться I, какое бы значение из (0,I) не принимала квазивероятность $W(\bar{A})$. Равенство $W(A) \oplus W(\bar{A}) = 1$ при $k<1$ и $W(A) > 0$ возможно только в случае, если $W(\bar{A})$ превосходит I или даже отрицательно. Поэтому закон (9) в случае $k<1$ несовместим с аксиомой II.

Если S задано равенством (9) с $k>1$, то уравнение (I6) принимает вид

$$[f(x) + f(y)][1 + f(x)f(y)/k^2]^{-1} = f(x+y) \tag{17}$$

Его непрерывные решения имеют вид $f(x) = k\,\mathrm{th}\,cx$, см. /8/, 2.2.8, пример (3). Они могут быть получены методом сведения (I7) к дифференциальному уравнению. В неевклидовой геометрии $w = k\,\mathrm{th}\,cx$ называется отображением Бельтрами, см., например, раздел II в /9/. Преобразование $w=f(p)$, обладающее свойством $f(1)=1$, имеет вид $w = k\,\mathrm{th}\,c'p$, где c' есть корень уравнения $k\,\mathrm{th}\,c' = 1$.

3.3. Эквивалентность аксиоматике Колмогорова

Соотношения (I4) или (I5) фактически означают, что любой ассоциативный закон композиции $S(v,w)$, обладающий свойствами α и β, эквивалентен обычному закону сложения. Функция f, описанная в конце пункта 3.I, осуществляет изоморфизм между новой аксиоматикой и колмогоровской. Этот изоморфизм обеспечивает существование математических моделей с любым законом композиции $S(v,w)$ вида (I4). Далее из изоморфизма следует, что если мы припишем событиям не числа w, но другие числа $p = f^{-1}(w)$, то с p можно обращаться, как с обычными вероятностями. Поэтому мы можем избежать громоздких вычислений, использующих новые законы S и m.

Надо сначала преобразовать квазивероятности w в обычные вероятности $p = f^{-1}(w)$, затем выполнить необходимые вычисления с p, используя обычные сложение и умножение, и в конце возвратиться к квазивероятностям $w = f(p)$, если это нужно. В частности, новый закон $m(w_1, w_2, \dots w_N)$ может быть получен из закона умножения, если в нем заменить p на $f^{-1}(w)$.

3.4. Квазивероятности и относительные частоты

Получим связь между квазивероятностью w и относительной частотой, используя только что описанный способ. Сначала получаем $p=f^{-1}(w)$. Как известно, связь p с частотой M описывается распределением (7). Возвращаясь к квазивероятностям, мы должны заменить $p\equiv P(A)$ в (7) на $w=f(p)$ и заменить $P_A(M)$ на $W_A(M)=f(P_A(M))$. Первая замена означает, что число $M_{max}/N=p$ не будет совпадать с $w=f(p)$, вообще говоря. Вторая замена приводит к деформации зависимости $W_A(M)$ от M по сравнению с $P_A(M)$. Покажем, что эта деформация фактически не смещает максимум распределения при $N\to\infty$. Напомним, что вероятность P_Δ того, что относительная частота M/N находится в интервале $(p-\Delta, p+\Delta)$, см. (8), стремится к I при $N\to\infty$. Соответствующая квазивероятность $W_\Delta=f(P_\Delta)$ тоже должна $\to 1$, поскольку $f(x)$ непрерывна и $f(1)=1$. Это означает, что распределение $W_A(M)$ концентрируется в той же области частот $M_-<M<M_+$, см. (8), что и $P_A(M)$, если N достаточно велико.

Итак, мы получили, что $W(A)\neq \lim M/N$, $N\to\infty$. Возникает естественный вопрос: не является ли это неравенство в каком-то смысле самоочевидным? Ведь принятие аксиомы сложения оправдывается ссылкой на свойства относительных частот, см., например /4/, гл. I, § 2. Обсудим соответствующую схему рассуждений. Пусть события A и B не пересекаются. Пусть в серии из N испытаний A осуществлялось M_A раз и B наступило M_B раз. Во-первых, замечаем, что $M_{A+B}=M_A+M_B$ в каждой такой серии. Во-вторых, M_A/N и M_B/N стремятся к $P(A)$ и $P(B)$ при $N\to\infty$ и мы получаем $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Подчеркнем, что в этом выводе имеется трудность на втором этапе. Соотношение $P(A)=\lim M/N$ может быть получено в рамках аксиоматики теории вероятностей, см. 2.3. Но при этом используется аксиома сложения, так что вместо вывода мы имеем логический круг. Подход Мизеса состоял в принятии $P(A)=\lim M_A/N$ в качестве определения вероятности. Но этот подход встречается с математическими трудностями, см. § 7 в /5/.

К тому же мыслимы и такие приложения теории вероятностей, когда нет и равенства $M_{A+B}=M_A+M_B$. Например, имеем три одинаковые кости. У первой нанесены очки только на грань A (остальные пустые), у второй - только на грань B, у третьей - на грани A и B. Кости бросаются одновременно N раз. Тогда, вообще говоря, $M_{A+B}\neq M_A+M_B$ (M_{A+B} - частота выпадения граней A или B на третьей кости).

