СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8253

В.Н.Ефимов, В.К.Игнатович

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СПОНТАННУЮ И РЕЗОНАНСНУЮ ДЕПОЛЯРИЗАЦИЮ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8253

В.Н.Ефимов, В.К.Игнатович

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СПОНТАННУЮ И РЕЗОНАНСНУЮ ДЕПОЛЯРИЗАЦИЮ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

Эксперименты по измерению электрического дипольного момента [1,2] /ЭДМ/ нейтрона с помощью ультрахолодных нейтронов /УХН/ поставили на повестку дня вопросы о взаимодействии спина УХН с неоднородностями магнитного поля. Эти вопросы рассматривались в рамках классического подхода в работе [2]. В настоящем сообщении они рассматриваются вновь, но квантовомеханическими методами. Необходимо сразу же отметить, что результаты, получаемые обоими методами, находятся в хорошем согласии друг с другом. Ниже всюду речь пойдет о немагнитных ловушках.

Вопросы взаимодействия спина УХН с магнитными неоднородностями интересны в двух аспектах:

1/ с точки зрения хранения поляризованных УХН в ловушках,

2/ применительно к эксперименту [2] по измерению ЭДМ методом разделенных радиочастотных полей.

1. Задача о деполяризации УХН в ловушках формулируется следующим образом. Имеется камера объема V, внутри которой создано магнитное поле $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 + \vec{H}_1(\vec{r})$, где $\vec{H}_0$ - однородное поле, направленное вдоль оси Z, а $\vec{H}_1(\vec{r})$ - неоднородное поле, которое предполагается случайным, т.е. характеризуется средней величиной /равной нулю/, среднеквадратичной величиной и корреляционной функцией. Внутри камеры находится нейтрон, первоначально поляризованный вдоль $\vec{H}_0$. Требуется определить изменение поляризации в зависимости от времени.

Как известно, зависимость поляризации от времени определяется величиной

$$P_z(t) = \int \psi^*(\vec{r}, t)\, \sigma_z\, \psi(\vec{r}, t)\, d^3r \,, \qquad /1/$$

где $\psi(\vec{r},t)$ является нормированным решением уравнения Шредингера, которое мы будем записывать в следующем виде:

$$i\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -[\,\Delta + \sigma_z + \vec{\sigma}\vec{\gamma}(\vec{r})\,]\,\psi(\vec{r},t)\,, \qquad /2/$$

т.е. в безразмерных переменных t, r и $\vec{\gamma} = \vec{H}_1(\vec{r})/H_0$. Чтобы избежать путаницы в дальнейшем, будем обычные размерные координаты и время отмечать квадратными скобками, т.е. $t=[t]/[t_0]$, $r=[r]/[r_0]$, где $[t_0]=\hbar/\mu_n H_0$, а $[r_0]=\hbar/\sqrt{2M_n\,\mu_n H_0}$. В поле $H_0=1$ *Гс* $[t_0]=1{,}0\cdot10^{-4}$ *сек* ? $[r_0]\approx2{,}0\cdot10^{-4}$ *см*.

Изменение поляризации характеризуется величиной

$$\delta P_z(t) = 1 - P_z(t)\,, \qquad /3/$$

поскольку при $t=0$ полагается $P_z(0)=1$. Решение уравнения /2/ и определение $P_z(t)$ даются в приложении А. Здесь же мы только обсудим результаты.

Согласно приложению А при $t<<1$ имеем $\delta P_z(t) = \frac{4}{3}\gamma_0^2 t^2$, где γ_0^2 - среднеквадратичная величина магнитных неоднородностей /отнесенных к величине однородного поля/. Однако времена $t<<1$ практически не интересны, поскольку они соответствуют $[t]<<[t_0]\approx1\cdot10^{-4}$ *сек* /$H_0\approx1$ *Гс*/. При $t>>1$ деполяризация растет линейно со временем

$$\delta P_z(t) = \frac{1}{3}\,\frac{\ell}{k}\,\gamma_0^2\,t\,\Big[\frac{\sqrt{2}}{1+\ell^2(k-k_1)^2/2}\Big] \quad \text{при } k\ell>>1\,, \qquad /4/$$

где ℓ - корреляционная длина /средний размер областей неоднородностей/, k, $k_1=\sqrt{k^2-2}$ - скорость нейтрона со спином вверх и вниз соответственно, а вид функции, заключенной в скобки, существенно зависит от выбора корреляционной функции неоднородностей. Здесь этот выбор сделан произвольно, исходя из соображений удобства и из тех соображений, что $\vec{\gamma}(\vec{r})$, вообще говоря, подчиняется уравнениям Максвелла, а значит, должна иметь корреляционную функцию, спадающую на бесконечности медленнее, чем гауссовская.

