

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



СЗУ1а
К-134

16/1к-74

P4 - 8101

3673 / 2-74

С.Г.Кадменский, Г.Стратан,
В.И.Фурман, С.Холан

НОВЫЙ МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ КЛАСТЕРОВ В ЯДРАХ

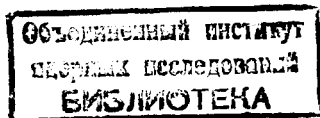
1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8101

С.Г.Кадменский, Г.Стратан,
В.И.Фурман, С.Холан

НОВЫЙ МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ КЛАСТЕРОВ В ЯДРАХ



I. В ряде задач теории ядерных реакций и структуры ядра возникает необходимость перехода от координат отдельных частиц к переменным их относительного движения. Если рассматриваемые частицы совершают финитное движение в потенциале гармонического осциллятора, то для решения указанной задачи существует эффективная техника — преобразования Тальми-Мошинского /1/. Однако для любых других потенциалов её непосредственное применение невозможно. Тем не менее, разлагая искомые функции по базису собственных функций гармонического осциллятора и используя для последних преобразование Тальми-Мошинского, можно провести разделение переменных. Громотозность и математические трудности такого способа приводят к тому, что он редко применяется даже для проблемы двух частиц, движущихся в произвольном потенциале, и оказывается совершенно неприемлемым для задач с большим числом частиц. В данной работе развит метод выделения движения центра тяжести группы частиц (кластера), находящихся в поле произвольного потенциала. При этом функция внутреннего движения кластера, считающаяся известной, может характеризоваться ненулевыми орбитальными моментами.

Уместно отметить, что для двух частиц, движущихся в потенциале Вудса-Сарсона, подобная задача была решена Бэйманом и Каллио /2/ для момента относительного движения $\lambda = 0$, однако использованный ими метод не позволил перейти к моментам $\lambda \neq 0$ и большому числу частиц.

2. Рассмотрим идею нового метода на примере выделения движения центра тяжести (ЦТ) двух частиц одинаковой массы, помещенных в поле произвольного сферически-симметричного по-

тенциала (ниже для конкретности рассматриваем потенциал типа Вудса-Саксона без спин-орбитальной связи).

Известно, что для потенциала гармонического осциллятора (ГО) волновая функция двух не взаимодействующих частиц с суммарным моментом и проекцией L, M может быть представлена в виде [1,3]

$$(1) \quad [\varphi_{n_1 \ell_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 \ell_2}(\vec{r}_2)]_{LM} = \sum_{\substack{n\lambda \\ N\Lambda}} \langle n\lambda N\Lambda | (n_1 \ell_1 n_2 \ell_2) L \rangle [f_{n\lambda}(\vec{r}) \varphi_{N\Lambda}(\vec{R})]_{LM} \\ (2) \quad = \sum_{n\lambda} \sum_{N\Lambda} C_{\mu n_1 m_1 n_2 m_2}^{\lambda \Lambda L} Y_{\mu}(\frac{\vec{r}}{r}) \varphi_{N\Lambda}(\vec{R}) Y_{\lambda \mu}(\frac{\vec{r}}{r})$$

Здесь использованы переменные: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

$$(3) \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}$$

Квантовые числа n, ℓ характеризуют индивидуальные состояния частиц в осцилляторном потенциале, а $n\lambda$ и $N\Lambda$ описывают состояние относительного движения и движения ЦТ в потенциалах того же типа. Функция

$$(4) \quad \varphi_{n\lambda}(\vec{r}) = \sum_{N\Lambda} \langle n\lambda N\Lambda | (n_1 \ell_1 n_2 \ell_2) L \rangle \varphi_{N\Lambda}(\vec{R})$$

