ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 8121

Б.Н.Захарьев, А.А.Сузько

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР И ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ СКОРОСТИ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8121

Б.Н.Захарьев, А.А.Сузько

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЛЕКТИВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР И ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ СКОРОСТИ

Направлено в ЯФ

Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Р4 - 8121

Обратная задача для процессов с возбуждением коллективных состояний ядер и для потенциалов, зависящих от скорости

Показано, что по данным рассеяния можно восстановить "оптический" потенциал ядра $V(\vec{r})$, его радиальную и угловую зависимости, несмотря на вращения и колебания мишени, усложняющие картину взаимодействия налетающих частиц с ядром.

Обратная задача формулируется также для потенциалов, зависящих от $\hat{p}^2$ ($\hat{p}$ - оператор импульса).

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Р4 - 8121

Zakhariev B.N., Suzko A.A.

Inverse Problem for Processes with Excitation of Nuclear Collective States and Reconstruction of Velocity Dependent Potentials

It is shown that it is possible to reconstruct from scattering data the "optical" potential of the nucleus $V(\vec{r})$, its radial and angular dependences, in spite of the target rotation and vibration which make more complicated the picture of interaction of scattering particles with nuclei.

The inverse scattering problem for velocity dependent potentials (depending on $\hat{p}^2$) is also formulated.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

1. Введение

На первом этапе развития теории обратной задачи рассеяния в квантовой механике исследовались лишь системы 2х частиц /или частицы во внешнем поле/. Сначала разрабатывался аппарат восстановления потенциала, обладающего сферической симметрией, затем его удалось обобщить на случай поля произвольной конфигурации /см. книгу В.А.Марченко [1] и обзор Л.Д.Фаддеева [2] /.

Таким образом, были созданы предпосылки для перехода к построению по данным рассеяния гамильтонианов более сложных объектов.

В работах [3-6] показано, что обратную задачу можно в принципе сформулировать и для систем с числом частиц больше двух ($n \geq 3$) .

Иногда свойства многочастичных комплексов с удовлетворительной точностью описываются с помощью коллективных переменных .

В настоящем сообщении обсуждается проблема определения /по матрице рассеяния/ поля мишени, представляющей собой тело, способное вращаться и совершать колебательные движения. Такой мишенью может служить, например, ядро /атом, молекула/, рассматриваемое в приближении коллективной модели. По сравнению со случаем фиксированного внешнего поля, усложнение здесь состоит в том, что конфигурация поля меняется со временем из-за движения мишени; в свою очередь, под действием налетающей частицы может меняться сам характер этого движения /происходит возбуждение коллективных степеней свободы ядра/. В результате амплитуды рассеяния, определяемые из опыта, оказываются сложным образом усредненными по всем возможным ориентациям мишени в пространстве и фазам ее колебаний.

В разделе 2 разобран простой пример такой обратной задачи в адиабатическом приближении /см.[7,8] /, когда за время взаимодействия налетающей частицы с ядром поле последнего не успевает значительно измениться.

Общий случай /неадиабатика/ рассматривается в разделе 3.

В последнем разделе обратная задача формулируется для сил, зависящих от скорости /типа $\hat{p}^2 V_1(r) + V_1(r)\hat{p}^2$, $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ - оператор импульса/. Такие потенциалы используются в ядерной физике для эффективного учета отталкивания на малых расстояниях. Кроме того, с их помощью удается устранить возможное несоответствие экспериментальных данных условиям выбранной модели.

2. Адиабатическое приближение

При фиксированной фазе колебания мишени и ее ориентации по отношению к падающему потоку происходит обычное упругое рассеяние частиц внешним полем /см.[2] /. Обозначим через ω_i коллективные координаты, характеризующие движение ядра, а через $\Phi_\alpha(\omega_i)$ - собственную функцию в состоянии "α". Рассмотрим случай, когда мишень представляет собой жесткий аксиально-симметричный ротатор. Тогда $\Phi_\alpha(\omega_i)$ сводятся к D-функциям Вигнера:

$$\Phi_\alpha(\omega_i) \equiv [(2I+1)/8\pi^2]^{1/2}\, D^I_{MK}(\omega_i)\ ,$$

где I - момент мишени, M - его проекция на ось z, K - проекция I на ось симметрии ядра, ω_i - углы Эйлера, определяющие ориентацию мишени.

