СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 8150

И.Г.Бранков, Н.С.Тончев

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОН-ДЫРОЧНОГО СПАРИВАНИЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8150

И.Г.Бранков, Н.С.Тончев

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОН-ДЫРОЧНОГО СПАРИВАНИЯ

Бранков И.Г., Тончев Н.С.

Р4 - 8150

Точно решаемая модель сверхпроводника с учетом электрон-дырочного спаривания

Получено асимптотически точное решение для модели однозонного металла при одновременном учете куперовского и электрон-дырочного спаривания. В рассмотренном случае наполовину заполненной зоны найдена область сосуществования диэлектической и сверхпроводящей фаз. При сделанных предположениях наличие структурного фазового перехода не приводит к увеличению критической температуры сверхпроводника.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Brankov I.G., Tonchev N.S.

P4 - 8150

An Exactly Soluble Model for Superconductors with Electron-Hole Coupling

An asymptotically solution is obtained for an one-band model of a metal with BCS-type and electron-hole interactions taken into account simultaneously. In the considered case of half-field band, a region of co-existence of excitonic and superconducting phases is found. Under the assumed conditions, the existence of structural phase transition does not lead to a higher superconducting critical temperature.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

§I. Введение

В последнее время появился ряд работ, посвященных исследованию влияния электрон-дырочного спаривания на температуру сверхпроводящего фазового перехода /I-6/. В работах /I,3/ рассмотрение проводилось на основе гамильтониана Фрелиха для однозонного металла с электронным спектром $\epsilon(\vec{k})$, удовлетворяющим условию $\epsilon(\vec{k}) = -\epsilon(\vec{k}+\vec{Q})$ при некоторых выделенных квазиимпульсах $\vec{Q}$:

$$\mathcal{H}_{\text{Фрелих}} = T_0 + V_Q + \mathcal{H}' \quad , \tag{I}$$

где

$$T_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} [\epsilon(\vec{k}) - \mu]\, a^+_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} + \hbar\omega(Q)\, b^+_{\vec{Q}} b_{\vec{Q}} \quad ;$$

$$V_Q = \frac{g(Q)}{\Omega^{1/2}} \sum_{\vec{k},\sigma} a^+_{\vec{k}+\vec{Q},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} (b_{\vec{Q}} + b^+_{-\vec{Q}}) \quad , \tag{2}$$

$$\mathcal{H}' = {\sum_{\vec{q}}}' \hbar\omega(q)\, b^+_{\vec{q}} b_{\vec{q}} + \frac{1}{\Omega^{1/2}} \sum_{\vec{k},\sigma} {\sum_{\vec{q}}}' g(q)\, a^+_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} (b_{\vec{q}} + b^+_{-\vec{q}}) .$$

Здесь $a^+_{\vec{k},\sigma}, a_{\vec{k},\sigma}$ и $b^+_{\vec{q}}, b_{\vec{q}}$ - операторы электронов и фононов, соответственно, μ - химический потенциал, Ω - объем системы, а ${\sum_{\vec{q}}}'$ означает суммирование по всем квазиимпульсам $\vec{q}$, за исключением $\vec{q} = \vec{Q}$. Квазиимпульс $\vec{Q} = \frac{\pi}{a}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ специально выделен, так как при $\vec{q} = \vec{Q}$ имеется логарифмическая особенность в поляризационном операторе фононов, которая приводит к неустойчивости кристаллической структуры, и при определенной температуре в системе происходит фазовый переход металл-диэлектрик. В последней части $\mathcal{H}'$ гамильтониана (I) путем обычной процедуры исключения фононных переменных выделялось эффективное электрон-электронное притяжение, ответственное за сверхпроводящее спаривание. При этом сохранялись только те члены, которые дают логарифмическую особенность в поляризационном операторе электронов, т.е. члены, соответствующие взаимодействию Бардина-Купера-Шриффера (БКШ). Таким образом, в системе, описываемой гамильтонианом (I), возможны фазовые переходы двух типов: металл-диэлектрик и металл-сверхпроводник. Наиболее подробно вопрос о существовании и взаимном влиянии диэлектрической и сверхпроводящей фаз в модели изотропного полуметалла изучался в работе /6/. Было показано, что повышение температуры сверхпроводящего перехода возможно либо в случае легированного полуметалла, когда концентрации электронов и дырок не равны друг другу, либо в случае однозонного металла /3/, когда учитывается взаимодействие не только ближайших соседей на кристаллической решетке, но и следующих за ближайшими. В работе /6/ утверждалось, что в рамках рассматриваемой авторами модели сосуществование обеих фаз возможно только при наличии легирования, а при отсутствии последнего в системе существует либо чистая S -фаза (сверхпроводящая), либо чистая D -фаза (диэлектрическая). Необходимо отметить, что все расчеты проводились с использованием аппарата функций Грина, и для получения замкнутой системы уравнений совершалось некоторое приближенное расщепление функций Грина высших порядков.