играет роль эффективной радиальной функции движения ЦТ с орбитальным моментом Λ . Функции $\varphi_{N\Lambda}(\vec{R})$ представлены в ней с весами, определяемыми обобщенными коэффициентами Тальми-Мошинского $\langle n\lambda N\Lambda | (n_1 \ell_1 n_2 \ell_2) L \rangle$. Для потенциала Вудса-Саксона (ВС) функцию двух частиц обычно представляют в следующем виде [2]:

$$(5) \quad [\varphi_{n_1 \ell_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 \ell_2}(\vec{r}_2)]_{LM} = \sum_{\lambda \Lambda} \frac{f_{\lambda \Lambda}^{n_1 n_2 \ell_1 \ell_2}(\vec{r}, R)}{r R} [Y_{\lambda}(\frac{\vec{r}}{r}); Y_{\Lambda}(\frac{\vec{R}}{R})]_{LM},$$

где в отличие от формулы (2) факторизована зависимость толь-

ко от направлений векторов \vec{r} и \vec{R} . Преимущества формы (2), полностью факторизованной в переменных \vec{r} и \vec{R} , по сравнению с разложением (5) очевидны. Поэтому и для случая потенциала ВС попытаемся представить двухчастичную функцию в виде (2). Рассмотрим соответствующий коэффициент разложения:

$$(6) \quad I_{n\lambda\mu}^{n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 LM}(\vec{R}) = \int [\varphi_{n_1 \ell_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 \ell_2}(\vec{r}_2)]_{LM} \varphi_{n\lambda}^*(\vec{r}) Y_{\lambda\mu}^+(\frac{\vec{r}}{r})(\vec{r}, \vec{R})$$

Здесь $\varphi_{n_1 \ell_1}(\vec{r}_1)$, $\varphi_{n_2 \ell_2}(\vec{r}_2)$ суть собственные функции в потенциале ВС.

Для дальнейшего необходимо иметь в виду одно существенное отличие потенциала гармонического осциллятора от потенциалов конечной глубины. Для потенциала гармонического осциллятора все состояния связанные и наборы функций $\varphi_{n\lambda}$ и $\varphi_{N\Lambda}$ являются дискретными наборами. Более того, из-за уникальной симметрии осцилляторного потенциала суммирование в формуле (1) ограничено соотношением

$$(7) \quad 2n_1 + \ell_1 + 2n_2 + \ell_2 = 2n + \lambda + 2N + \Lambda$$

Из-за этого в формуле (4) суммирование исчезает.

Для потенциала ВС условие (7), вообще говоря, не имеет места, и в сумме по $n\lambda$ в разложении (2) могут участвовать и состояния непрерывного спектра (тогда суммирование заменяется интегрированием по энергии). Вопрос о вкладе непрерывного спектра будет рассмотрен в другом месте. Здесь же мы ограничимся формулировкой математического рецепта вычисления интегралов $I_{n\lambda\mu}^{n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 LM}(\vec{R})$, пригодного для любых функций $\varphi_{n\lambda}(\vec{r})$.

Чтобы выделить в интеграле (6) зависимость от угловых переменных $\Omega_{\vec{r}}$, произведем в подынтегральной функции поворот системы координат так, чтобы направление оси OZ сов-

пало с вектором \vec{R} . При этом каждая из сферических функций, входящих в подынтегральное выражение, преобразуется стандартным образом [4]. Например,

$$(8) \quad Y_{l_1 m_1}(\vec{e}_1) = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} Q_{m_1 k_1}^{l_1}(\vec{R}) Y_{l_1 m_1}(\vec{e}_2),$$

где тильда указывает на принадлежность к новой системе координат, а символ \vec{R} в аргументе Q -функции означает, что определяющие искомым поворот углы Эйлера φ и ϑ совпадают со сферическими проекциями вектора \vec{R} φ_2 и ϑ_2 . (третий угол Эйлера ψ для настоящего рассмотрения не важен).