Поэтому наш вывод неравенства $W(A)\neq\lim M_A/N$ может рассматриваться как строгое доказательство интуитивно очевидного утверждения: для описания относительных частот необходима именно аксиома сложения Колмогорова (вместе с остальными аксиомами).

4. О ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ НЕАДДИТИВНЫХ КВАЗИВЕРОЯТНОСТЕЙ

Известно, что квантовая механика реализует аксиоматику теории вероятностей, см. /I/. В таком же смысле другая физическая теория (например, будущая нелинейная квантовая теория) может реализовать рассмотренную аксиоматику. Ввиду установленного выше изоморфизма квазивероятностей и вероятностей такая теория, наверное, может быть переформулирована так, чтобы реализовывать обычную аксиоматику вероятностей. Но переформулировка может неоправданно усложнить формализм теории в других отношениях, так что исходная формулировка (реализующая квазивероятности) окажется предпочтительней.

Было показано, что квазивероятности не могут быть интерпретированы как относительные частоты результатов наблюдений. Для описания последних квазивероятности следует трансформировать в обычные вероятности с помощью функции f, см. 3.I. Таким образом, связь теоретических величин с наблюдаемыми окажется еще более усложненной, чем в квантовой механике, например.

Рассмотрим более конкретно одно возможное приложение квазивероятностей к проблеме причинного описания микроявлений с помощью "скрытых переменных".

4.I. "Скрытые переменные" и неравенство Белла

Рассмотрим два электрона в синглетном состоянии, движущиеся в противоположных направлениях. Когда они находятся далеко друг от друга, измеряются проекции их спинов на три направления: $\vec\omega_1$, $\vec\omega_2$, $\vec\omega_3$. Результатом являются наблюдения проекций +I/2 или - I/2. Согласно квантовой механике вероятность того, что у электронов окажутся проекции + I/2 и + I/2 на направления $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_3$, равна

$$|\langle\psi_+(\vec\omega_1)\,\psi_+(\vec\omega_3)\,|\,singlet\rangle|^2=\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13}, \qquad (I8)$$

где ϑ_{13} - угол между $\vec\omega_1$ и $\vec\omega_3$. Теория со "скрытыми переменными" должна давать определенные результаты наблюдений для каждой пары электронов. Некоторые начальные значения "скрытых переменных" ведут к результату + I/2, другие к -I/2. Но начальные значения неизвестны, разные значения имеют разные вероятности. Вигнер /I0/

показал, что если вероятность (I8) может быть объяснена таким образом, то она должна иметь вид

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13} = p_1 + p_3 \ . \tag{I9}$$

Здесь p_1 и p_3 обозначают вероятность нахождения начальных значений "скрытых переменных" в таких областях, которые приводят к результатам + I/2 и + I/2 в направлениях $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_3$. Могут быть выведены еще два сходных равенства:

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12} = p_1 + p_2 \geq p_1, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{23} = p_2 + p_3 \geq p_3 \ . \tag{2I}$$

Все вероятности p в правых частях (I9)-(2I) неизвестны, но из (I9)-(2I) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13} \leq \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{23}. \tag{22}$$

Это есть пример так называемого неравенства Белла[x)]. Неравенство (22) не выполняется при многих конкретных значениях углов ϑ_{13} , ϑ_{12} , ϑ_{23} /I0/. Это означает, что равенства (I9)-(2I) неверны: квантовые вероятности не могут быть объяснены "скрытыми переменными". Единственное ограничивающее предположение по поводу свойств "скрытых переменных" было сделано при выводе этих равенств: эти переменные "локальны", т.е. результат измерения с первым электроном не зависит от ориентации $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ или $\vec{\omega}_3$ устройства, измеряющего проекцию спина второго электрона (напомним, что измерения с разными электронами производятся далеко друг от друга). Это предположение настолько согласуется со здравым физическим смыслом (чего нельзя сказать, например, о квантовом принципе редукции при измерении), что были выполнены эксперименты по проверке неравенств Белла, см., например, /I3/ и ссылки, приведенные там.

---

x) Обычно неравенство Белла записывается для функции корреляции (результатов измерений проекций спинов) /II/. Далее я собираюсь использовать квазивероятности для "скрытых переменных", но функция корреляции для квазивероятностей не была определена, см. текст перед 3.I. Подход Вигнера не нуждается в такой функции, используются только сами вероятности (сходное изложение см. в /I2/, часть Ш, раздел 4.7).

4.2. Могут ли квазивероятности изменить неравенство Белла?

