ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4-8104

С.К.Кузьмин, С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р4-8104

С.К.Кузьмин, С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

1. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}^{(n)}$ дан n -мерный параллелепипед Π. Обозначим через $\mathcal{B}$ систему борелевских множеств из Π. Рассмотрим систему взаимодействующих частиц M различных сортов $(M \geq 1)$, заключенных внутри области B, $B \subset \Pi$. Состояние такой системы определяется положительной вектор-мерной $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M)$, где μ_b $(b=1,2,\ldots,M)$ вполне аддитивная, неотрицательная функция множества, определенная на $\mathcal{B}$, причем $\mu_b(B) = 1$ и $\mu_b(B) \equiv 0$ вне B. Последнее будем обозначать через $\mu \propto B$ и говорить, что μ сосредоточена на B. Мера μ_a - это распределение частиц сорта a, $a = 1,2,\ldots M$.

Естественным обобщением понятия положительной меры является понятие меры /вполне аддитивной, но не обязательно неотрицательной функции множества, иногда называемой зарядом/. Поэтому целесообразно состоянием называть и такую вектор-меру, а состояние, все компоненты которого суть положительные меры, будем называть положительным состоянием. Заметим, что система может находиться только в положительном состоянии.

Пусть $\phi_{ab}(r)$ - потенциальная энергия взаимодействия двух частиц сортов a и b единичной массы /или заряда/, находящихся на расстоянии r друг от друга. Тогда потенциальная энергия вышеописанной системы есть функция состояния μ

$$I(\mu) = \sum_{(1 \leq a,\, b \leq M)} \eta_{ab} \iint\limits_{BB} \phi_{ab}(|P-Q|)\, d\mu_a(P)\, d\mu_b(Q), \qquad /1.1/$$

где интегралы понимаем в смысле Лебега-Стильтьеса;

либо состояние системы. Положим $\mu = \mu^* + \mu_0$, где $\mu_0 \neq 0$ и $\mu_0(B)=0$. Покажем, что $I(\mu) > I(\mu^*)$. В самом деле, имеем

$$I(\mu) = I(\mu^* + \mu_0) = I(\mu^*) + 2\int_B (u^*(P)d\mu_0) + I(\mu_0),$$

где $(u^*(P)d\mu_0)$ - скалярное произведение векторов $u^*(P)$ и $d\mu_0$. Далее, так как $u^*(P)$ постоянен "приблизительно всюду" на B, то

$$\int_B (u^*(P)d\mu_0) = \int_{B\setminus E} (u^*(P)d\mu_0) + \int_E (u^*(P)d\mu_0),$$

где $u^*(P)$ постоянен на $B\setminus E$ и $\mu_0(E)=0$, так как ϕ-емкость множества E равна нулю. Таким образом, последний интеграл равен нулю.

Итак, получаем

$$I(\mu) = I(\mu^*) + I(\mu_0) > I(\mu^*),$$

поскольку $I(\mu_0) > 0$.

Следовательно, для любого состояния $\mu \neq \mu^*$ имеем, что $I(\mu) > I(\mu^*)$, поэтому μ^* является минимизирующим состоянием и притом единственным.

Следствие. Если функционал $I(\mu)$ позитивен, то состояние равновесия является единственным.

Замечание. Если найти состояние μ^*, удовлетворяющее условию постоянства потенциала и требованию нормировки, то тем самым будет найдено единственное минимизирующее состояние. Если μ^* окажется положительным состоянием, то μ^* будет единственным состоянием, дающим минимум потенциальной энергии, среди всех состояний, в которых может находиться система.

В следующей части данной работы приведен общий метод нахождения минимизирующего состояния, для которого не требуется выполнения принципа максимума /2–4/, что для достаточно общего вида потенциальных функций $\phi(r)$ вполне естественно. Требование, чтобы при $M = 1$ потенциальная функция $\phi(r)$ удовлетворяла бы принципу максимума, является просто данью традиционному классическому методу доказательства /исходящему от Гаусса/ существования равновесного состояния. Заметим, что при рассмотрении гармонических потенциальных функций принцип максимума выполняется автоматически.