Рис. I поясняет схему сложения векторов в повернутой системе координат. Используя очевидные соотношения между азимутальными углами:

$$(9) \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 + \pi,$$

проведем интеграцию по переменной φ_2 в правой части соотношения (6). В результате получим:

$$(10) \quad f_{n \lambda \mu}^{l_1 l_2 L M}(\vec{R}) = \frac{2}{\sqrt{2L+1}} \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 M}^{l_1 l_2 L} \delta_{n_1+n_2, x} (-1)^{n_2} \times \\ \times Q_{m_1 n_1}^{l_1}(\vec{e}_1) Q_{m_2 n_2}^{l_2}(\vec{e}_1) Q_{\mu x}^{\lambda} \times \int Y_{n_1 l_1}(\vec{R} + \frac{\vec{e}_1}{2}) Y_{n_2 l_2}(\vec{R} - \frac{\vec{e}_1}{2}) \times \\ \times Y_{n \lambda}(\vec{e}) P_{l_1}^{n_1}(\cos \vartheta_1) P_{l_2}^{n_2}(\cos \vartheta_2) P_{\lambda}^x(\cos \vartheta_2) r^2 dr d \cos \vartheta_2.$$

Здесь $P_{l_1}^{n_1}$ - нормированные присоединенные полиномы Лежандра, символ Кронекера $\delta_{n_1+n_2, x}$ есть результат интеграции по φ_2 , а формулы для

$$(11) \quad \cos \vartheta_1 = \frac{R + \frac{r}{2} \cos \vartheta_2}{\sqrt{R^2 + \frac{r^2}{4} + Rr \cos \vartheta_2}} \equiv \frac{r_1(R, r, \cos \vartheta_2)}{r_1(R, r, \cos \vartheta_2)} \\ \cos \vartheta_2 = \frac{R - \frac{r}{2} \cos \vartheta_2}{\sqrt{R^2 + \frac{r^2}{4} - Rr \cos \vartheta_2}} \equiv \frac{r_2(R, r, \cos \vartheta_2)}{r_2(R, r, \cos \vartheta_2)}$$

легко получаются из рис. I.

Применяя формулы сложения G -функций и свойства коэффициентов Клебша-Гордона, преобразуем (10) к следующему виду:

$$(12) \quad f_{n \lambda \mu}^{l_1 l_2 L M}(\vec{R}) = \sum_{\Lambda} C_{\mu M - \Lambda M}^{\lambda \Lambda L} Y_{\Lambda M - \Lambda}(\vec{e}_2) \tilde{f}_{\Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda L}(\vec{R})$$

где $\tilde{f}_{\Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda L}(\vec{R}) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2L+1}}{2L+1} \int Y_{n_1 l_1}(\vec{e}_1) Y_{n_2 l_2}(\vec{e}_1) Y_{n \lambda}(\vec{e})$

$$(13) \quad \times \sum_{\alpha_1 \alpha_2} (-1)^{n_2} C_{\alpha_1 \alpha_2 x}^{\lambda \Lambda L} C_{n_1 l_1 \alpha_1}^{l_1 l_1 L} P_{l_1}^{n_1}(\cos \vartheta_1) P_{l_2}^{n_2}(\cos \vartheta_2) \times P_{\lambda}^x(\cos \vartheta_2) r^2 dr d \cos \vartheta_2.$$

Сравнивая формулы (6) и (12) с (2), заключаем, что и для потенциала ВС двухчастичная функция может быть представлена в форме (2), полученной ранее только для потенциала Г0. Однако радиальная функция движения ПГ выражается в виде двойного интеграла (13) /сравни с формулой (4)/. Формула (13) является достаточно общей, она справедлива, в частности, и для осцилляторных функций.

Возвращаясь к разложению (5), с помощью (6) и (12) запишем функцию $f_{\lambda \Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2}(\vec{R})$ в виде:

$$(14) \quad f_{\lambda \Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2}(\vec{R}) = \varepsilon R \int Y_{n_1 l_1}(\vec{e}) \tilde{f}_{\Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda L}(\vec{R}) d \cos \vartheta_2.$$

Это выражение полезно при рассмотрении проблемы двух взаимодействующих нуклонов, помещенных в ядерную материю. Оно дает точное решение задачи вместо приближенного результата, выраженного формулами (30) и (35) работы [2].