В работах Н.Н.Боголюбова (мл.) /7-8/ был предложен метод асимптотически точного решения некоторых задач статистической физики, содержащих четырехфермионное взаимодействие. Авторам (совместно с В.А.Загребновым) удалось расширить класс модельных систем, для которых применим метод, развитый в работах /7-8/, на случай гамильтонианов, содержащих неограниченные по норме операторы /9-I0/. Так, например, в работе /I0/ было показано, что статистическая задача с гамильтонианом $T_0 + V_Q$ имеет асимптотически точное решение.

Учитывая сказанное выше, мы будем рассматривать систему, в которую, кроме V_q, включено и четырехфермионное парное взаимодействие типа БКШ:

$$V_{BCS} = -\frac{g_s^2}{2\Omega} \sum_{\substack{\vec{K},\sigma \\ \vec{K}',\sigma'}} \lambda(\vec{K},\sigma)\lambda(\vec{K}',\sigma')\, a^+_{\vec{K},\sigma} a^+_{-\vec{K},-\sigma} a_{-\vec{K}',-\sigma'} a_{\vec{K}',\sigma'} \quad , \qquad (3)$$

где

$$\lambda(\vec{K},\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma & , |\epsilon(\vec{K}) - \mu| \le \theta_D \\ 0 & , |\epsilon(\vec{K}) - \mu| > \theta_D \end{cases} \qquad (4)$$

и θ_D - параметр обрезания порядка температуры Дебая. Взаимодействие вида (3) подробно изучалось при исследовании модельных задач теории сверхпроводимости /7,8,II-I3/.

Итак, рассматриваемая нами здесь модельная система задается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = T_0 + V_Q + V_{BCS} \quad . \qquad (5)$$

Покажем сначала, что термодинамическая задача с гамильтонианом (5) допускает точное решение.

§2. Доказательство существования асимптотически точного решения

Введем, для удобства, следующие ограниченные по норме операторы:

$$
\begin{aligned}
J_d^+ &= (J_d)^+ = \frac{1}{\Omega}\sum_{\vec{k},\sigma} a^+_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}\, a_{\vec{k},\sigma} \quad ,\\
J_s^+ &= (J_s)^+ = \frac{1}{\Omega}\sum_{\vec{k},\sigma} \lambda(\vec{k},\sigma)\, a^+_{\vec{k},\sigma}\, a^+_{-\vec{k},-\sigma} \quad .
\end{aligned} \tag{6}
$$

После несложных преобразований гамильтониан (5) может быть представлен тождественно в виде:

$$
\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s) + \mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s) \quad , \tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s) = {} & \hbar\omega(Q)\,\widetilde{b}^+_{\vec{q}}\widetilde{b}_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k},\sigma}[\epsilon(\vec{k})-\mu]\,a^+_{\vec{k},\sigma}a_{\vec{k},\sigma} - \\
& - \frac{g^2(Q)}{\hbar\omega(Q)}\,\Omega\left(J_d^+\eta_d + J_d\eta_d^* - |\eta_d|^2\right) - \\
& - \frac{1}{2}g_s^2\,\Omega\left(J_s^+\eta_s + J_s\eta_s^* - |\eta_s|^2\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s) = {} & g(Q)\,\Omega^{1/2}\left[(J_d^+-\eta_d^*)\widetilde{b}_{\vec{q}} + (J_d-\eta_d)\widetilde{b}^+_{\vec{q}}\right] - \\
& - \frac{1}{2}g_s^2\,\Omega\,(J_s^+-\eta_s^*)(J_s-\eta_s) \quad ,
\end{aligned} \tag{9}
$$