Если частицы падают на ядро, находящееся в состоянии $\alpha_0 \equiv \{I_0 M_0 K\}$, то волновая функция системы в адиабатическом приближении имеет вид:

$$\Psi_{I_0 M_0 K}(\bar{k}, \bar{r}, \omega_i) = F(\bar{k}, \bar{r}, \omega_i)\, D^{I_0}_{M_0 K}(\omega_i)\ , \qquad /1/$$

где $F(\bar{k}, \bar{r}, \omega_i)$ - волновая функция рассеивающихся частиц, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$[-(\hbar^2/2m)\,\nabla^2_{\bar{r}} + V(\bar{r},\omega_i) - E]\,F(\bar{k},\bar{r},\omega_i) = 0\ . \qquad /2/$$

Согласно /1/ и /2/, для асимптотики $\Psi_{I_0 M_0 K}$ имеем:

$$\Psi_{I_0 M_0 K}(\bar{k}, \bar{r}, \omega) \underset{r\to\infty}{\approx} \{e^{ikz} + \frac{1}{r} f(\Omega, \omega_i, k)\, e^{ikr}\}\, D^{I_0}_{M_0 K}(\omega_i)\ , \qquad /3/$$

/$f(\Omega, \omega_i, k)$ - амплитуда рассеяния в направлении $\Omega = \{\theta, \phi\}$ частиц с энергией $E = k^2/2m$ в поле $V(\bar{r}, \omega_i)$ /.

Как показано в работе [2], для восстановления сферически несимметричного внешнего поля $V(\bar{r})$ нужны данные по рассеянию пучков частиц, падающих с разных сторон. В рассматриваемой задаче ядро в процессе вращения само поворачивается разными своими сторонами к пучку, который не меняет своего положения. Это проявляется в зависимости от ω_i потенциала $V(\bar{r}, \omega_i)$ и амплнтуды $f(\Omega, \omega, k)$, и в появлении в /3/ фактора $D^{I_0}_{M_0 K}(\omega_i)$, характеризующего вероятность реализацни выбранных значений /ориентацию ядра/.

В системе координат, жестко связанной с ядром, все сводится к обычному движению частиц в поле $V(\bar{r}) = V(\bar{r}, \omega=0)$ и можно воспользоваться формулировкой обратной задачи для трехмерного оператора Шредингера /например, в рамках R-матричной теории [4,5] /. При этом удобно работать в представлении квантовых чисел парциальных каналов ℓ, m - орбиатльного момента частицы и его проекции в собстенной системе координат мишени. Уравнения для парциальных волн имеют вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} F''_{\ell m \ell'}(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} F_{\ell m \ell'} + \qquad /4/$$

$$+ \sum_{\ell''} V_{\ell m \ell''}(r)\, F_{\ell'' m \ell'}(r) = E F_{\ell m \ell'}(r)\ .$$

Здесь функциям каналов приписан индекс ℓ', поскольку предполагается специальный выбор асимптотических условий, когда падающая волна имеется в единственном канале $\ell', m' = m$ ($F_{\ell m \ell'} \underset{r\to\infty}{\approx} F^{(-)}_{\ell m}\delta_{\ell\ell'} + S^m_{\ell\ell'}F^{(+)}_{\ell m}$; проекция m является хорошим квантовым числом, так как мы ограничились пока случаем аксиально-симметричной мишени

$$V_{\ell m,\ell' m'}(r) = \int Y^*_{\ell m}(\Omega')\, V(\bar r)\, Y_{\ell' m'}(\Omega')\, d\Omega' = V^m_{\ell\ell'}(r)\,\delta_{mm'}, \qquad /5/$$

где Ω' - угловые переменные вектора $\bar r$ в собственной системе отсчета ядра.