Пусть разным начальным значениям "скрытых переменных" приписаны квазивероятности w , а не обычные вероятности p . Мы не можем просто переписать (I9) в виде

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13} = w_1 \oplus w_3 \, , \tag{I9$^{\mathrm{I}}$}$$

потому что результат композиции $w_1 \oplus w_3$ должен быть обычной вероятностью. Действительно, правая часть (I9) или (I9$^{\mathrm{I}}$) является обычной квантовой вероятностью (или величиной, сопоставляемой наблюдаемой относительной частоте результатов + I/2 и + I/2 в направлениях $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_3$). Квазивероятность $w_1 \oplus w_3$ должна быть преобразована в обычную вероятность с помощью функции f^{-1} , прежде чем приравниваться $\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13}$ [x)]. Но тогда получаем

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{13} = f^{-1}(w_1 \oplus w_3) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_3) = p_1 + p_3 \ . \tag{23}$$

Было использовано соотношение (I5). Левая часть (23) оказывается той же функцией обычных вероятностей p_1 и p_3 (соответствующих w_1 и w_3), что и левая часть (I9). Следовательно, из (23) и двух равенств, аналогичных (20) и (2I), получается то же неравенство (22).

В связи с этим результатом прокомментируем утверждение работы /3/: теорию "скрытых переменных" можно согласовать с квантовой теорией, если для первой использовать модифицированную (неколмогоровскую) теорию вероятностей. Наш результат означает, что согласия нельзя достичь, если в колмогоровской аксиоматике изменена только аксиома сложения, причем естественным образом в смысле выполнения свойств α) и β) , см. 3.I.

В /3/ обсуждаются, напротив, экзотические или даже "парадоксальные" возможности, см., в частности, стр. I300 в /3/ (к тому же полные доказательства в /3/ еще не предоставлены).

5. Заключение

В работе получены следующие результаты:

Вместо известного тезиса "вероятности независимых событий перемножаются" предложен другой, названный в пункте 2.2 аксиомой

---

x) Впрочем, легко показать, используя свойство β закона $\oplus$, что три уравнения вида (I9$^{\mathrm{I}}$) ведут к тому же неравенству (22), что и уравнения (I9)-(2I).

независимости. Из него следует правило перемножения в случае аксиоматики Колмогорова. Общность формулировки аксиомы независимости позволяет сохранить ее в том же виде и в аксиоматике с измененным законом сложения.

Рассмотрена аксиоматика, отличающаяся от колмогоровской только заменой правила сложения вероятностей на другой, нелинейный, закон композиции $\oplus$. Показано, что все "естественные обобщения" аксиомы сложения эквивалентны обычному сложению в следующем смысле: неаддитивные "вероятности" могут быть преобразованы с помощью некоторой нелинейной функции f в обычные вероятности, подчиняющиеся обычному закону сложения. "Естественными обобщениями" названы законы $\oplus$, обладающие свойствами α и β , см. 3.I.

С помощью установленной эквивалентности подтверждено, что частотная интерпретация квазивероятностей возможна только в случае, если закон $\oplus$ совпадает с обычным сложением.

Обсуждены физические приложения рассмотренной аксиоматики. Показано, что известное неравенство Белла не изменяется, если квазивероятности использовать для описания распределений по "локальным скрытым переменным".

Благодарю за обсуждения А.С. Холево, Я.Г. Синая, А. Двуреченского и Г.А. Ососкова.

Литература

I. Широков М.И. Сообщение ОИЯИ Р4-81-737, Дубна, I98I.
2. Bialynicki-Birula I.,Mycielski J. Ann of Phys. 1976,I00,62.
3. Pitowsky I. Phys. Lett., 1982, 48,I299-I302; 49,I2I6.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. "Наука", Москва, I979.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. "Наука", Москва, I96I.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.I, "Мир", Москва, I967.
7. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. "Мир", Москва, I969.
8. Aczél J. Lectures on Functional Equations and their Applications Academic Press, New York,I966.
9. Черников Н.А. ЭЧАЯ, I973, 4, 773.
IO. Wigher E.P. Amer. Jurn of Phys. I970, 38, I005.

II. Bell J.S. Physics,1965, I, I95.
I3. Belinfante F.J.A survey of Hidden-Variables Theories Pergamon Press, New York, I973.
I3. Aspect A. et al. Phys. Rev. Lett., I98I, 47, 460; I982, 49, 9I; 49, I804.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля I983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Широков М.И. P4-83-220

Неаддитивные "вероятности" и неравенство Белла

Рассмотрена система аксиом, отличающаяся от аксиоматики теории вероятностей только тем, что закон сложения вероятностей заменен другим, нелинейным, законом. Показано, что все естественные обобщения закона сложения в определенном смысле эквивалентны простому сложению. Неаддитивные "вероятности" не имеют частотного истолкования. Обсуждены их физические приложения. Применение неаддитивных "вероятностей" к теориям со "скрытыми переменными" не изменяет известного неравенства Белла.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Shirokov M.I. P4-83-220

Nonadditive "Probabilities" and Bell's Inequality

The system of axioms is considered, which differs from the probability theory axiomatics in one respect only: the axiom of addition of probabilities is replaced by a nonlinear law. All natural generalizations of the addition axiom are shown to be equivalent in a sense to the usual addition. Nonadditive "probabilities" fail to have the meaning of relative frequencies. Physical applications of the nonadditive "probabilities" are discussed. The known Bell inequality does not suffer any change when one attempts to use them in "local hidden-variables" theories.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.