и η_d, η_s – произвольные параметры, которые будут определены ниже. "Новые" бозе-операторы $\widetilde{b}^+_{\vec{q}}$, $\widetilde{b}_{\vec{q}}$ выражаются через "прежние" посредством соотношений

$$
\begin{aligned}
\widetilde{b}^+_{\vec{q}} &= b^+_{\vec{q}} + \frac{g(Q)\,\Omega^{1/2}}{\hbar\omega(Q)}\,\eta_d^* \quad ;\\
\widetilde{b}_{\vec{q}} &= b_{\vec{q}} + \frac{g(Q)\,\Omega^{1/2}}{\hbar\omega(Q)}\,\eta_d \quad .
\end{aligned} \tag{10}
$$

Перегруппировка членов в гамильтониане $\mathcal{H}$ была произведена с целью выделения квадратичной по ферми-и бозе-операторам формы $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)$ таким образом, чтобы "остаточный" гамильтониан $\mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s)$ при соответствующем выборе η_d и η_s давал асимптотически малый вклад в плотность свободной энергии системы (5):

$$
f_\Omega[\mathcal{H}] = -\frac{kT}{\Omega}\ln Sp\, e^{-\mathcal{H}/kT} \quad .
$$

Для оценки разности удельных свободных энергий систем (7) и (8) воспользуемся теоремой Н.Н.Боголюбова (доказательство см. в /8/):

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\Omega}\langle\mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s)\rangle_0 & \leqslant f_\Omega[\widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)] - f_\Omega[\mathcal{H}] \leqslant \\
& \leqslant -\frac{1}{\Omega}\langle\mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s)\rangle \quad ,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $\langle\cdots\rangle$ и $\langle\cdots\rangle_0$ – термодинамические средние с гамильтонианами $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)$, соответственно. Заметим сразу, что

$$
-\frac{1}{\Omega}\langle\mathcal{H}_1(\eta_d,\eta_s)\rangle_0 = \frac{1}{2}g_s^2\langle(J_s^+-\eta_s^*)(J_s-\eta_s)\rangle_0 \geqslant 0 ,
$$

и поэтому

$$
f_\Omega[\widetilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)] - f_\Omega[\mathcal{H}] \geqslant 0 . \tag{12}
$$

Следовательно, наилучшую аппроксимацию к функции $f_\Omega[\mathcal{H}]$ получаем, выбирая значения параметров η_d, η_s из условия абсолютного минимума удельной свободной энергии аппроксимирующей системы (8):

$$f_\Omega[\tilde{\mathcal{H}}_0(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)] = \min_{(\eta_d,\eta_s)} f_\Omega[\tilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)] \quad . \tag{13}$$

Условие (13) приводит к уравнениям самосогласования:

$$\begin{aligned} \eta_d &= \langle J_d \rangle_0 \quad , \\ \eta_s &= \langle J_s \rangle_0 \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда, в частности, видно, что решения $\bar{\eta}_d, \bar{\eta}_s$ системы уравнений (14) всегда ограничены по модулю:

$$|\bar{\eta}_d| \leq \|J_d\| \leq 2 \quad ; \quad |\bar{\eta}_s| \leq \|J_s\| \leq 2 \quad .$$

Учитывая последние неравенства, перейдем к оценке правой части (11). Имеем:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\Omega}\langle \mathcal{H}_1(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)\rangle\right| \leq\ & 2|g(Q)|\left|\left\langle (J_d^+ - \bar{\eta}_d^*)\frac{b_{\vec{q}}}{\sqrt{\Omega}}\right\rangle\right| + \\ & + \frac{4g^2(Q)}{\hbar\omega(Q)}\left|\langle (J_d^+ - \bar{\eta}_d^*)\rangle\right| + \frac{1}{2}g_s^2\langle (J_s^+ - \bar{\eta}_s^*)(J_s - \bar{\eta}_s)\rangle \quad . \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя далее неравенство Н.Н.Боголюбова /13/

$$|\langle AB\rangle| \leq \langle AA^+\rangle^{1/2}\langle B^+B\rangle^{1/2} \quad ,$$