В многоканальной обратной задаче сначала по матрице рассеяния $\|S_{\ell m,\ell' m'}(k)\|$ или $\|R_{\ell m,\ell' m'}(k)\|$ /4, 5/ восстанавливается матрица взаимодействия $V_{\ell m,\ell' m'}(r)$, а по ней определяется исходный потенциал $V(\bar r)$:

$$V(\bar r) = \sum_{\ell m,\ell' m'} V_{\ell m,\ell' m'}(r)\, Y_{\ell m}\left(\frac{\bar r'}{r}\right)\int Y_{\ell' m'}(\Omega')\, d\Omega'. \qquad /6/$$

В *Приложении* показано, как матрицы $\|S_{\ell m,\ell' m'}\|$, $\|R_{\ell m,\ell' m'}\|$ связаны с амплитудами $f(\Omega,\omega_i,k)$ из /3/. Из опыта, однако, получают не $f(\Omega,\omega_i,k)$, а амплитуды $f_{I_0 M_0 K, IMK}(\Omega,k)$ /в результате усреднения по ориентациям ядер/. Соотношение между этими амплитудами можно получить, если разложить по полному набору функций $\{\Phi^I_{MK}(\omega_i)\}$ произведение:

$$f(\Omega,\omega_i,k)\,\Phi^{I_0}_{MK}(\omega_i) = \sum_{IM} f_{I_0 M_0 K, IMK}(\Omega,k)\,\Phi^J_{MK}(\omega_i). \qquad /7/$$

Таким образом, для восстановления $V(\bar r)$ из всей матрицы $\|f_{I'M'K,IMK}(\Omega,k)\|$ требуются лишь амплитуды, отвечающие переходам ядра из основного состояния /ср.неадиабатический случай/.

Если $V(\bar r)$ имеет конечный радиус действия "a", то спектральная функция задачи $\hat\rho(E)$ определяется дискретным набором параметров R-матрицы /положениями ее резонансов E_λ и их приведенными ширинами $\gamma_{\ell m\lambda}$ /:

$$\hat\rho(E) \equiv \|\rho_{\ell m,\ell' m'}(E)\| = \|\sum_\lambda \theta(E-E_\lambda)\,\gamma_{\ell m\lambda}\gamma_{\ell' m'\lambda}\|; \qquad /8/$$

$\theta(x) = \{0$ при $x<1$; 1 при $x\geq 0\}$;

$$R_{\ell m,\ell' m'} = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\ell m\lambda}\gamma_{\ell' m'\lambda}}{E_\lambda - E}. \qquad /9/$$

Спектральная функция $\hat\rho(E)$ позволяет построить решения $F(r)$ системы /4/ по известным функциям свободного движения $\overset{\circ}{F}(r)$

$$(-\overset{\circ}{F}{}''_{\ell m}(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\overset{\circ}{F}_{\ell m}(r) = k^2\overset{\circ}{F}_{\ell m}(r)):\ ^*$$

$$F_{\ell m}(r) = \overset{\circ}{F}_{\ell m}(r) + \sum_{\ell' m'}\int_r^a K_{\ell m,\ell' m'}(rr')\,\overset{\circ}{F}_{\ell' m'}, \qquad /10/$$

т.к. коэффициенты $K_{\ell m,\ell' m'} = K^{m'}_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$ определяются условием ортонормировки с весом $\hat\rho(E)$ решений $F_{\ell m}$ как функций от энергии /см. /6/ /. Матрица же взаимодействия выражается через эти $K_{\ell m,\ell' m'}$

$$V_{\ell m,\ell' m'}(r) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dr}K_{\ell m,\ell' m'}(rr), \qquad /11/$$

откуда, согласно /6/, находим искомый потенциал мишени $V(\bar r)$. Мы видим, таким образом, что, в отличие от случая неподвижного внешнего поля $V(\bar r)$, учет коллективных степеней свободы ядра требует для восстановления $V(\bar r)$ поляризационных экспериментов.

Рассмотренная обратная задача может быть упрощена, если от дифференциальных уравнений /4/ перейти к конечно-разностным /4/. При этом функции $F_{\ell m}$, $V_{\ell m,\ell' m'}$ и др. задаются своими значениями в *конечном* числе точек $r = r_n$ на интервале $0 \leq r \leq a$, количество параметров $E_\lambda, \gamma_{\ell m\lambda}$ становится ограниченным, и восстановление $V(\bar r)$ сводится к конечному числу алгебраических операций.