3. Пусть $B \in \mathcal{B}$ и B имеет положительную ϕ емкость. Положим $W(B) = \sum_{(1\leq a\leq M)} W_a(B)$, где $W(B)$ определено в /2.2/; $W_a(B)$ - произвольное число. Предположим, что вектор-потенциал $u^*(P) = (u_1^*(P), \ldots, u_M^*(P))$ постоянен на множестве B и $u_a^*(P) = W_a(B)$. Пусть теперь $d\mu_b = \chi_b(Q)\,dQ$, где $\chi_b(Q)$ - плотность распределения частиц сорта b в точке Q, принадлежащей B.

Рассмотрим /при $\phi \in \Phi$ / систему интегральных уравнений первого рода относительно $\chi_b(Q)$

$$W_a(B) = \sum_{(1\leq b\leq M)} \eta_{ab} \int_B \phi_{ab}(|P-Q|)\chi_b(Q)\,dQ, \qquad /3.1/$$

где $P \in B$; $a = 1,2,\ldots,M$. Равенства /3.1/ имеют место хотя бы "приблизительно всюду" и, следовательно, заведомо почти всюду в смысле Лебега.

Поставим задачу о нахождении интегрируемой по Лебегу на B вектор-функции $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_M)$, являющейся решением системы интегральных уравнений первого рода /3.1/. Поскольку нас интересуют положительные состояния, χ должно удовлетворять еще требованию неотрицательности.

Обозначим через $\phi^\circ_{ab}(\mathfrak{M})$ и $\chi^\circ_b(\mathfrak{M})$ преобразования Фурье, соответственно, функций $\phi_{ab}(|Q|)$ и $\chi_b(Q)$. Предположим, что $\phi^\circ_{ab}(\mathfrak{M})$ существует /функция ϕ интегрируема по Лебегу на каждом ограниченном множестве пространства $\mathcal{E}^{(n)}$ /. Пусть

$$\phi_{ab}(|P|) = \lim_{\beta\to 0} \phi_{ab}(P,\beta) =$$

$$= \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{-\beta|\mathfrak{M}|} e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}$$

и $\phi_{ab}(P,\beta)$ является непрерывной функцией относительно β при $|\beta| \le 1$.

Имеем

$$\sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_B \phi_{ab}(|P-Q|,\beta)\chi_b(Q)dQ =$$

$$= \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_B \chi_b(Q)dQ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{-\beta|\mathfrak{M}|} \times$$

$$\times e^{i((P-Q)\mathfrak{M})} d\mathfrak{M} = \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{-\beta|\mathfrak{M}|} \times$$

$$\times e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B \chi_b(Q) e^{-i(Q\mathfrak{M})} dQ =$$

$$= \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}) \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{-\beta|\mathfrak{M}|} e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}.$$

Итак,

$$\sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_B \phi_{ab}(|P-Q|,\beta)\chi_b(Q)dQ =$$

$$= \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}) \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{-\beta|\mathfrak{M}|} e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}.$$

Предположим, что интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, является непрерывной функцией от β. Это возможно, так как слева также имеется функция, непрерывная по β при $|\beta| \le 1$. Переходя к пределу при $\beta \to 0$, находим

$$\sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_B \phi_{ab}(|P-Q|)\chi_b(Q)dQ = \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}) \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) \times$$

$$\times e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}.$$

Из /3.1/ при $P \subseteq B$ получаем

$$W_a(B) = \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}) \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}. \quad /3.2/$$

Поскольку

$$W_a(B) = W_a \cdot 1 = \frac{W_a(B)}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathcal{E}^{(n)}} \Psi^{\circ}(B,\mathfrak{M}) e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M},$$

