ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P4 - 8232

А.В.Матвеенко, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА

V. Рассеяние с учетом закрытого канала: упругое рассеяние $d\mu + p$ и $p\mu + p$, $d\mu + d$, $t\mu + t$ в нижнем состоянии сверхтонкой структуры мезоатомов

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8232

А.В.Матвеенко, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА

V. Рассеяние с учетом закрытого канала: упругое рассеяние $d\mu + p$ и $p\mu + p$, $d\mu + d$, $t\mu + t$ в нижнем состоянии сверхтонкой структуры мезоатомов

Направлено в ЖЭТФ

Матвеенко А.В., Пономарев Л.И., Файфман М.П. Р4 - 8232

Медленные столкновения в системе трех тел, взаимодействующих по закону Кулона.
V. Рассеяние с учетом закрытого канала: упругое рассеяние $d\mu+p$ и $p\mu+p$, $d\mu+d$, $t\mu+t$ в нижнем состоянии сверхтонкой структуры

Разработан метод вычисления сечений упругого рассеяния с учетом закрытого канала. Найдены сечения упругого рассеяния $d\mu+p$ и $p\mu+p$, $d\mu+d$, $t\mu+t$. Проведено сравнение с экспериментом и результатами прежних расчётов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Matveenko A.V., Ponomarev L.I., Feifman M.P. P4 - 8232

Slow Collisions in the System of Three Bodies Interacting by Coulomb Law

Two-channel scattering problem with one of the channel closed is solved for $d\mu+p$, $p\mu+p$, $d\mu+d$, $t\mu+t$ elastic scattering. A comparison with the previous experimental and theoretical data is made.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

ВВЕДЕНИЕ

Измерение констант слабого взаимодействия μ^--мезонов с ядрами изотопов водорода требует предварительного изучения таких мезоатомных процессов, как образование мезоатомов, перехват мезона ядрами более тяжелых изотопов, упругое рассеяние мезоатомов, образование мезомолекул, катализ ядерных реакций, переходы между уровнями сверхтонкой структуры мезоатомов и т.д./I, 2/. В предыдущих работах авторов/7/ решены некоторые из перечисленных задач и развиты соответствующие методы решения.

В данной работе исследуется упругое рассеяние мезоатомов при энергиях соударений меньше порога неупругих процессов с учетом влияния закрытого канала на открытый.

С помощью излагаемого ниже метода было вычислено сечение упругого рассеяния

$$d\mu + p \longrightarrow d\mu + p\ , \qquad (I)$$

а также сечения рассеяния

$$p\mu + p \to p\mu + p \qquad (2а)$$

$$d\mu + d \to d\mu + d \qquad (2б)$$

$$t\mu + t \to t\mu + t \qquad (2в)$$

в нижнем состоянии сверхтонкой структуры при энергиях, не превышающих энергию перехода в верхнее состояние. Экспериментальные /4, 5/ и теоретические/6, 7/ оценки этих сечений весьма разноречивы и в некоторых случаях различаются более чем на порядок величины (см. табл. I).

Представленные ниже результаты вычислений, учитывающие наличие порога неупругих процессов в реакциях упругого рассеяния (I, 2), получены на основе метода возмущенных стационарных состояний (В.С.С.), развитого в работах[7] для случая энергий столкновения, превышающих пороговую. Проведено сравнение с экспериментом и результатами прежних расчетов.

Постановка задачи

В двухуровневом приближении метода В.С.С. вычисление сечений процессов (I, 2) сводится к решению двухканальной задачи рассеяния[7]

$$\left[\frac{d^2}{dR^2}+k_1^2-\frac{L(L+1)}{R^2}\right]\Psi_1=V_{11}\Psi_1+V_{12}\Psi_2 \qquad (3)$$

$$\left[\frac{d^2}{dR^2}+k_2^2-\frac{L(L+1)}{R^2}\right]\Psi_2=V_{21}\Psi_1+V_{22}\Psi_2\ ,$$

где k_1 и k_2 – импульсы в соответствующих каналах реакции, V_{ij} – эффективные потенциалы, выражающиеся через симметричный $W_g(R)$ и антисимметричный $W_u(R)$ термы задачи двух центров, а также через матричные элементы $H_{\alpha\beta}(R)$ и $Q_{\alpha\beta}(R)$, $(\alpha,\beta)\equiv(g,u)$, учитывающие влияние движения мезона на относительное движение ядер[8, I4].

В матричном виде система уравнений (3) имеет вид

$$\mathcal{L}\Psi=V\Psi\ , \qquad (4)$$

где

$$V=D(2MW+H+Q^2)D^{-1}+P$$

$$P=\begin{pmatrix}k_1^2&0\\0&k_2^2\end{pmatrix}-B\begin{pmatrix}k_1^2&0\\0&k_2^2\end{pmatrix}B^{-1}\ , \qquad (5)$$

а матрицы W, H, Q имеют вид

$$W=\begin{pmatrix}W_u&0\\0&W_g\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}H_{uu}&H_{ug}\\H_{gu}&H_{gg}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&Q_{ug}\\Q_{gu}&0\end{pmatrix}.$$

Здесь введены обозначения:

$$D=BA\ ,\quad M=\frac{M_1M_2(M_\mu+M_1+M_2)}{M_\mu(M_1+M_2)^2}\ ; \qquad (5а)$$

M_μ – масса мезона, M_1 и M_2 – массы ядер, причем везде в дальнейшем $M_1\geqslant M_2$ [x]. Постоянная матрица A переводит набор молекулярных функций χ_g и χ_u задачи двух центров в набор функций χ_1 и χ_2, которые при $R\to\infty$ соответствуют правильным граничным условиям задачи рассеяния, т.е. переходят в волновые функции изолированных атомов с массами ядер M_1 и M_2:

$$\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\chi_u\\\chi_g\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Схема уровней энергии системы (3) в асимптотической области $R\to\infty$ представлена на рис. I.

x) При сравнении формул данной работы с аналогичными формулами работы[7] следует иметь в виду, что в них принято обратное условие: $M_1\leqslant M_2$. Во всех последующих расчетах использованы следующие значения масс[I7] (в единицах массы электрона): M_μ = 206,769; M_p = 1836,109; M_d = 3670,398; M_t = 5496,753.

Вид матрицы A определяется особенностями конкретной задачи/7/. Система уравнений для функций $\mathcal{X}_i$ эквивалентна системе (3), однако содержит члены вида $Q\frac{d\mathcal{X}}{dR}$, что неудобно при численных расчетах. Матрица $B=B(R)$ осуществляет переход от адиабатического ($\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$) к диабатическому (Ψ_1 и Ψ_2) представлению/9/, в котором градиентные члены отсутствуют, а эффективные потенциалы симметричны $V_{ij}=V_{ji}$:

$$\Psi = B\mathcal{X}$$

$$B(R)=\begin{pmatrix}\cos\rho & \sin\rho\\ -\sin\rho & \cos\rho\end{pmatrix}, \quad \rho=\int_R^\infty q_{12}(x)\,dx \tag{7}$$

(q_{12} – соответствующий матричный элемент матрицы $q=AQA^{-1}$).