находим

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\Omega}\langle \mathcal{H}_1(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)\rangle\right| \leq\ & \frac{1}{2}g_s^2\langle (J_s^+ - \bar{\eta}_s^*)(J_s - \bar{\eta}_s)\rangle + \\ & + 2|g(Q)|\left[\frac{2|g(Q)|}{\hbar\omega(Q)} + \left\langle\frac{b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}}}{\Omega}\right\rangle^{1/2}\right]\langle (J_d^+ - \bar{\eta}_d^*)(J_d - \bar{\eta}_d)\rangle^{1/2} \quad . \end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что равномерную по Ω ограниченность среднего $\left\langle\frac{b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}}}{\Omega}\right\rangle$ можно показать при помощи способа, предложенного в работе /9/*/:

$$\left\langle\frac{b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}}}{\Omega}\right\rangle \leq L \quad , \quad L = const.$$

Процедура введения источников и оценки корреляторов в правой части неравенства (16) подробно описана в работах /7-9/. Действуя аналогичным образом, получим:

$$\left|f_\Omega[\tilde{\mathcal{H}}_0(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)] - f_\Omega[\mathcal{H}]\right| \leq \varepsilon_\Omega \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} 0 \quad ; \quad \varepsilon_\Omega = O\left(\frac{1}{\Omega^{1/4}}\right). \tag{17}$$

Так как гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}_0(\eta_d,\eta_s)$ (см. (8)) квадратичен по ферми-и бозе-операторам, то функция $f_\Omega[\tilde{\mathcal{H}}_0(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)]$ может быть явно вычислена, и в силу оценки (17) она определяет предельное значение плотности свободной энергии исходной системы (5).

§3. Термодинамика электронной системы

Как следует из выражения (8), плотность свободной энергии аппроксимирующей системы представляет собой сумму вкладов свободных фононов $\tilde{b}_{\vec{q}}^+, \tilde{b}_{\vec{q}}$ и эффективно взаимодействующих между собой электронов /10/:

$$f_\Omega[\tilde{\mathcal{H}}_0(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)] = \frac{kT}{\Omega}\ln\left[1 - e^{-\frac{\hbar\omega(Q)}{kT}}\right] + f_\Omega[\mathcal{H}_0(\bar{\eta}_d,\bar{\eta}_s)] \quad . \tag{18}$$

---

*/ Вспомогательный гамильтониан T (см. /9/) в рассматриваемом здесь случае нужно выбрать в виде:

$$T = T_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega(Q)\, b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} - \frac{2g^2(Q)}{\hbar\omega(Q)}\,\Omega\, J_d^+ J_d + V_{acs} \quad .$$

В дальнейшем предметом нашего рассмотрения будет электронная подсистема $\mathcal{H}_0(\bar\eta_d,\bar\eta_s)$, гамильтониан которой перепишем в более удобном виде:

$$\mathcal{H}_0(\Delta,S) = \frac{1}{2}\sum_{\vec p,\sigma} \Psi^+_{\vec p,\sigma}\hat A_{\vec p\sigma}\Psi_{\vec p\sigma} + \frac{1}{2}\Omega\left(\frac{|\Delta|^2}{g_d^2}+\frac{|S|^2}{g_s^2}-2\mu\right) \quad (19)$$

где: $g_d^2 = \frac{2g^2(Q)}{\hbar\omega(Q)}$, $\Delta = g_d^2\bar\eta_d$, $S = g_s^2\bar\eta_s$; суммирование по $\vec p$ проводится по половине первоначальной зоны Бриллюэна, определяемой соотношением $\epsilon(\vec p)<0$ */. Кроме того, введены следующие обозначения:

$$\Psi^+_{\vec p,\sigma} = \left(a^+_{\vec p,\sigma} \;,\; a^+_{\vec p+\vec Q,\sigma} \;,\; a_{-\vec p,-\sigma} \;,\; a_{-\vec p+\vec Q,-\sigma} \right);$$

$$\hat A_{\vec p,\sigma} = \begin{pmatrix} -|\epsilon(\vec p)|-\mu & -Re\,\Delta & -S\lambda(\vec p,\sigma) & 0 \\ -Re\,\Delta & |\epsilon(\vec p)|-\mu & 0 & -S\lambda(\vec p+\vec Q,\sigma) \\ -S^*\lambda(\vec p,\sigma) & 0 & |\epsilon(\vec p)|+\mu & Re\,\Delta \\ 0 & -S^*\lambda(\vec p+\vec Q,\sigma) & Re\,\Delta & -|\epsilon(\vec p)|+\mu \end{pmatrix}.$$