3. Рассмотрим некоторые свойства функции $\tilde{f}_{\Lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda L}(\vec{R})$. Для этого перепишем формулу (13) в следующем виде:

$$(I5) \quad \tilde{\Phi}_{\lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda}(R) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \int \varphi_{n_1 l_1}^{(l_1)}(\vartheta_1) \varphi_{n_2 l_2}^{(l_2)}(\vartheta_2) \varphi_{n \lambda}^{(\lambda)}(\vartheta) \times (1+(-1)^{l_1+l_2+\lambda+\lambda}) \times \left[\frac{1}{2} C_{\lambda \lambda L}^{\lambda \lambda L} C_{\lambda_1 \lambda_2 L}^{l_1 l_2 L} P_{\lambda_1}^{\kappa} P_{\lambda_2}^{\kappa} P_{\lambda}^{\kappa} + C_{\lambda \lambda L}^{\lambda \lambda L} \sum_{\kappa=-\lambda}^{\min(l_1, l_2)} C_{\lambda_1 \lambda_2 L}^{l_1 l_2 L} P_{\lambda_1}^{\kappa} P_{\lambda_2}^{\kappa} P_{\lambda}^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{\min(\lambda, L)} C_{\lambda \lambda L}^{\lambda \lambda L} \sum_{\kappa=\max(x-l_2, -l_1)}^{\min(x+l_2, l_1)} C_{\lambda_1 \lambda_2 L}^{l_1 l_2 L} P_{\lambda_1}^{\kappa} P_{\lambda_2}^{\kappa} P_{\lambda}^{\kappa} \right] \tilde{r} d\tilde{r} d\cos\vartheta_1 d\cos\vartheta_2.$$

Здесь, в отличие от прежнего вида (I3), явно учтена симметрия по проекциям κ_1, κ_2 и κ и оставлены только повторяющиеся слагаемые. Легко видеть, что неисчезающий вклад дают только члены, сохраняющие четность, а именно, удовлетворяющие условию:

$$(I6) \quad (-1)^{l_1+l_2} = (-1)^{\lambda+\lambda}.$$

Полагая в формуле (I5) $\lambda=0$, приходим к выражению, эквивалентному формулам (I2) и (20) из работы /2/. В работе /2/ интеграция по азимутальным углам не проводилась; авторы, используя факт компланарности векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}$ и \vec{R} , полагали $\varphi_i = 0$, что для $\lambda=0$ эквивалентно интеграции.

Полезно отметить, что в нашем подходе переход к задаче двух частиц неодинаковой массы или, иными словами, к более общему, чем (3), преобразованию координат

$$(I7) \quad \begin{aligned} \vec{e} &= \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{12} \vec{e}_2 & \vec{e}_1 &= \beta_{11} \vec{R} + \beta_{12} \vec{e} \\ \vec{R} &= \alpha_{21} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2 & \vec{e}_2 &= \beta_{21} \vec{R} + \beta_{22} \vec{e} \end{aligned}$$

не изменяет полученных выше результатов, за исключением тривиальных модификаций в формулах (II) для $\cos \vartheta_1$ и $\cos \vartheta_2$:

$$(I8) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{\beta_{11} R + \beta_{12} \tilde{e} \cos \vartheta_2}{\tilde{e}_1} \\ \cos \vartheta_2 &= \frac{\beta_{21} R + \beta_{22} \tilde{e} \cos \vartheta_1}{\tilde{e}_2}. \end{aligned}$$

Комбинируя соотношения (4) и (I3), получим для случая осцилляторных функций следующую формулу для обобщенных коэффициентов Тальми-Мюшинского /3/:

$$(I9) \quad \langle n \lambda N \lambda L | n_1 l_1 n_2 l_2 L \rangle = \int R^2 dR \tilde{\Phi}_{\lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 n \lambda}(R) \varphi_{N \lambda}^{(N)}(R).$$

Эта интегральная форма может оказаться более удобной для вычислений, чем оригинальные формулы работ /3,5/, особенно для общих преобразований координат (I7).