Метод фазовых функций

Общее решение системы уравнений (4) ищем в виде/9, II/

$$\Psi=(uS_1+vS_2)C=(u+vT)S_1C \tag{8}$$

при условии, что для первой производной по R справедливо выражение

$$\Psi'=(u'S_1+v'S_2)C=(u'+v'T)S_1C\,. \tag{9}$$

Здесь u и v – диагональные матрицы, составленные из двух линейно независимых решений u_i и v_i дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}\Psi=0\,; \tag{I0}$$

$C=C(R)$ – матрица коэффициентов, определяющих нормировку волновой функции.

При дополнительном условии

$$S_1^TS_2-S_2^TS_1=0 \tag{II}$$

(S_i^T означает транспонированную матрицу S_i) матрицы S_i удовлетворяют уравнению

$$S_2^TS_1'-S_1^TS_2'=(S_1^Tu+S_2^Tv)V(uS_1+vS_2), \tag{I2}$$

а в остальном допускают довольно широкий произвол, который можно использовать для выбора различных параметризаций матрицы рассеяния S.

Наиболее часто используют параметризацию/I0/, при которой

$$\Psi=(u+vT(R))C_T(R) \tag{I3}$$

$$T(R)=S_2S_1^{-1}, \tag{I4}$$

а матрица рассеяния S связана с матрицей реакции T соотношением

$$S=(1+iT)(1-iT)^{-1}. \tag{I5}$$

Матрица реакции $T=T(\infty)$ определяется из уравнения

$$T'(R)=-[u+T(R)v]V[u+vT(R)], \tag{I6}$$
$$T(0)=0$$

после чего парциальные сечения различных каналов реакции вычисляются по формуле (i =I, 2):

$$\sigma_{ij}^L=\frac{4\pi}{k_i^2}(2L+1)\left|\frac{D_T\delta_{ij}+i\,t_{ij}^L}{(D_T-1)+i(t_{11}^L+t_{22}^L)}\right|^2, \tag{I7}$$

где

$$D_T=\det T^L=t_{11}^Lt_{22}^L-(t_{12}^L)^2\,.$$

В случае $\varepsilon>\Delta E$ (верхний канал открыт) в уравнении (I6) для определения T - матрицы в качестве фундаментальной системы решений u_i^L и v_i^L необходимо взять функции Рикатти-Бесселя/10/

$$u_i^L = \frac{1}{\sqrt{k_i}} j_L(k_i R) \to \frac{1}{\sqrt{k_i}} \sin\left(k_i R - \frac{\pi L}{2}\right)$$
$$v_i^L = -\frac{1}{\sqrt{k_i}} n_L(k_i R) \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{k_i}} \cos\left(k_i R - \frac{\pi L}{2}\right) \quad (18)$$

Соответствующая этому случаю программа вычислений реализована в работе/7/.

При $\varepsilon < \Delta E$ импульс в закрытом канале чисто мнимый $k_2 = i\varkappa$, а базисные функции $u_2 = j_L(i\varkappa R)$ и $v_2 = -n_L(i\varkappa R)$ и матричные элементы t_{12} и t_{22} - комплексные, что затрудняет непосредственное использование выражений (17). Как показано в Приложении I, в этом случае в качестве фундаментальных решений удобно выбрать действительные функции $(k \equiv k_1)$:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} j_L(kR), \quad \bar{v}_1 = -\frac{1}{\sqrt{k}} n_L(kR)$$
$$\bar{u}_2 = \frac{(-i)^{L+1}}{\sqrt{2\varkappa}}\left[j_L(i\varkappa R) - i n_L(i\varkappa R)\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\varkappa}} e^{\varkappa R} \quad (19)$$
$$\bar{v}_2 = \frac{i^{L+1}}{\sqrt{2\varkappa}}\left[j_L(i\varkappa R) + i n_L(i\varkappa R)\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\varkappa}} e^{-\varkappa R}.$$

Постановка этих функций вместо (18) в уравнение (16) позволяет найти матрицу реакции $\bar{T}(R)$, матричные элементы которой $\bar{t}_{ij}$ связаны с матричными элементами t_{ij} матрицы T соотношениями (см. Приложение I)

$$t_{11} = \bar{t}_{11} - \frac{\bar{t}_{12}^{\,2}}{\bar{t}_{22} - (-1)^L}$$
$$t_{12} = -(-i)^L \sqrt{2i} \cdot \frac{\bar{t}_{12}}{\bar{t}_{22} - (-1)^L} \quad (20)$$
$$t_{22} = -i \cdot \frac{\bar{t}_{22} + (-1)^L}{\bar{t}_{22} - (-1)^L}.$$

С учетом соотношений (20) выражение для парциального сечения σ_{11}^L упругого рассеяния в открытом канале следует непосредственно из формулы (17)[x)]

$$\sigma_{11}^L = \frac{4\pi}{k^2}(2L+1) \cdot \frac{\bar{t}_{11}^{\,2}}{1 + \bar{t}_{11}^{\,2}}. \quad (21)$$

Легко видеть, что при отождествлении $\bar{t}_{11} = tg\,\delta_L$ выражение (21) совпадает с сечением упругого рассеяния в одноканальном случае. Этот результат следовало ожидать заранее, поскольку при выборе базисных решений (19) из определения (8) следует, что решения $\bar{\Psi}_i$ уравнения (3), удовлетворяют граничным условиям задачи рассеяния при наличии закрытого канала:

$$\bar{\Psi}_1 = j_L(kR) - \bar{t}_{11} n_L(kR) \xrightarrow[R\to\infty]{} \sin\left(kR - \frac{\pi L}{2} + \delta_L\right)$$
$$\bar{\Psi}_2 = \bar{t}_{12}\,\bar{v}_2(\varkappa R) \xrightarrow[R\to\infty]{} \bar{t}_{12}\, e^{-\varkappa R},$$

откуда сразу следует указанное выше отождествление.

---

x) В работе используется система единиц $e = \hbar = m = 1$, причем $\frac{1}{m} = \frac{1}{M_\mu} + \frac{1}{M_1 + M_2}$. В этом случае для вычисления сечений в см^2 формулы (21) необходимо домножить на

$$a_m^2 = \left(\frac{M_\mu}{m}\right)^2 \cdot 6{,}55 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2.$$

Среди различных параметризаций матрицы $\overline{T}$ особенно удобной оказалась такая, при которой матрицы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ и решение $\overline{\Psi}$ имеют вид

$$\overline{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 \cos\varepsilon & -\sin\delta_1 \sin\varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\delta_2} \sin\varepsilon & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\delta_2} \cos\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \overline{S}_2 = \begin{pmatrix} \sin\delta_1 \cos\varepsilon & \cos\delta_1 \sin\varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\delta_2} \sin\varepsilon & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\delta_2} \cos\varepsilon \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\overline{\Psi} = \begin{pmatrix} F_{11} \cos\varepsilon & F_{12} \sin\varepsilon \\ F_{21} \sin\varepsilon & F_{22} \cos\varepsilon \end{pmatrix} \dot{\overline{C}}\,. \tag{23}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} F_{11} &= \overline{u}_1 \cos\delta_1 + \overline{v}_1 \sin\delta_1 \\ F_{12} &= -\overline{u}_1 \sin\delta_1 + \overline{v}_1 \cos\delta_1 \\ F_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{u}_2 e^{\delta_2} + \overline{v}_2 e^{-\delta_2}\right) \\ F_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{u}_2 e^{\delta_2} - \overline{v}_2 e^{-\delta_2}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Система уравнений для параметров $\delta_1, \delta_2, \varepsilon$ эквивалентная системе (I6), принимает теперь вид:

$$\delta_1' = -\frac{2}{1+\cos^2 2\varepsilon}\Big[V_{11}\left(F_{11}^2 \cos^4\varepsilon + F_{12}^2 \sin^4\varepsilon\right) + \frac{1}{4} V_{22}\left(F_{21}^2 + F_{22}^2\right)\sin^2 2\varepsilon + \\ + V_{12}\left(F_{11} F_{21} \cos^2\varepsilon + F_{12} F_{22} \sin^2\varepsilon\right)\sin 2\varepsilon\Big]$$

$$\delta_2' = -\frac{2}{1+\cos^2 2\varepsilon}\Big[V_{22}\left(F_{22}^2 \cos^4\varepsilon - F_{21}^2 \sin^4\varepsilon\right) + \frac{1}{4} V_{11}\left(F_{12}^2 - F_{11}^2\right)\sin^2 2\varepsilon + \\ + V_{12}\left(F_{12} F_{22} \cos^2\varepsilon - F_{11} F_{21} \sin^2\varepsilon\right)\sin 2\varepsilon\Big] \tag{25}$$

$$\varepsilon' = -\Big[\frac{1}{2}\left(V_{11} F_{11} F_{12} + V_{22} F_{21} F_{22}\right)\sin 2\varepsilon + \\ + V_{12}\left(F_{11} F_{22} \cos^2\varepsilon + F_{12} F_{21} \sin^2\varepsilon\right)\Big].$$

Все величины, входящие в эту систему уравнений, являются действительными. Ее особое удобство состоит в том, что она не содержит сингулярностей на всем интервале интегрирования /I0/.

При использовании параметров $\delta_1, \delta_2, \varepsilon$ сечение рассеяния по-прежнему вычисляется по формуле (2I) с учетом связи параметров

$$\overline{t}_{11} = \frac{tg\,\delta_1 - tg^2\varepsilon}{1 + tg^2\varepsilon \cdot tg\,\delta_1}\,, \tag{26}$$

которая следует из определений (I4) и (22).

При практических расчетах использованы обе системы уравнений (I6) и (25), причем для обеспечения точности $M^{-2} \sim 10^{-2}$ при вычислении сечений (2I) достаточно ограничить область интегрирования интервалом $0 \le R \le R_0 \approx 15\,0$, а вклад от области $R_0 \leqslant R < \infty$ оценить аналитически по формулам, приведенным в Приложении П. Там же указана асимптотика фазовых параметров при $R \to 0$, необходимая при интегрировании уравнений (I6) и (25).

В предельных случаях $k \to 0$ и $k \to \sqrt{2M\Delta E}$ вместо фазовых уравнений (I6) и (25) предпочтительнее интегрировать уравнения для параметров $a_{ij} = -\frac{t_{ij}}{\sqrt{k_i k_j}}$ (см. Приложение Ш)

Упругое рассеяние $d\mu + p \to d\mu + p$.

Изотопическая разность уровней энергии ΔE мезоатомов $d\mu$ и $p\mu$ в двухуровневом приближении метода В.С.С. в единицах задачи равна $\Delta E = \frac{\alpha}{2M}$ /7/, где $\alpha = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$. Это значение отличается от истинного $\Delta E_0 = \frac{\alpha}{2} \frac{M_\mu (M_1 + M_2)}{(M_\mu + M_1)(M_\mu + M_2)}$.
Однако, при той точности вычислений ($\sim 10^{-2}$), которая достаточна в большинстве расчетов, этим отличием $\Delta E - \Delta E_0 \approx \frac{\alpha M_\mu^2}{2}\left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2}\right)$ можно пренебречь.

Матрица A, осуществляющая переход (6) от молекулярных функций к атомным, в данном случае имеет вид

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (27)$$

причем при $R \to \infty$ функция χ_1 представляет систему $d\mu + p$ с энергией E_1 (см. рис. I), а функция χ_2 - систему $p\mu + d$ с энергией E_2. Импульсы в каналах реакции определяются формулами:

$$k_1^2 = 2M\varepsilon = k^2, \quad k_2^2 = k_1^2 - k_0^2 = -\varkappa^2, \quad k_0^2 = 2M\Delta E = \alpha, \qquad (28)$$

где ε - энергия столкновения (см. рис. I).

Эффективные потенциалы $V_{ij} = V_{ij}(R) - V_{ij}(\infty)$ по формулам (5) выражаются через термы $W_g(R)$, $W_u(R)$ и матричные элементы $H_{gg}(R)$, $H_{uu}(R)$, $H_{gu}(R)$, $H_{ug}(R)$, $Q_{gu}(R)$ задачи двух центров следующим образом (зависимость от аргумента R в правой части опускаем):

$$V_{11}(R) = 2M\left[\widetilde{W}_g \sin^2\left(\rho + \tfrac{\pi}{4}\right) + \widetilde{W}_u \cos^2\left(\rho + \tfrac{\pi}{4}\right)\right] + \\ + \tfrac{1}{2}\left(H_{gu} + H_{ug}\right)\cos 2\rho - Q_{gu}^2 + k_0^2 \sin^2\rho$$

$$V_{22}(R) = 2M\left[\widetilde{W}_g \cos^2\left(\rho + \tfrac{\pi}{4}\right) + \widetilde{W}_u \sin^2\left(\rho + \tfrac{\pi}{4}\right)\right] - \\ - \tfrac{1}{2}\left(H_{gu} + H_{ug}\right)\cos 2\rho - Q_{gu}^2 - k_0^2 \sin^2\rho \qquad (29)$$

$$V_{12}(R) = V_{21}(R) = M\left(\widetilde{W}_g - \widetilde{W}_u\right)\cos 2\rho + \tfrac{1}{2}\left(k_0^2 - H_{gu} - H_{ug}\right)\sin 2\rho,$$

где

$$\widetilde{W}_{g,u} = W_{g,u}(R) + \frac{1}{2M} H_{gg,uu}(R), \quad \rho = -\int_R^\infty Q_{gu}(R)\,dR.$$

Результаты численных расчетов при различных энергиях столкновения приведены на рис. 2 и рис. 3. При энергии столкновения $\varepsilon \approx 0{,}6$ эВ сечение упругого рассеяния реакции $d\mu + p$ имеет глубокий минимум, который является следствием эффекта Рамзауэра-Таунсенда в S-состоянии. Этот результат получен ранее в работе /3/, где минимум был найден при $\varepsilon \approx 0{,}2$ эВ. Существование указанного минимума весьма важно для интерпретации результатов опытов по изучению катализа ядерных реакций синтеза в смеси водорода и дейтерия /16/.

При энергиях столкновения $\varepsilon > 10$ эВ энергетическая зависимость парциального сечения $\sigma^{(0)}(\varepsilon)$ совпадает с вычисленной Коэном и др. /3/. Оказалось, однако, что, помимо S-фазы, существенный вклад в полное сечение вносит d-фаза, поскольку в состоянии с $L = 2$ рассеяние носит резонансный характер. Суммарное сечение почти на порядок отличается от сечения рассеяния в S - состоянии.