где $\Psi(B,\mathfrak{M})$ - преобразование Фурье характеристической функции множества B. При $P \subseteq B$ находим

$$\int_{\mathcal{E}^{(n)}} [\Psi^{\circ}(B,\mathfrak{M}) W_a(B) - (2\pi)^{n/2} \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M})] e^{i(P\mathfrak{M})} d\mathfrak{M} = 0. \quad /3.3/$$

Рассмотрим систему операторных уравнений

$$W_a(B)\Psi^{\circ}(B,\mathfrak{M}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{(1\le b\le M)} \eta_{ab} \phi^{\circ}_{ab}(\mathfrak{M}) \chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}). \quad /3.4/$$

Очевидно, что всякое решение системы уравнений /3.4/ является и решением системы /3.3/. Обратное не всегда верно. Поскольку в рассматриваемом случае ϕ_{ab} зависят только от радиуса, имеем $\phi_{ab}^{\circ}(\mathfrak{M}) = \phi^{\circ}_{ab}(\rho)$, где $\rho = |\mathfrak{M}|$. Предположим, что множество B таково, что $\Psi^{\circ}(B,\mathfrak{M}) = \Psi^{\circ}(B,\rho)$. Тогда из системы /3.4/ вытекает, что $\chi^{\circ}_b(\mathfrak{M}) = \chi^{\circ}_b(\rho)$. В этом случае решение системы операторных уравнений значительно упрощается, так как

n -мерные преобразования Фурье сводятся к одномерным преобразованиям Ханкеля.

Предположим, что определитель $D(\mathfrak{M})$ /или $D(\rho)$ /, составленный из коэффициентов при $\chi_b^\circ(\mathfrak{M})$, отличен от нуля. Тогда система /3.4/ разрешима относительно $\chi_b^\circ(\mathfrak{M})$ $(\chi_b^\circ(\rho))$

$$\chi_b^\circ(\mathfrak{M}) = \frac{\Psi^\circ(B, \mathfrak{M})}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{(1\le a\le M)} (-1)^{a+b}\, W_a(B)\, \frac{D_{ab}(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{M})}, \qquad /3.5/$$

где $D_{ab}(\mathfrak{M})$ - минор элемента, расположенного в a -ой строке и b -ом столбце определителя, полученного из $D(\mathfrak{M})$ заменой в нем b -ого столбца столбцом свободных членов.

Если из /3.5/ найти функцию $\chi_b(Q)$, $b=1,2,\ldots,M$, то, идя в обратном направлении, при тех же самых предположениях получим, что вектор-функция $\chi_b(Q)=(\chi_1(Q),\ldots,\chi_M(Q))$ удовлетворяет исходной системе интегральных уравнений /3.1/. Заметим, что $\chi(Q)$ линейно зависит от постоянных $W_a(B)$, $a=1,2,\ldots,M$. Поэтому из условия нормировки

$$\int_B \chi_b(Q)\,dQ = n_b, \qquad /3.6/$$

где n_b - средние концентрации частиц рассматриваемой системы, при условии неравенства нулю соответствующего определителя единственным образом определяются постоянные $W_a(B)$. Полагая для $E\in\mathcal{B}$ и $E\subset B$

$$\mu(E)=\int_E \chi(Q)\,dQ \quad \text{и} \quad \mu\equiv 0 \quad \text{вне} \quad B,$$

получим, что вектор-мера μ является /в силу п.2 данной работы/ единственным минимизирующим состоянием. Если же μ окажется положительным состоянием ($\chi(Q)$ - неотрицательна/, то оно совпадает с минимизирующим положительным состоянием.

Замечание. Если существует минимизирующее состояние, то оно совпадает с равновесным состоянием.

Для степенного взаимодействия все требования, необходимые для применения указанного здесь метода, выполняются. При степенном взаимодействии для $M=1$ получаем результаты работ [5–8]. Рассматриваемый метод служит обоснованием расчетов работы [9], где он применяется к многосортной системе "ларморовских кружков", взаимодействие между которыми характеризуется усредненными по достаточно большому промежутку времени потенциальными функциями "чистого" кулоновского взаимодействия.