Выражение /4/ справедливо только до тех t, при которых $\delta P_z(t)$ остается меньше единицы. Соответствующее t_{max} равно

$$[t_{max}] \approx [t_0]\,\frac{\ell}{k}\,\frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{[\ell]}{[k][r_0]^2}\,\frac{[t_0]}{\gamma_0^2}\,. \qquad /5/$$

При $[\ell]\approx10$ *см*, $[k]\approx10^6$ *см*$^{-1}$, $\dfrac{[t_0]}{[r_0]^2}\approx3\cdot10^3$

получаем $[t_{max}]\approx0{,}03/\gamma_0^2$. Если $t>t_{max}$, то из формулы /4/ можно найти скорость деполяризации

$$W_{+-} = \frac{d\,\delta P_z(t)}{dt} \approx \frac{1}{3}\,\frac{\ell}{k}\,\gamma_0^2\,\frac{\sqrt{2}}{1+\ell^2(k-k_1)^2/2} = \frac{1}{k_+}\,f(k_-k_+)\,. \qquad /6/$$

Здесь значками $+-$ помечены величины, относящиеся к состоянию со спином вверх и вниз соответственно, W_{+-} - вероятность переворота спина из состояния вверх, а функция $f(k_+,k_-)$ включает в себя все множители, симметричные относительно перестановки $k_+ \longleftrightarrow k_-$. В пределе $t\to\infty$ должно установиться стационарное состояние, при котором числа переходов сверху вниз и обратно одинаковы:

$$N_+W_{+-} = N_-W_{-+}\,, \qquad /7/$$

где $N_\pm$ - число частиц в состояниях со спином вверх и вниз. Из уравнения /7/ сразу же вытекает

$$P_z(\infty) = \frac{N_+-N_-}{N_++N_-} = \frac{k_+-k_-}{k_++k_-}\,. \qquad /8/$$

В заключение этого пункта остается отметить, что если желательно за время хранения $[t]$ иметь деполяризацию не больше ϵ, то необходимо добиваться такой однородности поля, чтобы

$$\gamma_0^2 < \frac{0{,}03}{[t]}\,\epsilon\,. \qquad /9/$$

2. Обратимся теперь к конкретному эксперименту по измерению ЭДМ нейтрона методом раздельных полей [2]. Суть метода состоит в том, что поляризованные нейтроны запускаются в камеру, где на время t_0, достаточное для того, чтобы повернуть спин нейтрона в горизонтальную плоскость, включается радиочастотное поле с частотой, равной частоте прецессии спина в однородном поле H_0, созданном в той же камере. После того как спин повернется в горизонтальную плоскость, радиочастотное поле выключается и спин, продолжая прецессировать, все время остается в горизонтальной плоскости. Параллельно с магнитным полем в камере создается электрическое. Если нейтрон обладает ЭДМ $d = eD$, то в электрическом поле он будет испытывать дополнительную прецессию, и за время t угол прецессии изменится на дополнительную величину

$$\Delta\theta = \frac{eDE}{h} t . \qquad /10/$$

Через время t вновь включается радиочастотное поле, сдвинутое по фазе относительно угла прецессии спина таким образом, что при отсутствии дополнительного углового сдвига $\Delta\theta$ /10/ никакой поляризации вдоль оси z в результате действия радиочастотного поля в течение времени t_0 не возникает. При наличии дополнительного угла $\Delta\theta$ возникает поляризация

$$P_z = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = \frac{\Delta N}{N} \approx \Delta\theta , \qquad /11/$$

откуда определяется согласно /10/ величина D:

$$D = 2 \cdot 10^{-15} \frac{P_z}{E \cdot t} . \qquad /12/$$

В рассмотренной методике имеется несколько источников возможных ошибок. Обозначим через ϵ истинный эффект, тогда, вследствие неоднородностей магнитного поля, имеется дополнительный случайный угол прецессии χ на втором этапе и дополнительная случайная поляризация ΔP_z, возникающая на первом и третьем этапах. Кроме того, имеется статистическая ошибка. Если поляризация, измеряемая с помощью i-той частицы, есть $P_{zi} = \epsilon + \chi_i + \Delta P_{zi}$, то поляризация, измеряемая с помощью N частиц, есть $P_z = \epsilon + \sum_i (\chi_i + \Delta P_{zi}) / N$. Полагая χ_i и ΔP_{zi} статистически независимыми и учитывая статистическую ошибку, получаем, что чувствительность эксперимента можно охарактеризовать величиной

$$\Delta D = \frac{2 \cdot 10^{-15}}{tE} \left[\frac{\sqrt{1 + \overline{\chi^2} + \overline{(\Delta P_z)^2}}}{\sqrt{N}} \right] . \qquad /13/$$