Упругое рассеяние в нижнем состоянии сверхтонкой структуры мезоатомов

При описании рассеяния в симметричном случае ($M_I = M_2$) с энергией соударений мезоатомов, близкой к тепловой ($\varepsilon \approx 0{,}04$ эв), необходимо учитывать наличие сверхтонкого расщепления ΔE уровней энергии мезоатомов водорода. При таких энергиях столкновения ($\varepsilon \lesssim \Delta E$) основной вклад в сечение рассеяния вносит s-волна. Если пренебречь спиновым взаимодействием ядер, то, кроме полного момента системы $\vec{J} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{S}$, уровни системы из двух ядер со спином $I_1 = I_2$ и мезона со спином $S = \frac{1}{2}$ при $R \to \infty$ допускают классификацию по значению полного момента $\vec{F} = \vec{I}_1 + \vec{S}$ изолированных мезоатомов $p\mu$, $d\mu$ и $t\mu$. Схема уровней на рис. I остается справедливой и в этом случае, причем уровень E_1 соответствует нижнему состоянию сверхтонкой структуры с полным моментом $F_1 = I_1 - \frac{1}{2}$, а уровень E_2 – верхнему состоянию с моментом $F_2 = I_1 + \frac{1}{2}$. При $\varepsilon < \Delta E$ возможны только процессы упругого рассеяния $F_1 \to F_1$, а процесс возбуждения $F_1 \to F_2$ энергетически невозможен. Однако малая величина расщепления ΔE приводит к тому, что закрытый канал E_2 существенно влияет на сечение упругого рассеяния в нижнем состоянии сверхтонкой структуры мезоатомов.

Система уравнений для описания этих процессов получена в работах Герштейна[6] и совпадает с системой (3). Поскольку в случае $M_1 = M_2$ $Q_{g u}(R) \equiv 0$, то матрица B равна единичной. Матрица A, преобразующая адиабатический базис в физический, выбирается таким образом, чтобы при $R \to \infty$ в равенстве (6) функция $\mathcal{X}_1$ соответствовала мезоатому в нижнем состоянии

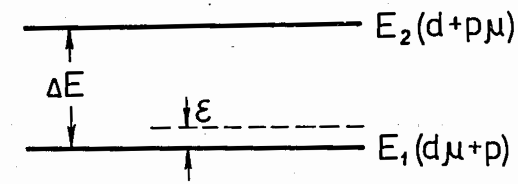

Рис. I. Схема уровней системы трех тел при $R \to \infty$. Энергия столкновения ε отсчитывается от нижнего уровня системы E_1.

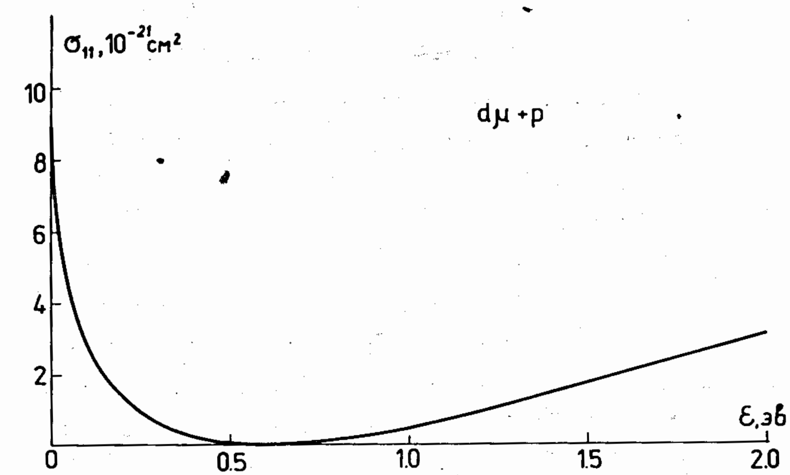

Рис. 2. Сечение упругого рассеяния $d\mu + p$ при малых энергиях столкновения ε. При $\varepsilon \approx 0{,}6$ eV имеет место глубокий минимум.

E_1 сверхтонкой структуры с моментом $F_1 = I_1 - \frac{1}{2}$, а функция χ_2 – в верхнем состоянии E_2 с моментом $F_2 = I_1 + \frac{1}{2}$. Системы фазовых уравнений (I6) и (25) остаются справедливыми и в этом случае, однако вид эффективных потенциалов различен в зависимости от значений J и F. Явный вид матриц A и потенциалов V для различных случаев приведены в работах/7/.

Для реакции $p\mu + p$ результаты вычислений приведены на рис. 4. При $\varepsilon \approx 0{,}06$ эВ сечение рассеяния в S - состоянии достигает максимума, $\sigma_{11}^{(0)} \approx 2{,}I \cdot I{,}0^{-22}$ см^2, затем становится аномально малым (минимум при $\varepsilon \approx 0{,}I6$ эВ соответствует эффекту Рамзауэра-Таунсенда) и вновь растет в подпороговой области, достигая в точке порога своего максимального значения на всем интервале $0 \leq \varepsilon \leq \Delta E$. Вклад p-волны (который в прежних работах не вычислялся) оказался существенным. Следует отметить, что вычисленное нами значение сечения аномально мало, на порядок величины меньше вычисленных ранее и на два-три порядка меньше экспериментальных оценок (см. таблицу I).

На рис. 5 представлена также величина $a_{11} = -\bar{t}_{11}/k_1$, которая при $k_1 \to 0$ совпадает с длиной рассеяния в процессе (2а). Легко видеть, что в данном случае использование понятия длины рассеяния в значительной мере бесполезно, поскольку не существует области энергий столкновения, в которой выполняется условие $a_{11} \approx const$. Поэтому все оценки прежних работ/6, 7/, использующие длины рассеяния, следует считать неудовлетворительными.

Результаты расчетов реакции $d\mu + d$ представлены на рис. 6 и 7. Сравнение с прежними данными (см. табл. I) показывает, что вычисленные нами сечения рассеяния процесса $d\mu + d$

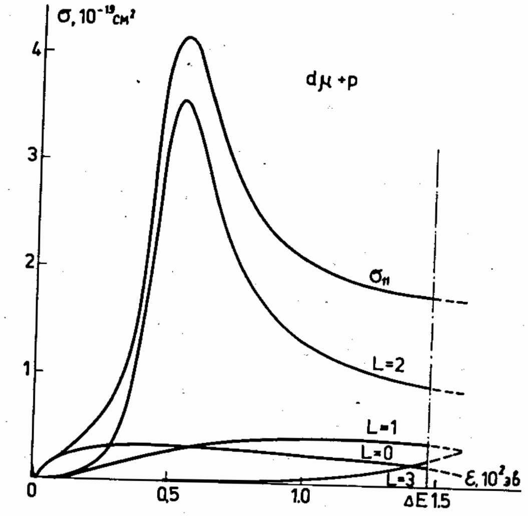

Рис. 3. Зависимость парциальных и полного сечений упругого рассеяния $d\mu + p$ от энергии столкновения при $\varepsilon < \Delta E$ (слева от штрихпунктирной линии) и при $\varepsilon > \Delta E$ (справа). Рассеяние в состоянии с L =2 носит резонансный характер.

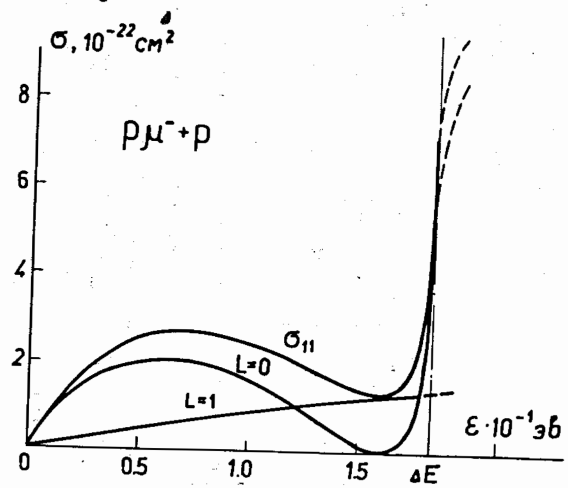

Рис. 4. Сечение упругого рассеяния $p\mu + p$ в нижнем состоянии сверхтонкой структуры.