Заметим, что без ущерба для общности величины Δ и S можно считать вещественными /6,8/.

Ограничимся здесь исследованием случая наполовину заполненной зоны, т.е. положим $\mu=0$. Тогда, в силу определения (4), имеем:

$$\lambda(\vec p,\sigma) = \lambda(\vec p+\vec Q,\sigma) = \begin{cases} sign\,\sigma, & |\epsilon(\vec p)| \le \theta_D \\ 0, & |\epsilon(\vec p)| > \theta_D \end{cases} \quad (20)$$

*/ Тогда $\vec p+\vec Q$ пробегает вторую половину зоны Бриллюэна: $\epsilon(\vec p+\vec Q)>0$.

Гамильтониан (19) при $\mu=0$ диагонализуется с помощью канонического преобразования

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec p,\sigma} \\ \alpha_{\vec p+\vec Q,\sigma} \\ \alpha^+_{-\vec p,-\sigma} \\ \alpha^+_{-\vec p+\vec Q,-\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec p} & \tilde\Delta_{\vec p} v_{\vec p} & \tilde S_{\vec p\sigma} v_{\vec p} & 0 \\ -v_{\vec p} & \tilde\Delta_{\vec p} u_{\vec p} & \tilde S_{\vec p\sigma} u_{\vec p} & 0 \\ 0 & -\tilde S_{\vec p\sigma} u_{\vec p} & \tilde\Delta_{\vec p} u_{\vec p} & v_{\vec p} \\ 0 & \tilde S_{\vec p\sigma} v_{\vec p} & -\tilde\Delta_{\vec p} v_{\vec p} & u_{\vec p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec p\sigma} \\ a_{\vec p+\vec Q,\sigma} \\ a^+_{-\vec p,-\sigma} \\ a_{-\vec p+\vec Q,-\sigma} \end{pmatrix},$$

где

$$u_{\vec p} = \frac{1}{\sqrt2}\sqrt{1+\frac{|\epsilon(\vec p)|}{E(\vec p)}} \;;\; v_{\vec p} = \frac{1}{\sqrt2}\sqrt{1-\frac{|\epsilon(\vec p)|}{E(\vec p)}};$$

$$\tilde\Delta_{\vec p} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2+S^2\lambda^2(\vec p,\sigma)}} \;;\; \tilde S_{\vec p,\sigma} = \frac{S\lambda(\vec p,\sigma)}{\sqrt{\Delta^2+S^2\lambda^2(\vec p,\sigma)}} \;;$$

$$E(\vec p) = \sqrt{\epsilon^2(\vec p)+\Delta^2+S^2\lambda^2(\vec p\sigma)} \quad . \quad (21)$$

Диагонализированный гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H}_0(\Delta,S) = \sum_{\vec p,\sigma}\left[-E(\vec p)\alpha^+_{\vec p,\sigma}\alpha_{\vec p,\sigma} + E(\vec p)\alpha^+_{\vec p+\vec Q,\sigma}\alpha_{\vec p+\vec Q,\sigma}\right] + \frac{1}{2}\Omega\left(\frac{\Delta^2}{g_d^2}+\frac{S^2}{g_s^2}\right) \quad . \quad (22)$$

Теперь, используя (22), находим следующее выражение для плотности свободной энергии аппроксимирующей системы:

$$f_\Omega[\mathcal{H}_0(\Delta,S)] = -\frac{kT}{\Omega}\sum_{\vec p\sigma} \ln\left[1+e^{E(\vec p)/kT}\right] - \frac{kT}{\Omega}\sum_{\vec p,\sigma}\ln\left[1+e^{-E(\vec p)/kT}\right] + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{g_d^2} + \frac{1}{2}\frac{S^2}{g_s^2} \;, \quad (23)$$