Для достижения точности ΔD порядка 10^{-25} при $[t] \approx 100$ *сек* и $[E] \approx 50$ *кВ* второй фактор в /13/ не должен превышать 10^{-4}. Это значит, что $N > 10^8$, а $\overline{\chi^2}$ и $\overline{(\Delta P_z)^2}$ меньше 1.

Рассмотрим сначала $\overline{\chi^2}$. Как показано в приложении Б, угол прецессии, размывающийся вследствие неоднородностей, характеризуется дисперсией

$$\overline{\chi^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\ell}{k} \gamma_0^2 t . \qquad /14/$$

Требование $\overline{\chi^2} < 1$ показывает, что неоднородность γ_0 должна удовлетворять условию

$$\gamma_0 < \sqrt{\frac{[k][r_0]^2}{[\ell][t]} [t_0]} . \qquad /5/$$

При $[\ell] = 10$ *см*, $[k] = 10^6$ *см*$^{-1}$, $[t] = 100$ *сек*, $H_0 = 1$ *Гс* получаем

$$\gamma_0 < 10^{-4} , \qquad \text{или } |H_1| < 10^{-4} \text{ Гс} . \qquad /16/$$

3. Рассмотрим теперь вопрос о величине ΔP_z, появляющейся на первом, а значит, и на третьем этапе. Сразу же договоримся об обозначениях. Радиочастотное поле предполагается имеющим частоту 2ω и величину H_p, которая будучи "обезразмерена" величиной H_0, обозначается $\beta = H_p / H_0$.

Для простоты положим, что неоднородная часть поля направлена только по оси z и меняется в пространстве периодически:

$$\gamma = \gamma_z = 2\gamma \cos(\vec{p}\vec{r}) . \qquad /17/$$

Это предположение противоречит тому факту, что γ-магнитное поле и должно подчиняться уравнениям Максвелла, поскольку, согласно уравнениям Максвелла, если одна компонента поля меняется в пространстве, то должна существовать и другая компонента, также меняющаяся в пространстве, чтобы одновременно выполнялось $\mathrm{rot}\,\vec{\gamma} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{\gamma} = 0$. Однако здесь мы пренебрежем этим фактом, поскольку компоненты, перпендикулярные оси z, просто конкурируют с радиочастотным полем и приводят к деполяризации, уже рассмотренной в первом пункте.

С учетом выражения /17/ уравнение Шредингера при наличии радиочастотного поля принимает следующий вид:

$$i\frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -(\Delta + \sigma_z + \beta\sigma_x e^{-2i\omega\sigma_z t}\; 2\sigma_z\gamma\cos(\vec{p}\vec{r}))\,\psi(\vec{r},t). \qquad /18/$$

Здесь при $t > 0$ радиочастотное поле направлено вдоль оси x - это соответствует определенному выбору радиочастотной фазы. Наличие неоднородности в правой части уравнения приводит к следующему явлению. Если бы γ равнялось нулю, то пространственная зависимость $\psi(\vec{r},t)$ могла бы описываться взаимно ортогональными функциями $\psi^{\pm}_k$ $\int \psi^{*+}_k\, \psi^{-}_q\, d^3 r = \delta^3(q-k)$, в качестве которых можно было бы взять, например, плоские волны. При $\gamma \neq 0$ пространственная зависимость описывается функциями

$$\psi^{\pm}_{jk}(\vec{r}) = \Sigma A^{\pm}_{jn}\, e^{i(\vec{k}+n\vec{p})r} . \qquad /19/$$

Как показано в приложении В, функции ψ^{+}_{1k} и ψ^{-}_{2k}, например, уже неортогональны, причем мерой неортогональности служит величина

$$g \approx \frac{2\gamma}{(\vec{k}+\vec{p})^2 - \vec{k}^2} = \frac{\gamma}{\xi}; \quad \xi = \frac{(\vec{k}+\vec{p})^2 - \vec{k}^2}{2} (\gamma \ll \xi) , \qquad /20/$$