Таблица I

Сечение упругого рассеяния $p\mu$ и $d\mu$ мезоатомов в нижнем состоянии сверхтонкой структуры

Процесс	σ_{11}	Джелепов и др. /4/	Alberigi et al. /5/	Cohen et al. /3/	Зельдович и Герштейн /1/	Матвеенко Пономарев /7/	Данная работа при ε=0,04 эв
$p\mu+p$	10^{-21} см^2	167±30	7,6±0,7	8,2	1,2	2,5	0,23
$d\mu+d$	10^{-19} см^2	4,15±0,29 / 1,5±0,5	0,55±0,20	3,5	3,3	1,8	2,1

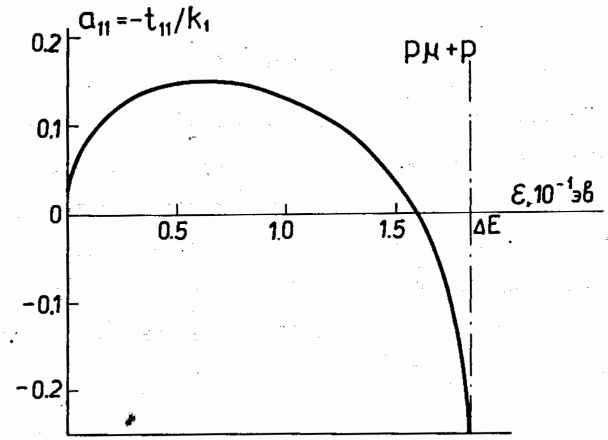

Рис. 5. График функции $a_{11}(\varepsilon)=-\bar{t}_{11}/k$. Условие $a_{11}\approx const$ не имеет места, т.е. понятие длины рассеяния в случае реакции $p\mu+p$ неприменимо.

хорошо согласуются с экспериментом [4] и теоретическими расчетами [7]. Длины рассеяния $a_{11} = -\bar{t}_{11}/k_1$ в подпороговой области меняются монотонно.

На рис. 8 представлены результаты расчетов реакции $t\mu + t$. Обращает на себя внимание пороговая особенность в сечении при энергии столкновения $\varepsilon = \Delta E$.

Обсуждение результатов

Из сравнения рис. 6 и 7 и таблицы I следует, что в нерезонансных ситуациях (реакция $d\mu + d$), когда выполняется условие $a_{11} \approx const$ (рис.7), в некоторой области энергий столкновения $0 < \varepsilon < \Delta E$ вычисленные нами сечения хорошо совпадают как с экспериментальными значениями, так и с результатами прежних расчетов. В этом случае оказывается возможным использовать разложение [15]

$$\frac{k}{\bar{t}_{11}} = -\frac{1}{a_{11}} + \frac{3\pi M}{2a_{11}^2} k + \frac{3M}{a_{11}} k^2 \ln \frac{9Mk^2}{32} \qquad (30)$$

и, вычислив из него $\bar{t}_{11}$, с хорошей точностью найти по формулам (2I) сечения во всей области $0 \le \varepsilon \le \Delta E$.

В резонансной ситуации (реакция $p\mu + p$), когда область применимости разложения (30) весьма ограничена (см. рис. 5), результаты наших вычислений сильно расходятся с прежними расчетами, которые выполнены в приближении длины рассеяния [6, 7]. Резонансный характер рассеяния $p\mu + p$ проявляется, в частности, в том, что уже небольшие поправки к эффективным потенциалам существенно сказываются на сечении. Например, учет асимптотики

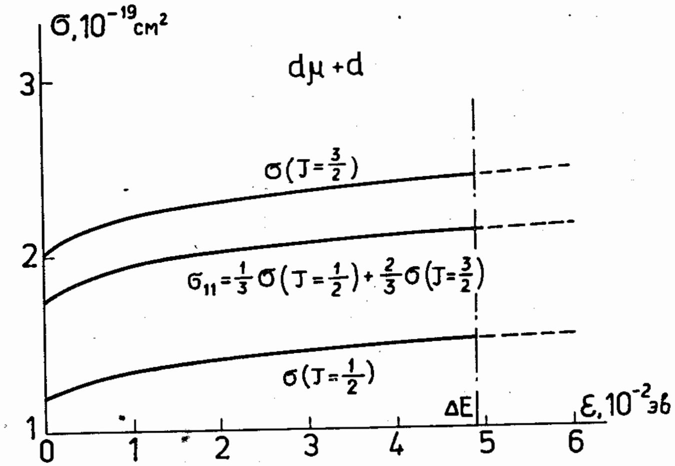

Рис. 6. Зависимость сечения упругого рассеяния $d\mu + d$ от энергии столкновения: $\sigma(J=3/2)$ и $\sigma(J=1/2)$ – сечения в состояниях с полным моментом $J = 3/2$ и $J = 1/2$, σ_{11} – суммарное сечение с учетом статистических весов уровня с моментом $F_1 = 1/2$ в статистической смеси состояний $J = 3/2$ и $J = 1/2$.

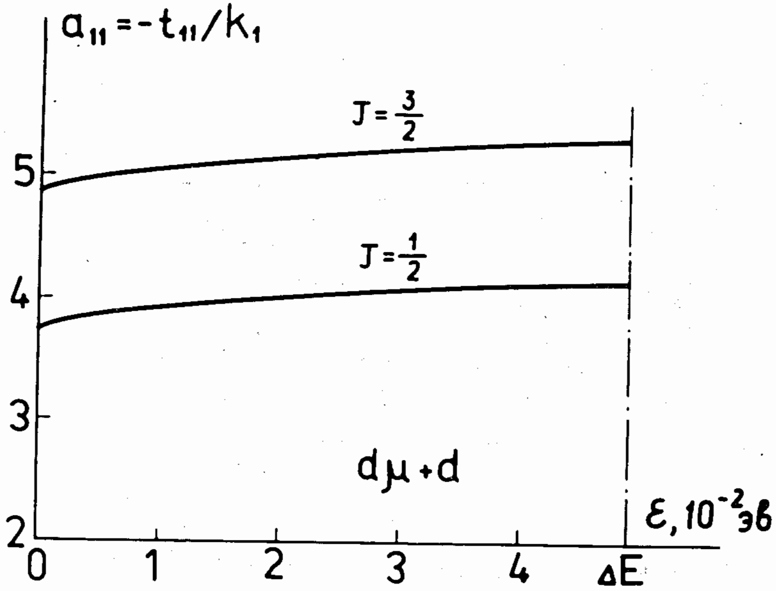

Рис. 7. График функции $a_{11}(\varepsilon) = -\bar{t}_{11}/k$ для реакции $d\mu + d$. Во всей области $0 < \varepsilon < \Delta E$ выполняется условие $a_{11} \approx const$.