причем значения параметров Δ и S определяются из уравнений самосогласования:

$$\frac{2}{\Omega}\sum_{\vec{p}}\frac{\Delta}{E(\vec{p})}\,th\,\frac{E(\vec{p})}{2kT}=\frac{\Delta}{g_d^2}\quad,$$
$$\frac{2}{\Omega}\sum_{\vec{p}}\frac{S\lambda^2(\vec{p},\sigma)}{E(\vec{p})}\,th\,\frac{E(\vec{p})}{2kT}=\frac{S}{g_s^2}\quad. \tag{24}$$

Выясним при каких значениях констант взаимодействия существует совместное нетривиальное решение ($\Delta\neq 0$ и $S\neq 0$) уравнений (24). Исследование проведем в приближении постоянной плотности состояний, т.е. совершим переход:

$$\frac{2}{\Omega}\sum_{\vec{p}}\;\rightarrow\;\frac{1}{w}\int_0^{w}d\epsilon\quad,$$

где $2w$ – ширина зоны. Тогда вместо (24) получаем уравнения:

$$\int_0^{\theta_D}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2+S^2}}\,th\,\frac{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2+S^2}}{2kT}+\int_{\theta_D}^{w}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}}\,th\,\frac{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}}{2kT}=\frac{w}{g_d^2}\quad;$$
$$\int_0^{\theta_D}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2+S^2}}\,th\,\frac{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2+S^2}}{2kT}=\frac{w}{g_s^2}\quad. \tag{25}$$

При $T=0$ система уравнений (25) имеет решение в области значений констант взаимодействия, заданной условием:

$$\frac{2}{1+\varepsilon^2+(1-\varepsilon^2)\sqrt{1+S_0^2/\theta_D^2}}\leqslant\frac{\Delta_0}{S_0}\leqslant 1\;, \tag{26}$$

где $\varepsilon=\theta_D/w$, и величины

$$\Delta_0=w/sh\,\frac{w}{g_d^2}\quad,\quad S_0=\theta_D/sh\,\frac{w}{g_s^2}$$

отвечают значениям энергетических щелей в чистой диэлектрической и чистой сверхпроводящей фазах, соответственно. При

этом основным состоянием аппроксимирующей системы является состояние смешанного типа, в котором оба параметра порядка Δ и S отличны от нуля [*] и определяются выражениями:

$$\Delta^2=\theta_D^2\,\frac{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\sqrt{1+a^2}}{\varepsilon^2a^2}\quad;$$
$$S^2=S_0^2-\Delta^2\quad, \tag{27}$$

где:

$$a=sh\left(\frac{w}{g_d^2}-\frac{w}{g_s^2}\right)>0\quad.$$

Отметим, что при реалистическом выборе параметров в гамильтониане (5), когда $\varepsilon\ll 1$, $\frac{S_0^2}{\theta_D^2}\ll 1$ и $\frac{\Delta_0^2}{w^2}\ll 1$, область существования диэлектрической и сверхпроводящей фаз (26) становится весьма узкой:

$$1-\frac{1}{4}\frac{S_0^2}{\theta_D^2}\leqslant\frac{\Delta_0}{S_0}\leqslant 1 \tag{26a}$$

и выражения для щелей (27) принимают вид:

$$\Delta\cong\sqrt{S_0^2-4\theta_D^2\left(1-\frac{\Delta_0}{S_0}\right)}\quad;$$
$$S\cong 2\theta_D\sqrt{1-\frac{\Delta_0}{S_0}}\quad. \tag{27a}$$

Как нетрудно видеть, $S\leqslant S_0$ во всей области сосуществования фаз, т.е. наличие диэлектрического спаривания уменьшает величину сверхпроводящей щели в спектре.

Заметим, что хотя $\Delta_0\leqslant S_0$, в области (26) критическая температура чистой D -фазы $T_{0\Delta}$ может быть больше критической температуры чистой S -фазы T_{0S} .