которая характерна для теории возмущений. В связи с этим оказываются возможными дополнительные переходы из состояния $\psi^{+}_{jk}(\vec{r})$ в состояние $\psi^{-}_{\ell k}(\vec{r})$ при $j \neq \ell$. В частности, переход $\psi^{+}_{1} \to \psi^{-}_{2}$ пропорционален g. Чтобы амплитуды этих дополнительных переходов были малы, необходимо иметь $g \ll 1$. Однако искомая величина ΔP_z в /13/ не полностью определяется параметром g. Если бы разности энергий между состояниями ψ^{+}_{1} и ψ^{-}_{2}, определенными в приложении В, были бы такими же, как между ψ^{+}_{1} и ψ^{-}_{1}, то дополнительный переход $\psi^{+}_{1} \to \psi^{-}_{2}$ поворачивал бы спин синхронно с основным переходом $\psi^{+}_{1} \to \psi^{-}_{1}$ и в результате избыточной поляризации ΔP_z могло не возникнуть. На самом деле обе разности уровней согласно /В5/ и /В7/ отличаются на $2\eta \approx \approx 2|\xi|$ /при $\gamma \ll \xi$ /, поэтому дополнительный переход имеет резонанс, смещенный относительно основного на величину порядка $2|\xi|$. Это значит, что при повороте спина в плоскость, перпендикулярную оси z, дополнительный переход поворачивает спин на угол, отличающийся от $\pi/2$ на величину порядка $|\xi|/\beta$, где β - амплитуда радиочастотного поля. Таким образом, величина ΔP_z, возникающая на первом этапе, оказывается порядка

$$\Delta P_z \approx \frac{\gamma}{\beta}; \quad \overline{(\Delta P_z)^2} \approx \frac{\gamma_0^2}{\beta^2} . \qquad /21/$$

Разумеется, последний результат справедлив только при достаточно малых $p \approx 1/\ell$, т.е. достаточно плавных неоднородностях, т.к. с уменьшением размеров неоднородных областей $\xi \to \infty$ и дополнительный резонанс далеко уходит от основного, а значит, и влияние его падает. Из /21/ следует, что если необходимо иметь $(\Delta P_z)^2 < 1$, то требуется, чтобы неоднородность была

$$\gamma < \beta . \qquad /22/$$

4. Все вышеизложенное показывает, что наиболее жесткое требование возникает на втором этапе /16/, при котором условие /22/, одинаковое как для первого, так и для третьего этапа, автоматически выполняется. Следует еще сказать несколько слов относительно величины

g/20/, которая тоже должна быть малой. При $[\ell] = 10$ *см*, $[k] = 10^6$ $см^{-1}$, $H_0 = 1$ *Гс* имеем $3\cdot 10^{-10} < \xi < 6\cdot 10^{-3}$, т.е. даже при выполнении условия /16/ всегда имеются такие направления движения, перпендикулярные к градиенту неоднородностей, при которых g может стать порядка единицы, т.е. $\xi \ll \gamma$ и дополнительный переход начнет играть существенную роль, однако при этом сдвиг дополнительного резонанса будет $\approx \gamma$, а значит, ΔP_z в этом случае тоже принимает значение $\Delta P_z \approx \gamma/\beta$.

Авторы приносят свою благодарность Ю.В.Тарану и В.И.Лущикову за полезные обсуждения, а также М.И.Подгорецкому, который заранее предсказал результаты, относящиеся к малым размерам неоднородностей. Авторы считают своим долгом отметить, что настоящая работа была инициирована Ф.Л.Шапиро.

Приложение А

Рассмотрим уравнение Шредингера, записанное в виде

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -(\Lambda + \sigma_z + \vec{\gamma}(\vec{r})\vec{\sigma})\psi(\vec{r},t). \qquad /A1/$$

Обозначим $\mathcal{H}_0 = -(\Lambda + \sigma_z)$ и перейдем к представлению взаимодействия, т.е. положим $\psi(\vec{r},t) = \exp(-i\mathcal{H}_0 t)\phi(\vec{r},t)$, тогда уравнение Шредингера перепишется следующим образом:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = \mathcal{H}_1(r,t)\ \phi(\vec{r},t), \qquad /A2/$$

где

$$\mathcal{H}_1(\vec{r},t) = e^{i\mathcal{H}_0 t}(-\vec{\gamma}\vec{\sigma})e^{-i\mathcal{H}_0 t}. \qquad /A3/$$

Решение уравнения /A2/ можно искать по теории возмущений. В первом порядке теории возмущений

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0(\vec{r}) - i\int_0^t \mathcal{H}_1(\vec{r},t')\,dt'\phi_0(\vec{r}), \qquad /A4/$$