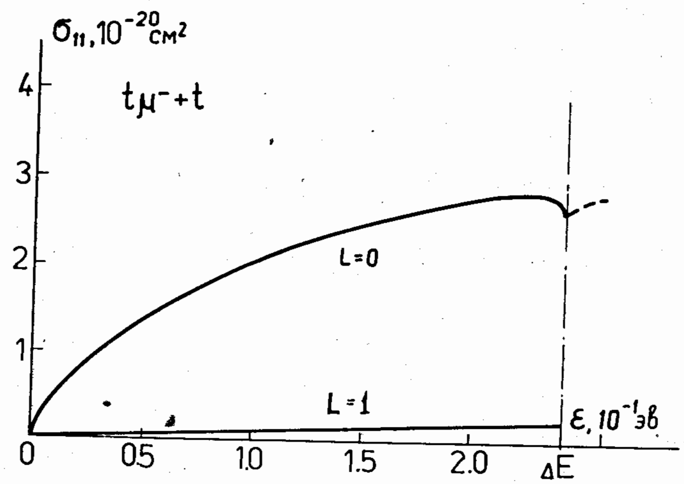

Рис. 8. Зависимость парциальных сечений реакции $t\mu + t$ от энергии столкновения. При $\varepsilon = \Delta E$ наблюдается пороговая особенность.

матричных элементов $H_{\alpha\beta}(R)$ в уравнениях (25) при $R>20$ (в прежних расчетах этими поправками пренебрегали) изменяет сечение рассеяния в I,5–2 раза. По-видимому, именно эта критическая зависимость сечений от формы потенциала является основной причиной расхождений между экспериментальными и вычисленными сечениями процесса $p\mu + p$, поскольку, как известно, в методе В.С.С. эффективные потенциалы $V_{ij}(R)$ определяются только с точностью $\sim M^{-1}$ включительно. Таким образом, сравнение расчетов и экспериментальных данных (между которыми также существуют серьезные расхождения, см. табл. I) следует отложить до того момента, когда в эффективных потенциалах $V_{ij}(R)$ будут аккуратно учтены все адиабатические поправки $\sim M^{-2}$ включительно.

Другим источником расхождений между вычисленными и измеренными значениями сечений может являться спин-спиновое взаимодействие мезонов и ядер при конечных значениях R, которое не учтено в потенциалах $V_{ij}(R)$ (в них включен только контактный член, существенный при $R=0$ и определяющий величину сверхтонкого расщепления уровней ΔE).

Заключение

Предложенный в данной работе метод расчета обладает достаточной общностью и применим для целого ряда задач, в которых необходимо учитывать влияние закрытого канала на процессы упругого рассеяния. Такой учет является особенно существенным в резонансных ситуациях, что хорошо иллюстрируется на примере процессов $p\mu + p$ и $d\mu + p$.

Авторам приятно поблагодарить С.С.Герштейна, В.П.Джелепова, Я.А.Смородинского и В.В.Фильченкова за постоянное внимание и интерес к работе.

Приложение I

Переход от набора (I8) базисных решений u_i и v_i к другому набору $\bar{u}_i$ и $\bar{v}_i$ в общем случае осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \bar{u} &= ua + vb \\ \bar{v} &= uc + vd , \end{aligned} \qquad (\text{П.I})$$

где $u=\{u_i\}$ и $v=\{v_i\}$ – диагональные матрицы базисных функций в обоих каналах реакции; a, b, c и d – диагональные числовые матрицы, выбор которых диктуется особенностями решаемой задачи и соображениями удобства. При этом связь матриц T и $\bar{T}$ осуществляется по формуле

$$T = (b + d\bar{T})(a + c\bar{T})^{-1} . \qquad (\text{П.2})$$

Если в качестве базисных решений выбраны функции (I9), то

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{L+1}\sqrt{\frac{i}{2}} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{L}\sqrt{\frac{i}{2}} \end{pmatrix}$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i^{L+1}\sqrt{\frac{i}{2}} \end{pmatrix} \cdot \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^{L}\sqrt{\frac{i}{2}} \end{pmatrix} . \qquad (\text{П.3})$$

Из (П.2) следует, что матричные элементы t_{ij} выражаются через $\bar{t}_{ij}$ по формулам (20). Обратные соотношения имеют вид:

$$\bar{t}_{11} = t_{11} + i\frac{t_{12}^2}{1 - it_{22}} , \quad \bar{t}_{12} = (-i)^L\sqrt{\frac{2}{i}}\,\frac{t_{12}}{1 - it_{22}} ,$$
$$\bar{t}_{22} = (-1)^{L+1}\frac{1 + it_{22}}{1 - it_{22}} . \qquad (\text{П.4})$$

Используя определения (I4) и (22), можно также получить явные выражения матричных элементов $\bar{t}_{ij}$ через параметры δ_1, δ_2 и ε :

$$\bar{t}_{11} = \frac{tg\,\delta_1 - tg^2\varepsilon}{1 + tg^2\varepsilon\, tg\,\delta_1}, \qquad \bar{t}_{22} = -\frac{e^{-2\delta_2}\left(1 - tg\,\delta_1 \cdot tg^2\varepsilon\right)}{1 + tg^2\varepsilon \cdot tg\,\delta_1}$$

$$\bar{t}_{12} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\delta_2}\, tg\,\varepsilon}{\cos\delta_1\left(1 + tg^2\varepsilon\, tg\,\delta_1\right)}, \tag{П.5}$$

а также обратную связь:

$$tg\,2\delta_1 = \frac{2D_{\bar{T}} + \bar{t}_{12}^{\,2}}{D_{\bar{T}}\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22}}, \qquad e^{4\delta_2} = \frac{1 + \bar{t}_{11}^{\,2}}{D_{\bar{T}}^2 + \bar{t}_{22}^{\,2}},$$

$$ctg^2\varepsilon = \frac{\bar{t}_{12}^{\,2}}{D_{\bar{T}}\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \sqrt{\left(1 + \bar{t}_{11}^{\,2}\right)\left(D_{\bar{T}}^2 + \bar{t}_{22}^{\,2}\right)}}. \tag{П.6}$$

В некоторых случаях удобно исключить центробежный член из оператора $\mathcal{L}$ и отнести его к эффективным потенциалам V /7,10/. В этом случае базисные функции выглядят значительно проще:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}}\sin kR & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\varkappa}}e^{\varkappa R} \end{pmatrix}, \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k}}\cos kR & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\varkappa}}e^{-\varkappa R} \end{pmatrix}. \tag{П.7}$$

Такому выбору базисных решений соответствует своя матрица реакции $\tilde{T}$ и свои параметры $\tilde{t}_{ij}$ или $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$, $\tilde{\varepsilon}$, которые связаны между собой соотношениями (П.5), (П.6) и могут быть найдены из систем уравнений типа (I6) и (25) после замен
$V(R) \to V(R) + \frac{L(L+1)}{R^2}$, $u \to \tilde{u}$, $v \to \tilde{v}$.

Сечение (2I) вычисляется при этом с учетом формулы

$$\bar{t}_{11} = \frac{\tilde{t}_{11}\cos\frac{\pi L}{2} + \sin\frac{\pi L}{2}}{\tilde{t}_{11}\sin\frac{\pi L}{2} - \cos\frac{\pi L}{2}}, \tag{П.8}$$

которая следует из соотношений типа (П.2).