В некоторых задачах, например, при решении уравнения Бете-Голдстоуна /6/ требуется выделить относительное движение двух частиц при заданных состояниях движения ЦТ, т.е. необходимо разложить двухчастичную функцию по полному набору $\varphi_{N \lambda M_{\lambda}}(\vec{R})$, описывающему движение ЦТ в потенциале ВС. Поворачивая систему координат в положение $OZ \parallel \vec{e}$, аналогично предыдущему получим:

$$(20) \quad [\varphi_{n_1 l_1}^{(l_1)}(\vec{e}_1) \varphi_{n_2 l_2}^{(l_2)}(\vec{e}_2)]_{LM} = \sum_{N \lambda} \sum_{M_{\lambda}} C_{M_{\lambda} M_{\lambda} M}^{\lambda \lambda L} \varphi_{N \lambda}(R) Y_{\lambda M_{\lambda}}(\Omega_{\vec{e}}) \tilde{\Phi}_{\lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 N \lambda L}(R) Y_{\lambda M-M_{\lambda}}(\Omega_{\vec{e}}),$$

где в точном соответствии с формулами (I3) и (II):

$$(21) \quad \tilde{\Phi}_{\lambda}^{n_1 l_1 n_2 l_2 N \lambda L}(R) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \int \varphi_{n_1 l_1}^{(l_1)}(\vartheta_1) \varphi_{n_2 l_2}^{(l_2)}(\vartheta_2) \varphi_{N \lambda}^{(N)}(\vartheta) \times \sum_{\kappa_1 \kappa_2} C_{\lambda \lambda L}^{\lambda \lambda L} C_{\lambda_1 \lambda_2 L}^{l_1 l_2 L} P_{\lambda_1}^{\kappa_1}(\cos \vartheta_1) P_{\lambda_2}^{\kappa_2}(\cos \vartheta_2) \times P_{\lambda}^{\kappa}(\cos \vartheta) R^2 dR d\cos \vartheta_1 d\cos \vartheta_2$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{\tilde{e} - R \cos \theta_{\vec{R}}}{\tilde{e}_1} & \cos \theta_{\vec{R}} &= \frac{\tilde{e} + R \cos \vartheta_{\vec{R}}}{|\tilde{e}_2|} \\ \kappa_1^2 &= R^2 + \frac{\tilde{e}^2}{4} - R \tilde{e} \cos \vartheta_{\vec{R}} & \kappa_2^2 &= R^2 + \frac{\tilde{e}^2}{4} + R \tilde{e} \cos \vartheta_{\vec{R}}. \end{aligned}$$

Формулы (20)-(22) дают точное решение задачи,

рассмотренной только приближенно в работе /6/.

Способом, описанным выше, легко получить формулу для парного матричного элемента, справедливую для произвольного конечного центрального потенциала двухчастичного взаимодействия. Результат имеет вид :

$$(23) \quad \int [\varphi_{n_1 l_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 l_2}(\vec{r}_2)]_{LM}^* V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) [\varphi_{n_3 l_3}(\vec{r}_1) \varphi_{n_4 l_4}(\vec{r}_2)]_{LM} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \\ = \frac{2}{2L+1} \int R^2 dR \int z^2 dz V(z) \int \cos \theta_{\vec{r}} \sum_{K_1 K_3 \alpha} C_{K_1 \alpha - K_1 \alpha}^{l_1 l_2 L} C_{K_3 \alpha - K_3 \alpha}^{l_3 l_4 L} \times \\ \times \varphi_{n_1 l_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 l_2}(\vec{r}_2) \varphi_{n_3 l_3}(\vec{r}_1) \varphi_{n_4 l_4}(\vec{r}_2) (-1)^{K_1 - K_3} P_{L_1}^{K_1}(\cos \theta_{\vec{r}_1}) P_{L_2}^{K_3}(\cos \theta_{\vec{r}_2}) \times \\ \times P_{L_3}^{K_3}(\cos \theta_{\vec{r}_1}) P_{L_4}^{K_3}(\cos \theta_{\vec{r}_2}).$$