где

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad /A5/$$

т.е. в начальный момент времени нейтрон предполагается поляризованным вдоль оси z и свободным. Удобно для дальнейшего волновую функцию $\phi(\vec{r},t)$ представлять в виде

$$\phi(\vec{r},t) = C_+(\vec{r},t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_-(\vec{r},t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad /A6/$$

тогда $C_+(\vec{r},0) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\vec{r}}$, $C_-(\vec{r},0) = 0$. Поляризация P_z по определению равна

$$P_z = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}, \qquad /A7/$$

где $N_\pm$ - число нейтронов со спином вверх и вниз соответственно,

$$N_\pm = \int_V |C_\pm(\vec{r},t)|^2 d^3r. \qquad /A8/$$

Функция $C_-(\vec{r},t)$ определяется из /A4/ с помощью соотношения

$$C_-(\vec{r},t) = (0\ 1)\ \phi(\vec{r},t) = -i\int_0^t (0\ 1)\,\mathcal{H}_1(\vec{r},t')\phi_0(\vec{r})\,dt'. \qquad /A9/$$

Оператор $\mathcal{H}_1(\vec{r},t)$ может быть представлен в виде произведения чисто спинорной части на координатную, поскольку σ_z коммутирует с Λ:

$$\mathcal{H}_1(r,t) = -e^{-i\Lambda t}\ \vec{\gamma}(\vec{r})\ e^{i\Lambda t}\,e^{-i\sigma_z t}\,\vec{\sigma}\,e^{i\sigma_z t}. \qquad /A10/$$

Выделяя из полного вектора $\vec{\sigma}$ часть $\vec{\sigma}^{\perp} = (\sigma_x, \sigma_y)$, перпендикулярную оси z, поскольку только σ_x и σ_y приводят к перевороту спина, и учитывая, что согласно коммутационным свойствам матриц σ

$$e^{-i\sigma_z t}\ \vec{\sigma}^{\perp}\ e^{i\sigma_z t} = \vec{\sigma}^{\perp}\ e^{2i\sigma_z t} \qquad /A11/$$

и, кроме того, $\sigma_z\ \phi_0(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r})$, получаем:

$$C_-(\vec r, t) = i\int_0^t [\gamma_x(\vec r, t') + i\,\gamma_y(r, t')]\, e^{2it'}\, dt' \cdot \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\vec k\vec r}\,, \qquad /A12/$$

где было использовано:

$$\vec\gamma^{\perp}(r,t) = e^{-i\Delta t}\,\vec\gamma^{\perp}(r)\,e^{i\Delta t}\,, \quad \vec\gamma^{\perp} = (\gamma_x, \gamma_y)\,.$$

Перейдем к фурье-представлению:

$$\vec\gamma(r) = \int \vec\gamma(\vec p)\, e^{i\vec p\vec r}\, d^3p\,. \qquad /A13/$$

Тогда, учитывая, что

$$e^{i\Delta t}\, e^{i\vec q\vec r} = e^{-iq^2 t}\, e^{i\vec q\vec r}\,, \qquad /A14/$$

получаем:

$$C_-(\vec r, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \int d^3p\, [\gamma_x(\vec p) + i\,\gamma_y(\vec p)]\, e^{i(\vec k+\vec p)\vec r}\, \frac{e^{2iQ_p t} - 1}{2iQ_p}\,, \qquad /A15/$$

где введено обозначение:

$$2Q_p = (\vec k + \vec p)^2 - \vec k^2 + 2\,. \qquad /A16/$$

Предположим теперь, что $\vec\gamma(\vec r)$ является случайной функцией, причем характеризует стационарный случайный процесс, тогда усреднение по ансамблю компонент $\gamma_i(\vec p)$ можно описать следующим образом:

$$\langle \gamma_i(\vec p)\rangle = 0\ ; \ \langle \gamma_i(\vec p)\,\gamma_j(\vec q)\rangle = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\gamma^2(\vec p)\,\delta(\vec p + \vec q)\,. \qquad /A17/$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, $\delta(\vec p + \vec q)$ - дельта-функция Дирака, а $\gamma^2(\vec p)$ - функция, которая определяется корреляционными свойствами $\langle \gamma_i(\vec r)\,\gamma_j(\vec r\,')\rangle$, а именно, если

$$\langle \gamma_i(\vec r)\,\gamma_j(\vec r\,')\rangle = \delta_{ij}\,\frac{\gamma_0^2}{3}\,K(\vec r - \vec r\,')\,, \qquad /A18/$$