---

[*] В случае строгих неравенств в (26) $\Delta\neq 0$ и $S\neq 0$. На границах области один из параметров порядка, а именно тот, которому соответствует наименьшая константа взаимодействия, обращается в нуль.

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае наполовину заполненной зоны ($\mu=0$) температура исчезновения сверхпроводящей щели T_s при наличии электрон-дырочного спаривания ($\Delta\neq0$) не превосходит T_{0s}. Для этого положим в (25) $S\to0$ и представим второе уравнение в виде:

$$\int_0^{\theta_D/2kT_s} \frac{th\sqrt{x^2+(\Delta/2kT_s)^2}}{\sqrt{x^2+(\Delta/2kT_s)^2}}\,dx = \int_0^{\theta_D/2kT_{0s}} \frac{th\,x}{x}\,dx\,. \qquad (28)$$

Подынтегральная функция в левой части (28) меньше $\frac{th\,x}{x}$ при любых x. Отсюда следует, что $T_s<T_{0s}$.

§4. Обсуждение

Представляет интерес сравнение найденного нами асимптотически точного решения для модельной задачи (5) в случае $\mu=0$ с результатами предыдущих работ /3,6/.

Прежде всего необходимо отметить, что более последовательный учет отсутствия куперовского спаривания между электронами с энергией, превышающей θ_D (см. (3), (4)), позволил выявить область совместного существования двух параметров порядка Δ и S. Это обстоятельство отчетливо видно из сравнения уравнений самосогласования настоящей работы и работы /3/. Так, например, в первом из уравнений (25), благодаря наличию обрезающих факторов $\lambda(\vec{p},\sigma)$ в гамильтониане (5), сверхпроводящая щель S выпадает из выражения для энергии квазичастичных возбуждений $E(\vec{p})$ (см. (21)) при интегрировании в области

$\theta_D<\epsilon\leq w$. Если этого не учесть, то, принимая во внимание второе уравнение, мы получили бы, что нетривиальное решение возможно только в случае, когда $S_0=\Delta_0$. Очевидно, это отличие не оказывает влияния на выводы о воздействии диэлектрического спаривания на температуру сверхпроводящего перехода T_s, так как при этом в уравнениях для определения T_s параметр порядка S устремляется к нулю.

При исследовании критической температуры и области сосуществования двух фаз на примере точно решаемой модели типа (5) несомненный интерес представлял бы также учет ряда существенных факторов, например, искажения спектра электронов, вызванного влиянием соседей, следующих за ближайшими, отклонения от наполовину заполненной зоны и т.д.

Наконец заметим, что использованный здесь метод переносится без особых изменений на случай полуметалла и на квазиодномерные системы /I4/.

Авторы признательны В.А.Загребнову за многочисленные и плодотворные дискуссии, Н.Н.Боголюбову (мл.) за внимание к работе, а также Ю.В.Копаеву и Р.Х.Тимерову за полезные обсуждения на начальном этапе работы.

Литература

1. D.C.Mattis, W.D.Langer. Phys.Rev.Lett., 25, 376 (1970).
2. S.C.Lo, K.W.Wong. Nuovo Cim., 10B, 361, 383 (1972).
3. Ю.В.Копаев, Р.Х.Тимеров. ЖЭТФ, 63, 290 (1972).
4. А.Г.Аронов, Э.Б.Сонин. ЖЭТФ, 63, 1059 (1972).
5. Б.А.Волков, Ю.В.Копаев. ЖЭТФ, 64, 2184 (1973).
6. А.И.Русинов, До Чан Кат, Ю.В.Копаев. ЖЭТФ, 65, 1984 (1973).
7. N.N.Bogolubov (Jr). Physica 32, 933 (1966).
8. Н.Н.Боголюбов (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов, "Наука", 1974.
9. Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. Препринт ОИЯИ, Р4-7735, Дубна, 1974.
10. Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. Препринт ОИЯИ, Р4-7917, Дубна, 1974.
11. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников. ЖЭТФ, 39, 120 (1960).
12. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960.
13. Н.Н.Боголюбов. Сб. Статистическая физика и квантовая теория поля, "Наука", 1973.
14. Ю.А.Бычков, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. ЖЭТФ, 50, 78 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июля 1974 года.