---

* Заметим, что граничные условия для решений, обозначенных здесь как $F_{\ell m}(r)$, $\overset{\circ}{F}_{\ell m}(r)$, выбираются иначе, чем для $F_{\ell m,\ell' m'}$ /4/.

Нужно учитывать, что данные рассеяния не обязательно соответствуют выбранной упрощенной модели. Чтобы добиться такого соответствия, можно, например, допустить зависимость сил от скорости. Эта обратная задача имеет самостоятельный интерес /не только для коллективных возбуждений/, поэтому ей специально посвящен раздел 4.

Наличие мнимой добавки в потенциале и кулоновского хвоста не препятствуют формулировке обратной задачи /см. /4, 5/ /.

Мы рассмотрели выше случай жесткого аксиально-симметричного ротатора, но аналогично можно поступить и для ядер, обладающих более сложной формой и способных колебаться. Изменения сводятся, в основном, к использованию других функций мишени Φ_α.

3. Сильная связь каналов, отвечающих различным возбуждениям мишени

Если условия адиабатичности нарушаются, процесс рассеяния описывается системой уравнений с матрицей взаимодействия $\| V_{\alpha \ell m, \alpha' \ell' m'}(r) \|$*.

$$-F''_{\alpha \ell m}(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} F_{\alpha \ell m}(r) + \sum_{\alpha' \ell' m'} V_{\alpha \ell m, \alpha' \ell' m'}(r) \times F_{\alpha' \ell' m'}(r) = k_\alpha^2 F_{\alpha \ell m}(r), \qquad /12/$$

/$\epsilon_\alpha = k_\alpha^2 \frac{2\mu}{\hbar^2}$ - энергия коллективного движения в мишени в состояниях α/,т.е.в отличие от /4/ здесь учитывается зацепление уравнений по квантовым числам α.

При конкретных расчетах удобно пользоваться многоканальными уравнениями в представлении полного момента J /для функций $F_{\alpha = J \mathfrak{M} \ell I}$ вместо $F_{\alpha = IM, \ell m}$, где I, M - момент ядра и его проекция/, в котором расцепляются системы уравнений, отвечающих различным значениям $J = I + \ell$; $\mathfrak{M} = M + m$.

Процедура восстановления матрицы взаимодействия остается в принципе той же, что в общей многоканальной задаче /5/. Усложнение по сравнению с адиабатикой заключается в том, что, строго говоря, нужно знать элементы матрицы рассеяния $\| S_{\alpha \ell m, \alpha' \ell' m'}(k) \|$, отвечающие "закрытым каналам" и переходам с возбужденных состояний, что практически невыполнимо. Поэтому необходимо развивать приближенные подходы к решению этой задачи.

* Уравнения в случае налетающих частиц, обладающих спином, см. в работе /8/.

4. Обратная задача для потенциалов, зависящих от скорости

Рассмотрим для простоты изложения одномерный одноканальный случай - уравнение Шредингера с потенциалом

$$V = V_0(r) + \frac{1}{2}(\hat{p}^2 V_1(r) + V_1(r) \hat{p}^2). \qquad /13/$$

Предположим, что силы имеют конечный радиус действия "a": $V_0(r \geq a) = V_1(r \geq a) = 0$. Кроме того, ограничимся конечно-разностным /к.-р./ приближением для дифференциальных операторов, как это обычно делается в приложениях. При этом уравнение Шредингера на интервале $0 \leq r \leq a$ сводится к конечному числу N алгебраических уравнений /где $N = a/\Delta$; ; а Δ - шаг к.-р. дифференцирования, $\hbar^2 = 1$, $\mu = 1$ /

$$-\{\Psi(E,n+1) - 2\Psi(En) + \Psi(E,n-1)\}(1 + \frac{1}{2} V_1(n)/2\Delta^2 + V_0(n)\Psi(En) - \{V_1(n+1)\Psi(E,n+1) - 2V_1(n)\Psi(E,n) + V_1(n-1)\Psi(E,n-1)\}/4\Delta^2 = E\Psi(E,n). \qquad /14/$$

Выберем в качестве базисных решений собственные вектора $U_\lambda(n) \equiv U(E_\lambda, n)$, отвечающие однородным /к.-р./ "граничным" условиям R-матричной /к.-р./ теории рассеяния

$$U_\lambda(0)=0; \quad U_\lambda(N+1)=U_\lambda(N)\,(1+B\Delta/a), \qquad /15/$$

где второе соотношение означает, что к.-р. логирифмическая производная в точке $r=a$ равна константе B/a.