где γ_0^2 - средний квадрат неоднородностей, а $K(\vec r - \vec r\,')$ - корреляционная функция, то

$$\gamma^2(\vec p) = \frac{\gamma_0^2}{(2\pi)^3} \int d^3r\, K(\vec r)\, e^{-i\vec p\vec r}\,, \qquad /A19/$$

причем $\gamma_0^2 = \int \gamma^2(\vec p)\, d^3p$. В дальнейшем удобно, не обращаясь к $K(\vec r - \vec r\,')$, сразу задавать функцию $\gamma^2(\vec p)$. Здесь, конечно, имеется большой произвол, однако качественно результаты не зависят от вида $\gamma^2(\vec p)$. Мы выберем функцию $\gamma^2(\vec p)$ вида

$$\gamma^2(\vec p) = \frac{\gamma_0^2}{\sqrt{\pi}}\; \frac{\ell^3}{(2\pi)^{3/2}}\; \frac{1}{(1 + \ell^2 p^2/2)^2}\,, \qquad /A2O/$$

где ℓ - корреляционная длина. Эта функция меняется при больших p медленнее, чем гауссовская, и получаемые с ее помощью результаты представляются более разумными. Кроме того, мы нигде выше не принимали во внимание, что $\vec\gamma(\vec r)$, вообще говоря, описывает магнитное поле, которое подчиняется уравнениям Максвелла, и поэтому не может быть чисто случайным. Случайность поля определяется случайностью источников, и это, как показывает более подробное рассмотрение, приводит к корреляционным функциям, дающим $\gamma^2(\vec p)$ вида, близкого к /A2O/. Возвращаясь к $C_-(\vec r, t)$, видим, что среднее $\langle N_-(t)\rangle$ можно представить в виде

$$\langle N_-(t)\rangle = \frac{2}{3}\int \gamma^2(\vec p)\, \frac{\sin^2 Q_p t}{Q_p^2}\, d^2p\,. \qquad /A21/$$

Поскольку полное число частиц $N_+ + N_-$ должно сохраняться, то $\langle N_+(t)\rangle = 1 - \langle N_-\rangle$ и поляризация $\langle P_z(t)\rangle$ согласно /A7/ равна

$$P_z(t) = -2\langle N_-(t)\rangle + 1\,. \qquad /A22/$$

При малых временах $t < 1$ можно положить $\sin^2 Q_p t/Q_p^2 \approx t^2$ и

$$\delta P_z(t) = 1 - P_z(t) = \frac{4}{3}\,\gamma_0^2 t^2\,. \qquad /A23/$$

При $t \gg 1$ можно положить $\sin^2 Q_p t/Q_p^2 \approx \frac{\pi}{2}\, t\,\delta(Q_p)$, тогда

$$\delta P_z(t) = \frac{4}{3}\,\frac{\pi}{2}\,t\,\frac{2\pi}{k}\int\limits_{k-k_1}^{k+k_1} p\,dp\,\gamma^2(p) \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2}}{3}\,\gamma_0^2\,\frac{\ell}{k}\left[1 + \frac{(k-k_1)^2\,\ell^2}{2}\right]^{-1} t\,, \qquad /A24/$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - 2}$ - импульс нейтрона после переворота спина. Выражение /A24/ справедливо, пока $\delta P_z < 1$, т.е. до

$$t = t_{max} = \frac{3}{\sqrt{2}}\;\frac{k}{\ell\cdot\gamma_0^2}\left[1 + \frac{(k-k_1)^2\,\ell^2}{2}\right]. \qquad /A25/$$

При $t > t_{max}$ можно ввести вероятность перехода в единицу времени:

$$W_- = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\gamma_0^2\,\frac{\ell}{R}\left[1 + \frac{(k-k_1)^2\,\ell^2}{2}\right]^{-1}. \qquad /A26/$$

Аналогично можно ввести и вероятность W_+. Если обозначить $k = k_+$, а $k_1 = k_-$, то легко видеть, что

$$W_{\frac{-}{+}} = \frac{f(k_+, k_-)}{k_\pm}. \qquad /A27/$$

Причем $f(x, y)$ - симметричная функция своих аргументов. При $t > t_{max}$ можно написать уравнения баланса:

$$\frac{dN_-}{dt} = W_- N_+ - W_+ N_-\,,$$

$$\frac{dN_+}{dt} = W_+ N_- - W_- N_+\,, \qquad /A28/$$

решение которых есть

$$N_- = \frac{k_-[1 - \exp(-\alpha t)]}{k_- + k_+}\,,$$

$$N_+ = \frac{k_+ + k_- \exp(-\alpha t)}{k_+ + k_-}\,; \quad \alpha = W_+ + W_-\,. \qquad /A29/$$