В действительности для сокращения времени интегрирования матрицу $\bar{T}$ удобнее находить из условия сшивания логарифмических производных решений $\tilde{\Psi} = (\tilde{u}\tilde{S}_1 + \tilde{v}\tilde{S}_2)\tilde{C}$ и $\bar{\Psi} = (\bar{u}\bar{S}_1 + v\bar{S}_2)\bar{C}$ в точке $R_0 \gg 1$, где потенциалом $V(R)$ можно пренебречь по сравнению с центробежным членом. После некоторых преобразований окончательно получим

$$\bar{T} = \left(G\tilde{v} - \tilde{v}'\right)^{-1}\left(\tilde{u}' - G\tilde{u}\right), \tag{П.9}$$

где

$$G = \tilde{\Psi}'\tilde{\Psi}^{-1} = \bar{\Psi}'\bar{\Psi}^{-1}. \tag{П.10}$$

Представленные в настоящей работе результаты получены при выборе системы базисных решений в виде (П.7) с последующим переходом к матрице $\bar{T}$ по формулам (П.9).

Приложение II

При численном интегрировании системы уравнений (I6) или (25) необходимо знать асимптотику матричных элементов $\widetilde{t}_{ij}$ или $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$, $\widetilde{\varepsilon}$ при $R \to 0$ и $R \to \infty$. Поскольку матрица $\widetilde{T}$ выражается через $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$, $\widetilde{\varepsilon}$ (см. Приложение I), то приведем соответствующие формулы только для параметров $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$, $\widetilde{\varepsilon}$.

Преобразование (5) перепишем в виде

$$U = DKD^{-1} + P \,, \qquad (\text{П.II})$$

где

$$U(R) = V(R) + \frac{L(L+1)}{R^2}$$

$$K = 2MW + H + Q^2 + \frac{L(L+1)}{R^2} \,. \qquad (\text{П.I2})$$

При $R \to 0$ характер сингулярности матричных элементов $U_{ij}(R)$ определяется асимптотикой матричных элементов K_{ij}: /7/

$$K_{11} \to \frac{2M}{R} + \frac{2+L(L+1)}{R^2}, \quad K_{12} = K_{21} \to \frac{2Q_{gu}}{R}, \qquad (\text{П.I3})$$

$$K_{22} \to \frac{2M}{R} + \frac{L(L+1)}{R^2} \,,$$

где $Q_{gu} \equiv Q_{gu}(0)$. Соответствующие разложения для $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$ и $\widetilde{\varepsilon}$ имеют

$$\widetilde{\delta}_1 = k\left(\widetilde{\gamma}_1^{(1)} R + \widetilde{\gamma}_1^{(2)} R^2\right), \quad \widetilde{\delta}_2 = \varkappa\left(\widetilde{\gamma}_2^{(1)} R + \widetilde{\gamma}_2^{(2)} R^2\right) \qquad (\text{П.I4})$$

$$\varepsilon = \sqrt{k\varkappa}\left(\widetilde{\gamma}_3^{(1)} R + \widetilde{\gamma}_3^{(2)} R^2\right).$$

Коэффициенты $\widetilde{\gamma}_j^{(i)} = const$ находятся из соотношения

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \chi_u \\ \chi_g \end{pmatrix}, \qquad (\text{П.I5})$$

а также из равенств

$$\psi' \psi^{-1} = D\left(\chi' \chi^{-1} - Q\right) D^{-1}, \qquad (\text{П.I6})$$

которые следуют из формул (П.I5) и (7).

При решении системы дифференциальных уравнений (3) в базисе $\{\chi_{g,u}\}$ аналогичные коэффициенты $\gamma_j^{(i)}$ имеют простой вид:

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{-L - \frac{5}{2} + \sqrt{L + \frac{9}{4}}}{L+2}, \quad \gamma_2^{(1)} = \frac{-L - \frac{1}{2} + \sqrt{L + \frac{1}{4}}}{L}, \quad \gamma_3^{(1)} = \gamma_4^{(1)} = 0$$

$$\gamma_1^{(2)} = -\frac{M\left(1+\gamma_1^{(1)}\right)^2}{1 + (L+2)\left(1+\gamma_1^{(1)}\right)}, \quad \gamma_2^{(2)} = -\frac{M\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)^2}{1 + L\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)}, \qquad (\text{П.I7})$$

$$\gamma_3^{(2)} = -\frac{2Q_{gu}\left(1+\gamma_1^{(1)}\right)\gamma_2^{(1)}}{2 + (L+2)\left(1+\gamma_1^{(1)}\right) + L\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)}, \quad \gamma_4^{(2)} = -\frac{2Q_{gu}\left(2+\gamma_1^{(1)}\right)\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)}{2 + (L+2)\left(1+\gamma_1^{(1)}\right) + L\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)}$$

Представляя матрицу $D = BA$ в форме

$$D = \begin{pmatrix} \cos\bar{\rho} & \sin\bar{\rho} \\ -\sin\bar{\rho} & \cos\bar{\rho} \end{pmatrix} \qquad (\text{П.I8})$$

и полагая

$$\bar{\rho} = \rho + \Delta \,, \quad \Delta = const \,,$$

искомые коэффициенты $\widetilde{\gamma}_j^{(i)}$ можно выразить через $\gamma_j^{(i)}$ следующим образом:

$$\tilde{\gamma}_1^{(1)} = \gamma_1^{(1)} \sin^2\bar{\rho} + \gamma_2^{(1)} \cos^2\bar{\rho}, \quad \tilde{\gamma}_2^{(1)} = \gamma_1^{(1)} \cos^2\bar{\rho} + \gamma_2^{(1)} \sin^2\bar{\rho},$$

$$\tilde{\gamma}_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\gamma_2^{(1)} - \gamma_1^{(1)}\right)\cos^2\bar{\rho},$$

$$\tilde{\gamma}_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} \cos^2\bar{\rho} + \gamma_2^{(2)} \sin^2\bar{\rho} + \frac{1}{2}\left(\gamma_3^{(2)} + \gamma_4^{(2)}\right)\cos 2\bar{\rho},$$

$$\tilde{\gamma}_2^{(2)} = \gamma_1^{(2)} \sin^2\bar{\rho} + \gamma_2^{(2)} \cos^2\bar{\rho} - \frac{1}{2}\left(\gamma_3^{(2)} + \gamma_4^{(2)}\right)\cos 2\bar{\rho}, \tag{П.19}$$

$$\gamma_3^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\right)\cos 2\bar{\rho} + \gamma_3^{(2)}\cos^2\bar{\rho} - \gamma_4^{(2)}\sin^2\bar{\rho} - Q_{gu}\left(1+\gamma_1^{(1)}\right)\left(1+\gamma_2^{(1)}\right)$$

Учитывая поведение потенциалов K_{ij} при $R \to \infty$

$$K_{11} = K_{22} \to \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{9M}{2R^3}, \quad K_{12} = K_{21} = 0 \tag{П.20}$$

из системы уравнений (25) можно найти асимптотические разложения для параметров $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$, $\tilde{\varepsilon}$. Следует различать случаи $L=0$ и $L \neq 0$:

при $L=0$

$$\tilde{\delta}_2(R) \to -\varkappa R + \ln\frac{2\sqrt{2}}{3\varkappa\sqrt{M}} + 2\ln\varkappa R - \frac{1}{\varkappa R} \tag{П.21а}$$

$$\operatorname{ctg}\tilde{\varepsilon}(R) \to \operatorname{ctg}\tilde{\varepsilon}(R_0)\cdot e^{\tilde{\delta}_2(R)};$$

при $L \neq 0$

$$\tilde{\delta}_2(R) \to -\varkappa R + \ln\frac{2}{\sqrt{L(L+1)}} + \ln\varkappa R - \frac{1}{2\varkappa R} \tag{П.21б}$$

$$\operatorname{tg}\tilde{\varepsilon}(R) \to \operatorname{tg}\tilde{\varepsilon}(R_0)\, e^{\tilde{\delta}_2(R)},$$

где $R \gg R_0$.