Нетрудно убедиться, что $U_\lambda(n)$ образуют ортонормированный и полный набор в пространстве функций, заданных в точках $r_n=n\cdot\Delta$ на интервале $0\le r\le a$. Действительно, умножая уравнение /14/ для $U_\lambda(n)$ на $U_{\lambda'}(n)$, а уравнение для $U_{\lambda'}(n)$ на $U_\lambda(n)$, вычитая полученные равенства и суммируя по n, получим:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\Delta}\{U_{\lambda'}(1)\,U_\lambda(0)-U_\lambda(N)\,U_{\lambda'}(N+1)-U_\lambda(1)\,U_{\lambda'}(0)+\\
&+U_{\lambda'}(N)\,U_\lambda(N+1)-\frac{1}{2}U_\lambda(N)\,V_1(N+1)\,U_{\lambda'}(N+1)+\\
&+\frac{1}{2}U_{\lambda'}(1)\,V_1(1)\,U_\lambda(0)+\frac{1}{2}U_{\lambda'}(N)\,V_1(N+1)\,U_\lambda(N+1)-\\
&-\frac{1}{2}U_\lambda(1)\,V_1(1)\,U_{\lambda'}(0)+\frac{1}{2}U_{\lambda'}(N)\,V_1(N)\,U_\lambda(N+1)- \qquad /16/\\
&-\frac{1}{2}U_\lambda(1)\,V_1(0)\,U_{\lambda'}(0)+\frac{1}{2}U_{\lambda'}(1)\,V_1(0)\,U_\lambda(0)-\\
&-\frac{1}{2}U_\lambda(N)\,V_1(N)\,U_{\lambda'}(N+1)\}+\\
&+\sum_{n=1}^{N}(E_{\lambda'}-E_\lambda)\,U_{\lambda'}(n)\,U_\lambda(n)\,\Delta=0;
\end{aligned}$$

отсюда, учитывая /15/, $V(n\ge N)=0$ и предполагая нормированность $U_\lambda(n)$, имеем соотношение ортогональности

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta\cdot U_{\lambda'}(n)\,U_\lambda(n)=\delta_{\lambda\lambda'}. \qquad /17/$$

Умножая /17/ на $U_{\lambda'}(p)$, суммируя по λ' и меняя порядок суммирования по λ' и n, убеждаемся в том, что $\sum\limits_{\lambda'}U_{\lambda'}(p)\,U_{\lambda'}(n)$ действует эквивалентно символу Кронеккера δ_{pn}:

$$\sum_n^N\{\sum_{\lambda'}^N U_{\lambda'}(p)\,U_{\lambda'}(n)\}\,U_\lambda(n)=U_\lambda(p), \qquad /18/$$

т.е. имеем соотношение полноты:

$$\sum_\lambda^N U_\lambda(p)\,U_\lambda(n)=\delta_{pn}. \qquad /19/$$

Аналогично работе [4], можно получить для R-матрицы:

$$R(E)=\sum_\lambda^N\frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda-E}, \qquad \text{где } \gamma_\lambda=U_\lambda(n)\sqrt{2a}. \qquad /20/$$

По положениям резонансов E_λ и их приведенным ширинам γ_λ^2, определяемым из данных рассеяния, строятся[4,9] решения $\phi(E,n)$ уравнения /19/, удовлетворяющие к.-р. граничным условиям:

$$\phi(E,N)=1/\sqrt{2a}; \quad \phi(E,N+1)=\phi(E,N)\,(1+B\Delta/a) \qquad /22/$$

А по $\phi(E,n)$ восстанавливается к.-р. гамильтониан H, отвечающий уравнению /14/ /матрица H тридиагональна, т.к. отличны от нуля лишь элементы H_{nm} с $m=n, n\pm1$ /:

$$H_{nm}=\sum_\lambda E_\lambda\gamma_\lambda^2\,\phi(E_\lambda,n)\,\phi(E_\lambda,m). \qquad /23/$$