Обобщение полученных результатов на случай учета спина частиц, эффектов антисимметризации двухчастичных функций, а также учета спин-орбитального взаимодействия в оболочечном потенциале производится непосредственно. Это связано с тем, что упомянутые осложнения не затрагивают проблемы выделения радиального движения центра тяжести (или относительного движения) из двухчастичной функции, что и было предметом нашего рассмотрения (см. по этому поводу формулы (1) - (3) работы /23/). В качестве примера укажем, что учет антисимметризации приведет всего лишь к появлению в формуле (15) дополнительного фактора $(1 + (-1)^{1+S+T+L})$, где S и T - полные спин и изоспин пары нуклонов.

4. Переход к задаче более чем двух частиц продемонстрируем на примере вычисления известного в теории α -распада /7/ интеграла перекрытия:

$$(24) \quad A_{1234}^{j_1 j_2 j_3 j_4 LM}(\vec{R}) = \int \int [\varphi_{n_1 l_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 l_2}(\vec{r}_2)]_{j_1 j_2} [\varphi_{n_3 l_3}(\vec{r}_3) \varphi_{n_4 l_4}(\vec{r}_4)]_{j_3 j_4} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \times \\ \times \chi_{\alpha}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3) d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 d\vec{\xi}_3,$$

который является эффективной функцией ПТ α -кластера в ядре. (Здесь мы опускаем факторы, связанные с антисимметризацией).

Используем переменные :

$$(25) \quad \vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \vec{\xi}_3 = \frac{1}{2} [\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4] \\ \vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \quad \vec{R} = \frac{1}{4} [\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4].$$

Функция $\chi_{\alpha}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$ есть пространственная часть волновой функции α -частицы

$$(26) \quad \chi_{\alpha}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3) = \chi_{00}(\xi_1) Y_{00}(\Omega_{\vec{\xi}_1}) \chi_{00}(\xi_2) Y_{00}(\Omega_{\vec{\xi}_2}) \chi_{00}(\xi_3) Y_{00}(\Omega_{\vec{\xi}_3}) = \\ = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2\right), \quad \beta = 0,434 \varphi^{-2}.$$

Отметим, что функции относительного движения $\chi_{00}(\xi_i)$, в отличие от случая, рассмотренного в разделе 2, принадлежит совершенно иному гамильтониану, чем исходные оболочечные функции $\varphi_{n_i l_i}(\vec{r}_i)$.

В функции (26) учтены только S -состояния относительного движения нуклонов, образующих α -частицу. (Вообще говоря, это только первое приближение, см. ниже).

Поскольку координаты отдельных нуклонов выражаются через переменные $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \vec{R}$ соотношениями

$$(27) \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\vec{\xi}_1}{2} + \frac{\vec{\xi}_2}{\sqrt{2}} \equiv \vec{R}_{12} + \frac{\vec{\xi}_1}{\sqrt{2}} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\vec{\xi}_1}{2} - \frac{\vec{\xi}_2}{\sqrt{2}} \equiv \vec{R}_{12} - \frac{\vec{\xi}_1}{\sqrt{2}} \\ \vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{\vec{\xi}_1}{2} + \frac{\vec{\xi}_2}{\sqrt{2}} \equiv \vec{R}_{34} + \frac{\vec{\xi}_1}{\sqrt{2}} \\ \vec{r}_4 = \vec{R} - \frac{\vec{\xi}_1}{2} - \frac{\vec{\xi}_2}{\sqrt{2}} \equiv \vec{R}_{34} - \frac{\vec{\xi}_1}{\sqrt{2}}$$