4. Пусть на множестве B $(B\in\mathcal{B})$ существует единственное равновесное состояние μ^* для некоторой потенциальной матрицы $\phi=(\phi_{ab})$ $a,b=1,2,\ldots,M$. Рассмотрим обратную задачу теории потенциала для потенциальной матрицы вида $\tilde\phi=(\tilde\phi_{ab})$ $a,b=1,\ldots,M$ на множестве $\tilde B$ $(\tilde B\in\mathcal{B})$ таком, что существует топологическое отображение f

$$f:\ \tilde B\to B \quad \text{и} \quad \tilde\phi(P,Q)=\phi(f(\tilde P), f(\tilde Q)).$$

Отображение f порождает взаимно-однозначное соответствие $\mathcal{F}$ между классом $\tilde{\mathfrak{M}}$ вектор-мер, сосредоточенных на $\tilde B$, и классом вектор-мер $\mathfrak{M}$, сосредоточенных на B, по следующему правилу:

$$\mathcal{F}(\mu_1)[A_1]=\mu[f(A_1)].$$

Рассмотрим функционал потенциальной энергии

$$\tilde I(\tilde\mu)=\sum_{(1\le a,b\le M)}\eta_{ab}\int_{\tilde B}\int_{\tilde B}\tilde\phi_{ab}(\tilde P,\tilde Q)\,d\tilde\mu_a(\tilde P)\,d\tilde\mu_b(\tilde Q)= \qquad /4.1/$$

$$=\sum_{(1\le a,b\le M)}\eta_{ab}\int_B\int_B\phi_{ab}(P,Q)\,d\mu_a(P)\,d\mu_b(Q)=I(\mu),$$

где $\tilde\mu=\mathcal{F}(\mu)$. Отсюда $\tilde I(\tilde\mu)=I(\mathcal{F}(\mu))$.

В силу взаимной однозначности отображения $\mathcal{F}$ получаем, что на $\tilde B$ существует и притом единственное равновесное состояние $\tilde\mu^*=\mathcal{F}(\mu^*)$.

Пусть вектор-функция μ^* представима в виде

$$\mu^*(A) = \int_A \chi^*(Q)\,dQ,$$

и пусть f - взаимно-однозначное, непрерывное и дифференцируемое отображение с якоюнаном $\mathcal{J} \neq 0$. Тогда

$$\tilde{\mu}^*(\tilde{A}) = \mu^*(f(\tilde{A})) = \int_{f(\tilde{A})} \chi^*(Q)\,dQ =$$

$$= \int_{\tilde{A}} \chi^*(f(\tilde{Q}))\,|\mathcal{J}(\tilde{Q})|\,d\tilde{Q} = \int_{\tilde{A}} \chi^*(\tilde{Q})\,d\tilde{Q},$$

где

$$\tilde{\chi}^*(\tilde{Q}) = \chi^*(f(\tilde{Q}))\,|\mathcal{J}(\tilde{Q})|. \qquad /4.2/$$

Предположим теперь, что f - невырожденное линейное отображение. Тогда $\mathcal{J}(\tilde{Q}) = \det f \neq 0$ /как определитель невырожденного линейного отображения/. Отсюда получаем, что если для некоторого класса афинноэквивалентных фигур существует единственное равновесное состояние для потенциальной матрицы $\phi(P,Q) = (\phi_{ab}(P,Q))$ и нам известна вектор-плотность $\chi^*(Q)$ этого состояния, то тогда для того же класса афинноэквивалентных фигур существует единственное эквивалентное состояние для потенциальной матрицы $\tilde{\phi}(\tilde{P},\tilde{Q}) = (\tilde{\phi}_{ab}(\tilde{P},\tilde{Q}))$ с вектор-плотностью

$$\tilde{\chi}(\tilde{Q}) = \det f \cdot \chi(f(\tilde{Q})), \qquad /4.3/$$

где f - линейное преобразование вида: $Q_k = \frac{1}{b_k}\tilde{Q}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ и $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n)$.