При $t\to\infty$ имеем отсюда $\quad P_z(\infty) = \dfrac{k_+ - k_-}{k_- + k_+}. \qquad /A30/$

Приложение Б

Чтобы учесть расплывание фазы прецессии, обусловленное неоднородностью магнитного поля $\gamma(\vec r)$, выполним все те же преобразования /A1-5/, что и в приложении A. Тем самым будет учтена прецессия в однородном поле. В качестве $\phi_0(r)$, однако, выберем теперь функцию

$$\phi_0(\vec r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{i\vec k\vec r}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad /Б1/$$

отвечающую поляризации, перпендикулярной оси z. Под действием возмущения, обусловленного неоднородностями, функция $\phi(r, t)$ становится равной

$$\phi(\vec r, t) = C_-(\vec r, t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_-(\vec r, t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \qquad /Б2/$$

Коэффициент $C_-(r, t)$ характеризует угол дополнительного поворота. При малом повороте и при отсутствии зависимости от координат он был бы просто равен половине угла дополнительной прецессии, поэтому в данном случае можно ввести среднеквадратичный угол дополнительной прецессии с помощью соотношения

$$\langle\chi^2\rangle = 4\int \langle|C_-(\vec r, t)|^2\rangle\, d^3r\,. \qquad /Б3/$$

Для нахождения $C_-(\vec r, t)$ воспользуемся выражением, аналогичным /A9/:

$$C_-(\vec r, t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\,(1, -1)\int\limits_0^t \mathcal{H}_1(\vec r, t')\,\phi_0(\vec r)\,dt'\,. \qquad /Б4/$$

В возмущении $\mathcal{H}_1(\vec r, t)$ дополнительную прецессию дает только член, пропорциональный σ_z, поскольку остальные члены приводят к возникновению поляризации вдоль оси z порядка γ_0^2 и ими можно пренебречь. Выполняя действия, аналогичные /А10 - 15/, получим

$$C_-(\vec{r},t) = i \int d^3p\, \gamma_z(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}+\vec{k})\vec{r}} \frac{e^{2iQ_{p0}} - 1}{2iQ_{p0}}, \qquad /Б5/$$

где $2Q_{p0} = (\vec{p}+\vec{k})^2 - k^2$. В соответствии с /А15/ и на основании /А20/ получаем

$$\langle\chi^2\rangle = \frac{4}{3}\int \gamma^2(p) \frac{\sin^2 Q_{p0}t}{Q^2_{p0}} d^3p = \qquad /Б6/$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\ell}{k}\gamma_0^2\, t\,[1 - (1+2k^2\ell^2)^{-1}] \approx \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\ell}{k}\gamma_0^2\, t .$$

В последнем приближенном равенстве было положено $k\ell \gg 1$, кроме того, t предполагалось значительно больше единицы. В связи с выражением /Б6/ интересно отметить тот факт, что при уменьшении размеров неоднородностей, т.е. при $\ell \to 0$, стремится к нулю и $\langle\chi^2\rangle$. Аналогичное замечание можно сделать и по отношению к выражению /А24/. Указанный факт имеет ясную физическую интерпретацию, а именно: нейтрон усредняет области пространства размерами порядка длины волны, поэтому, если размеры неоднородностей меньше длины волны, то нейтрон их вовсе не чувствует.

Приложение В

Чтобы не решать в лоб довольно сложное уравнение

$$i\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -[\Delta + \sigma_z + \beta\sigma_z e^{-2i\omega\sigma_z t} + 2\sigma_z\gamma\cos(\vec{p}\vec{r})]\psi(\vec{r},t), \quad /В1/$$

рассмотрим его в два этапа. Сначала положим $\beta = 0$, тогда никаких переходов между состояниями со спином вверх и вниз не будет и окажется возможным найти видоизменение волновых функций для разных спиновых состояний, обусловленное неоднородностью $2\gamma\sigma_z\cos(\vec{p}\vec{r})$. Рассмотрим сначала состояние со спином вверх и обозначим его волновую функцию через $\psi^+(\vec{r},t)$. Наличие неоднородности приводит к тому, что $\psi^+(r,t)$ можно представить в виде комбинации

$$\psi^+(r,t) = [A_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} + A_1 e^{i(\vec{k}+\vec{p})\vec{r}} + \ldots]\, e^{-i\Lambda^+ t}. \qquad /В2/$$