Как видно из (П.21а) и (П.21б), при $R \to \infty$ система уравнений (25) распадается на независимые уравнения, что позволяет оценить вклад от области $R_0 \leq R < \infty$ при вычислении $\tilde{\delta}_1$

$$\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_1(R_0) + \frac{1}{2kR_0}\left[L(L+1) + \frac{3M}{2R_0^2}\right] + \frac{1}{(2kR_0)^2}\left[L(L+1) \pm \frac{9M}{2R_0^2}\right]\sin 2\left(kR_0 + \tilde{\delta}_1(R_0)\right)$$
$$+ \frac{2}{(2kR_0)^3}\left[L(L+1) \mp \frac{9M}{R_0^2}\right]\cos 2\left(kR_0 + \tilde{\delta}_1(R_0)\right), \tag{П.22}$$

где R_0 определяется из условия $2kR_0 > 1$ и $2\varkappa R_0 > 1$ при дополнительном требовании $\tilde{\delta}_1'(R_0) \leq 10^{-2}$. Нижний знак соответствует случаю $L=0$.

Приложение III

В предельных случаях $k\to 0$ или $\varkappa\to 0$ для случая s – рассеяния вместо матричных элементов $\bar t_{ij}$ сечения удобно выражать через параметры a_{ij}

при $k\to 0$

$$\bar t_{11} = -k a_{11}\,, \qquad \bar t_{12} = \sqrt{2kk_0}\, a_{12}\,; \tag{П.23}$$

при $\varkappa\to 0$

$$\bar t_{22} = -1 - 2\varkappa a_{22}\,, \qquad \bar t_{12} = \sqrt{2\varkappa k_0}\, a_{12}. \tag{П.24}$$

Подставляя эти разложения в фазовые уравнения (I6) для параметров Мак-Хейла-Тейлора и переходя к пределу $k\to 0$ или $\varkappa\to 0$ получим:

при $k\to 0$

$$a_{11}' = V_{11}(R-a_{11})^2 + V_{22}a_{12}^2 e^{-2k_0R} + 2V_{12}a_{12}(R-a_{11})e^{-k_0R}$$

$$a_{12}' = -\Big[V_{11}a_{12}(R-a_{11}) + V_{22}a_{12}\frac{1}{2k_0}e^{-k_0R}\big(e^{k_0R}+\bar t_{22}e^{-k_0R}\big) + V_{12}\Big(a_{12}^2 e^{-k_0R} + (R-a_{11})\frac{1}{2k_0}\big(e^{k_0R}+\bar t_{22}e^{-k_0R}\big)\Big)\Big] \tag{П.25}$$

$$\bar t_{22}' = -\Big[V_{11}\,2k_0 a_{12}^2 + V_{22}\frac{1}{2k_0}\big(e^{k_0R}+\bar t_{22}e^{-k_0R}\big)^2 + 2V_{12}a_{12}\big(e^{k_0R}+\bar t_{22}e^{-k_0R}\big)\Big];$$

при $\varkappa\to 0$

$$\bar t_{11}' = -\Big[V_{11}\frac{1}{k_0}\big(\sin k_0R + \bar t_{11}\cos k_0R\big)^2 + V_{22}k_0a_{12}^2 + 2V_{12}a_{12}\big(\sin k_0R + \bar t_{11}\cos k_0R\big)\Big]$$

$$a_{12}' = -\Big[V_{11}a_{12}\frac{1}{k_0}\cos k_0R\big(\sin k_0R + \bar t_{11}\cos k_0R\big) + V_{22}(R-a_{22})a_{12} + V_{12}\Big(a_{12}^2\cos k_0R + (R-a_{22})\frac{1}{k_0}\big(\sin k_0R + \bar t_{11}\cos k_0R\big)\Big)\Big] \tag{П.26}$$

$$a_{22}' = V_{11}a_{12}^2\cos^2 k_0R + V_{22}(R-a_{22})^2 + 2V_{12}(R-a_{22})a_{12}\cos k_0R.$$

Формулы для сечений (2I) при этом также упростятся:

$$\sigma_{11} = 4\pi a_{11}^2 \qquad \text{при } k\to 0$$

$$\sigma_{11} = \frac{4\pi}{k^2}\frac{\bar t_{11}^2}{1+\bar t_{11}^2} \qquad \text{при } \varkappa\to 0 \tag{П.27}$$

Из уравнения для a_{11} (П.25) непосредственно видно, что при больших k_0 влияние закрытого канала на открытый экспоненциально мало.

Литература

I. Я.Б.Зельдович, С.С.Герштейн. УФН, 71, 3, 58I, I960.

2. С.С.Герштейн, В.И.Петрухин, Л.И.Пономарев, Ю.Д.Прокошкин. УФН, 97, 3, I969.

3. S.Cohen, D.L.Judd, R.J.Riddel. Phys. Rev., 119, 386, 1960.

4. В.П.Джелепов, П.Ф.Ермолов, В.И.Москалев, В.В.Фильченков, М.Фримл. ЖЭТФ, 47, I243, I964;
В.П.Джелепов, П.Ф.Ермолов, В.В.Фильченков. ЖЭТФ, 49, 393, I965;
В.П.Джелепов, П.Ф.Ермолов, В.И.Москалев, В.В.Фильченков, ЖЭТФ, 50, I235, I966.

5. A.Alberigi, Quaranta, A.Bertin, G.Matone, F.Palmonari, A.Placci, P.Dalpiatz, G.Torelli, E.Zavattini. Nuovo Cim., 47B, 72, 1967.

6. С.С.Герштейн. ЖЭТФ, 34, 463, I958; ЖЭТФ, 40, 698, I96I.

7. А.В.Матвеенко, Л.И.Пономарев. ЖЭТФ, 57, 2084, I969; ЖЭТФ, 58, I640, I970; ЖЭТФ, 59, I953, I970; ТМФ, I2, 64, I972.

8. Л.И.Пономарев, Т.П.Пузынина. Препринт ОИЯИ Р-5040, Дубна, I970, ЖЭТФ 52, I273, I967.

9. А.В.Матвеенко. ЖЭТФ, 65, 2I67, I973.

IO. В.В.Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике, М., Наука, I968.

II. G.J.Kynch. Proc. Phys. Soc., 465, 83, 1952.

I2. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, I97I.

I3. В.Б.Беляев, С.С.Герштейн, Б.Н.Захарьев, С.П.Ломнев. ЖЭТФ, 37, I652, I959.

I4. G.Hunter, B.F.Gray, H.O.Prichard. J.Chem. Phys., 45, 3806, 1966.

I5. Н.Ф.Мотт, Г.Ю.Месси. Теория атомных столкновений, М., Мир, I969.

I6. L.W.Alwarez, H.Brander, et al., Phys. Rev., 105, 1127, 1957.

I7. B.N.Taylor, W.H.Parker, D.H.Landenberg. Rev. Mod.,Phys., 41, 375, 1969.
И.П.Селинов. Изотопы, т.3, М., Наука, I970.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 августа I974 года