Приведем пример применения полученных результатов в случае нецентрального взаимодействия. В работе /5/ был установлен аналитический вид равновесного

состояния для однокомпонентной системы в эллиптической области B, описываемой неравенством вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 Q_k^2 \leq 1,$$

где $a_k > 0$ для случая центрального степенного взаимодействия $\phi(P,Q) = |P-Q|^{\alpha-n}$, где $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ при $n = 2$ и $0 < \alpha < 2$ при $n \geq 3$. Плотность такого состояния /5/

$$\chi(Q) = \frac{S\,W(B)}{\gamma} \; \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}+1}} \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 Q_k^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}, \qquad /4.4/$$

где S - величина поверхности n-мерной сферы S^* единичного радиуса:

$$\gamma = \int_{S^*} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 t_k^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} d\sigma_T,$$

$d\sigma_T$ - элемент поверхности сферы S^*, $T = (t_1, \ldots, t_n)$. Для минимума потенциальной энергии системы было получено выражение

$$W(B) = \frac{\gamma}{\pi^2 S}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2} + 1\right)\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Рассмотрим систему взаимодействующих частиц одного сорта, заключенных внутри эллипсоидальной области $\tilde{B}$, описываемой неравенством

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k a_k \tilde{Q}_k)^2 \leq 1.$$

Пусть потенциальная энергия взаимодействия двух частиц единичной массы /или заряда/, находящихся на расстоянии $r = |\tilde{P} - \tilde{Q}|$, имеет вид

$$\tilde{\phi}(\tilde{P},\tilde{Q}) = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\,|\tilde{P}_k - \tilde{Q}_k|^2}\right)^{\alpha-n},$$

где

$$\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n), \quad \tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n),$$

следовательно, взаимодействие между частицами не будет обладать центральной симметрией. Тогда линейное отображение f: $\tilde{Q} \to Q$, где $\tilde{Q}_k = \frac{1}{b_k} Q_k$, переводит эллипсоид $\tilde{B}$ в эллипсоид B, описываемый неравенством $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 Q_k^2 \le 1$. Из /4.3/ следует, что равновесное состояние на эллипсоиде $\tilde{B}$ задается плотностью

$$\tilde{\chi}(\tilde{Q}) = \det f \cdot \frac{S\tilde{W}(\tilde{B})}{\gamma} \frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}+1}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \sum_{k=1}^{n} (b_k a_k \tilde{Q}_k)^2\right)^{-\frac{a}{2}},$$

где

$$\det f = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}; \quad \tilde{W}(\tilde{B}) = \inf_{\tilde{\mu} \propto \tilde{B}} \tilde{I}(\tilde{\mu})$$

В силу /4.1/ имеем, что $\tilde{W}(\tilde{B}) = W(B)$.

В заключение выражаем глубокую благодарность академику Н.Н.Боголюбову за участие в обсуждении настоящей работы и сделанные ценные замечания.

Литература

1. *Н.Н.Боголюбов. Избранные труды, т.1, Общая теория меры в нелинейной механике, Киев, Наукова думка, 1969.*
2. *O.Frostman. Potential d'equilibre et capacite des ensembles avec quilques applications a la theorie des fonctions, Meddel. Land, 1935.*
3. *К.С.Кузьмин, К.В.Темко, С.В.Темко, Ж. дифференц. уравн., 8, 6, 1972.*
4. *Н.С.Ландкоф. Основы современной теории потенциала, М., Наука, 1966.*
5. *С.В.Темко, К.В.Темко. Ж. дифференц. уравн., 5, 8, 1969.*
6. *M.Rieze. Acta scientiarum Mathem. Szeged, 9, I, 1938.*
7. *I.Zamfirescu. Rev. roumaine Mathem. pureset appl., 9, 9, 1964.*
8. *С.К.Кузьмин, С.В.Темко. ОИЯИ, Р4-7782, Дубна, 1974.*
9. *С.В.Темко. ОИЯИ, Р4-7520, Дубна, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел 15 июля 1974 года.