Согласно выражениям /14/, /22/, находим искомые функции $V_0(n)$, $V_1(n)$ по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned}
V_1(N-1)&=-\left(H_{N,N-1}+\frac{1}{2\Delta^2}\right)4\Delta^2\\
V_1(n-1)&=-\left(\frac{1}{2\Delta^2}+\frac{1}{2\Delta^2}V_1(n)+H_{n,n-1}\right)4\Delta^2 \qquad /24/\\
V_0(n)&=H_{nn}-\frac{1}{\Delta^2}-\frac{V_1(n)}{\Delta^2}+E_\lambda.
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Связь амплитуды $f(\Omega, \omega_i, k)$, характеризующей рассеяние плоской волны в системе центра масс, с парциальными амплитудами $f_{\ell k, \ell' k}(k)$ в собственной системе координат мишени легко установить, преобразуя асимптотический вид функции $F(r)$ /см./3/ /. Сначала разложим падающую плоскую волну и амплитуду рассеяния в выражении /2/ по сферическим гармоникам $Y_{\ell m}$. Затем перейдем в систему координат, жестко связанную с ядром, используя формулу

$$Y_{\ell m}(\Omega) = \sum_k D^{\ell}_{mk}(\omega_i)\, Y_{\ell k}(\Omega'), \qquad /25/$$

где Ω', k отвечают новой системе отсчета. В результате получим

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\approx} \sum_{\ell k} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\,(j_{\ell}(kr)\, D^{\ell}_{0k}(\omega_i) + f_{\ell k}(\omega_i, k)\, h^{(1)}_{\ell}\; Y_{\ell k}(\Omega')) . \qquad /26/$$

Здесь

$$f_{\ell k}(\omega_i, k) = \sum_m D^{\ell}_{mk}(\omega_i)\, f_{\ell m}(\omega_i, k): \qquad /27/$$

амплитуда парциальной рассеянной волны, когда нормировка потока падающих волн в каналах ℓk выбрана зависящей от ориентации ядра (ω_i), согласно /26/. Ясно, что эта амплитуда складывается из парциальных амплитуд $f_{\ell k, \ell' k'}(k)$,* взятых с весом, согласно выражению /26/:

$$f_{\ell k}(\omega_i, k) = \sum_{\ell' k'} i^{\ell'} \sqrt{4\pi(2\ell'+1)}\, D^{\ell'}_{0k'}(\omega_i)\, f_{\ell k, \ell' k'}(k) . \qquad /28/$$

Учитывая ортогональность D-функций, получаем искомую связь

$$f_{\ell k, \ell' k' = k}(k) = \frac{\sqrt{2\ell'+1}}{i^{\ell'}\, 16\,\pi^{5/2}} \int D^{\ell'}_{0k}(\omega_i)\, f_{\ell k}(\omega_i, k)\, d\omega_i . \qquad /29/$$

---

*$f_{\ell k, \ell' k'}(k)$ отвечает единственному входному каналу $(\ell' k')$ с единичным падающим потоком.

Литература

1. *В.А.Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, Наукова думка, 1972.*
2. *Л.Д.Фаддеев. Современные проблемы математики. т. 3, ВИНИТИ, Москва, 1974, стр. 93.*
3. *Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Сообщение ОИЯИ, Р4-7403, Дубна, 1973. Тезисы Международной конференции по ядерной физике, Мюнхен, 1973.*
4. *Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. ЯФ, 11, 11, /1974/; препринт ОИЯИ, Р4-7768, Дубна, 1974.*
5. *В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Препринт ОИЯИ, Р4-7815, Дубна, 1974.*
6. *Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. /Обзорная статья/, Изв. АН СССР /сер. физ./ /1974/.*
7. *С.И.Дроздов. ЖЭТФ, 28, 734, 736 /1955/; ЯФ, 1/ 407 /1965/.*
   R.C.Barret. Nucl. Phys., 51, 407 (1964).
   D.M.Chase, L.Wilets, A.R.Edmonds, Phys., Rev., 110, 5, (1958) 1080.
8. R.Tamura. Rev.Mod.Phys., 37, 4 (1965) 679.
9. *Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. стр. 524, Киев, Наукова думка, 1965.*

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1974 года.