Мы пренебрежем в этом выражении всеми членами, кроме двух первых, т.к. это не изменит качественно окончательных выводов, а математику сильно упростит. Подстановка /В2/ в уравнение

$$i\frac{\partial\psi^+(\vec{r},t)}{\partial t} = -[\Delta + 1 + 2\gamma\cos(\vec{p}\vec{r})]\,\psi^+(\vec{r},t) \qquad /В3/$$

приводит к линейной однородной системе двух уравнений для коэффициентов A_0, A_1, условие разрешимости которой позволяет определить Λ^+ с помощью следующего уравнения:

$$\det\begin{pmatrix} \Lambda^+ - k^2 + 1 & \gamma \\ \gamma & \Lambda^+ - (\vec{k}+\vec{p})^2 + 1 \end{pmatrix} = 0 . \qquad /В4/$$

После выполнения всех необходимых действий получаем два значения Λ^+:

$$\Lambda^+_{1,2} = k^2 + \xi - 1 + \eta ,$$

$$\xi = \frac{(\vec{k}+\vec{p})^2 - k^2}{2}; \quad \eta = \sqrt{\xi^2 + \gamma^2}, \qquad /В5/$$

и соответствующие им волновые функции:

$$\psi_1^+(r) = \frac{1}{\sqrt{N}}[(\xi+\eta)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} + \gamma e^{i(\vec{k}+\vec{p})\vec{r}}],$$

$$\psi_2^+(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}}[-\gamma e^{i\vec{k}\vec{r}} + (\xi+\eta)\, e^{i(\vec{k}+\vec{p})\vec{r}}],$$

$$N = \sqrt{V}\sqrt{(\xi+\eta)^2 + \gamma^2} . \qquad /В6/$$

Чтобы получить соответствующие величины для спина вниз, нет нужды вновь повторять всю предыдущую процедуру. Достаточно заметить, что в уравнении, соответствующем /В3/, изменятся знаки перед единицей и γ. Отсюда сразу находим

$$\Lambda^{-}_{1,2} = k^2 + \xi + 1 \mp \eta ,$$

$$\psi^{-}_{1}(\vec r) = \frac{1}{\sqrt{N}}[(\xi+\eta)\, e^{i\vec k\vec r} - \gamma e^{i(\vec k+\vec p)\vec r}],$$

$$\psi^{-}_{2}(\vec r) = \frac{1}{\sqrt{N}}[\gamma e^{i\vec k\vec r} + (\xi+\eta)\, e^{i(\vec k+\vec p)\vec r}]. \qquad /B7/$$

Необходимо обратить внимание, что при $\gamma \to 0$

$$\psi^{+}_{1} \to \psi^{-}_{1} \to \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec k\vec r} ,$$

$$\psi^{+}_{2} \to \psi^{-}_{2} \to \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec k+\vec p)\vec r}. \qquad /B8/$$

Положим теперь $\beta \neq 0$, тогда начнутся переходы между $\psi^{+}_{i}(\vec r)$ и $\psi^{-}_{j}(\vec r)$. Матричные элементы этих переходов пропорциональны

$$M(i^{+} \to j^{-}) \approx \int \beta\, \psi^{*}_{j}(\vec r)\, \psi^{+}_{i}(\vec r)\, d^3 r . \qquad /B9/$$

Если бы γ равнялась нулю, то переходы были бы возможны только между состояниями ψ^{+}_{i} и ψ^{-}_{i}. Теперь же возможны и переходы типа ψ^{+}_{1} в ψ^{-}_{2}. Однако, как видно из /В6, В7, В9/, при $\gamma \ll \xi$

$$M(1^{+} \to 2^{-}) \approx \frac{\gamma}{\xi} , \qquad /B10/$$

соответственно вероятность перехода $W(1^{+} \to 2^{-})$ оказывается пропорциональной γ^2/ξ^2. Интересно отметить, что величина p, определяющая пространственное поведение неоднородности, связана с длиной корреляции ℓ ($p \approx 1/\ell$) при случайных неоднородностях. При $\ell \to 0$ имеем $\xi \to \infty$ и $\gamma^2/\xi^2 \to 0$. Это согласуется с тем фактом, что неоднородности усредняются по областям пространства порядка длины волны.

Литература

1. *Ф.Л.Шапиро. Сообщение ОИЯИ, Р3-7135, Дубна, 1973.*
2. *Ю.В.Таран. Сообщение ОИЯИ, Р3-7149, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
6 сентября 1974 года.