естественно вычислять интеграл (24) следующим образом. Интегрируя сначала по переменным \vec{z}_1 и \vec{z}_2 способом, описанным в разделе 2, получим подынтегральное выражение (24) в виде произведения функций $I_{000}^{n_1 l_1 n_2 l_2 j_{12} m_{12}}(\bar{R}_{12})$ и $I_{000}^{n_3 l_3 n_4 l_4 j_{34} m_{34}}(\bar{R}_{34})$, зависящих от координат ЦТ пар нуклонов

$$\bar{R}_{12} = \bar{R} + \frac{m_3}{2} \vec{z}_3; \quad \bar{R}_{34} = \bar{R} - \frac{m_1}{2} \vec{z}_1.$$

Теперь легко провести интеграцию по переменной \vec{z}_3 , поскольку структура функций $I_{000}^{n_1 l_1 n_2 l_2 j_{12} m_{12}}(\bar{R}_{12})$ и $I_{000}^{n_3 l_3 n_4 l_4 j_{34} m_{34}}(\bar{R}_{34})$ аналогична структуре исходных оболочечных функций. Окончательно имеем (сравни с формулой (13)):

$$(28) \quad A_{1234}^{j_{12} j_{34} L M}(\bar{R}) = B_{1234}^{j_{12} j_{34} L}(R) Y_{LM}(\Omega_{\bar{R}})$$

$$(29) \quad B_{1234}^{j_{12} j_{34} L}(R) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2L+1}} \sum_K (-)^K C_{K, -K, 0}^{j_{12} j_{34} L} \int_{j_{12}} \tilde{\Phi}_{j_{12}}^{n_1 l_1 n_2 l_2 j_{12} m_{12}}(\bar{R}_{12}) \Phi_{j_{34}}^{n_3 l_3 n_4 l_4 j_{34} m_{34}}(\bar{R}_{34}) P_{j_{12}}^K(\cos \theta_{R_{12}}) P_{j_{34}}^{-K}(\cos \theta_{R_{34}}) \chi_{00}(\vec{z}_3) \vec{z}_3^2 d\vec{z}_3 d\cos \theta_{\vec{z}_3}.$$

Совершенно аналогично получаются формулы для интеграла перекрытия с учетом состояний относительного движения нуклонов α -частицы с $\lambda \neq 0$, необходимость введения которых диктуется данными по упругому рассеянию быстрых электронов на ядрах ${}^4\text{He}$ /8/.

Расчет интегралов перекрытия для кластеров с нечетным числом частиц имеет ту особенность, что на определенном этапе в формуле типа (29) комбинируются функция ЦТ субкластера, содержащего четное число частиц, с волновой функцией последней нечетной частицы.

Интегрирование легко проводится и в этом случае, с учетом замечания, сделанного перед формулой (18).

Таким образом, по крайней мере в принципе можно выделять движение центра тяжести кластеров с произвольным числом частиц. Единственным ограничением является предположение о том, что внутренняя функция кластера факторизуется на компоненты, зависящие только от одной переменной внутреннего движения.

5. Рассмотрим некоторые применения изложенного выше формализма. Все результаты, обсуждаемые ниже, получены при учете только $1s$ -состояний относительного движения нуклонов, с радиальными функциями (26).

На рис.2 приведены интегралы перекрытия для двух и четырех частиц (а, б) и (в) соответственно), вычисленные с оболочечными функциями потенциала ВС (сплошные кривые) по формулам (13) и (29) для ядра с $A = 210$. Для сравнения показаны результаты для потенциала Г0 (пунктир). Орбитальный момент движения ЦТ $L = 0$. Как видно, во внутренней области ядра интегралы перекрытия для потенциалов ВС и Г0 достаточно хорошо совпадают, что не является неожиданным, поскольку исходные оболочечные функции в этой области также близки, потому что параметры потенциалов выбраны из условия совпадения среднеквадратичных радиусов ядер /4/.

Однако для области $R \geq R_0$ интегралы перекрытия сильно различаются. Аналогично случаю двух частиц /2/, α -кластерный интеграл перекрытия имеет следующее асимптотическое поведение:

$$A_{1234}^{000}(R > R_0) \rightarrow \exp[-\sqrt{8m(2E_1 + 2E_2)}R].$$

Ввиду того, что ширина распада квазистационарного состояния определяется поведением интеграла перекрытия в поверхностной области, переход от обычно используемых оболочечных функций ГО к функциям потенциала ВС приводит к существенному изменению величины ширины.

Рассмотрим теперь с помощью нашего метода формфакторы, которые описывают эффекты ядерной структуры в прямых реакциях передачи кластеров. В простейшем варианте теории, когда не учитываются остаточные взаимодействия между нуклонами переданного кластера, формфактор практически идентичен соответствующему интегралу перекрытия, способ расчета которого рассмотрен выше. При этом внутреннее движение переданного кластера определяется структурой налетающего ядра.

Процедуру, обычно применяемую для получения кластерных формфакторов, рассмотрим на примере реакции (${}^6\text{Li}, \alpha$), изученной для ряда легких ядер с $A \leq 40$ /9/. Сначала методом Тальми-Мошинского выделяем движение ЦТ α -кластера в модели ГО, принимая приближение одинаковых размеров кластера и конечного ядра. Формфактор имеет при этом вид оболочечной волновой функции и затем с помощью *well-depth* процедуры для функции ЦТ α -частицы, движущейся в потенциале ВС, можно подобрать асимптотическое поведение, определяемое энергией реакции. Если описанный выше метод приемлем для ядер с $A \approx 10$, то для массовых чисел $A \approx 40$ (размеры ядра и α -кластера заметно отличаются) формфактор в модели ГО представляет собой суперпозицию нескольких оболочечных функций, и, казалось бы, применение *well-depth* процедуры не является оправданным. На рис. 3 показаны результаты наших расчетов α -частичного формфактора с оболочечными функциями потенциала ВС для $A = 40$.

Сравнивая эти формфакторы (сплошные кривые) с соответствующими величинами, рассчитанными в модели ГО в приближении одинаковых размеров конечного ядра и кластера (пунктир), заключаем, что форма интеграла перекрытия определяется не столько относительными размерами, сколько величиной орбитального момента состояний, в которых оказываются переданные нуклоны. Таким образом, формфакторы, использованные в работе /9/, оказываются достаточно реалистичными, поскольку рассматривались только конфигурации $1s, 1p, 2s, 1d$ оболочек.

Полезно отметить, что расчеты по формулам (13) и (29) с оболочечными функциями потенциала ВС по трудоемкости сравнимы с расчетами по методу Тальми-Мошинского для осцилляторных функций.

6. В настоящей работе решена задача выделения движения центра тяжести кластеров в ядре для реалистического оболочечного потенциала при заданном состоянии внутреннего движения кластера. Однако остается принципиальная проблема последовательного построения функций относительного движения нуклонов в ядре, которая не может быть решена без учета остаточных взаимодействий и принципа Паули. Тем не менее развитый метод оказывается полезным при расчете абсолютных ширины α -распада, анализе структурных эффектов в прямых реакциях передачи кластеров, а также в решении некоторых других проблем.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Ф.А.Гареева за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.A.Brody, M.Moshinsky. Tables of Transformation Brackets. Mexico, 1960.
2. B.F.Bayman, A.Kallio. Phys.Rev. 156 (1967) 1121.
3. A.Gal, Ann. of Phys. 49 (1968) 341.
4. О.Бор, Б.Моттelson. Структура атомного ядра. Москва, Мир, 1971.
5. Yu.F.Smirnov. Nucl.Phys. 27 (1961) 177. Nucl.Phys. 39(1962)346.
6. J.G. Zabolitsky, M.Gari, H.Kummel, Nucl. Phys. A 155(1970) 526.
7. H.P.Mang. Phys.Rev., 119 (1960) 1069.
A.Sandulescu. Nucl.Phys., 37 (1962) 332.
8. V.C.Aguillera Navarra, M.Moshinsky, W.W.Yeh, Ann.Phys. 51 (1969) 312.
9. H.H.Gutbrod, H.Yoshida, R.Bock. Nucl.Phys. A 165 (1971) 240.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1974 г.