сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-81-737

М.И.Широков

О НЕОБХОДИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

1981

I. Введение

Известны две формулировки статистической интерпретации волновой функции ψ. Одна утверждает, в частности, что выражения $|\psi(x)|^2$ или $|\psi(p)|^2$ должны истолковываться как плотности вероятности. Вторая гласит, что $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ должно интерпретироваться как среднее значение наблюдаемой $\mathcal{O}$ в состоянии ψ. Эквивалентность этих формулировок показана, например, в /I/.

Во всех учебниках квантовой механики, а также в монографиях, посвященных ее принципиальным основам (см., например, /I-4/), статистическая интерпретация ψ трактуется как отдельный постулат, независимый от остальных квантовых постулатов. Более того, Фейнман в /5/ (см. стр. 540) ставил даже вопрос о том, является ли вероятностная интерпретация ψ единственно возможной.

В этой работе показывается, что статистическая интерпретация может быть выведена из других постулатов, а именно, постулатов I),2), 3), сформулированных в разделах 3 и 4. Основная идея вывода состоит в следующем: доказывается, что определенный класс квадратов модулей ψ обладает всеми свойствами, которыми должны обладать вероятности согласно аксиоматической теории вероятностей.

Сходный результат был получен фон Нейманом, см. гл. IУ в /I/. Нейман вывел выражение $(\psi|\mathcal{O}|\psi)$ для среднего значения оператора. Однако он исходил при этом из более общих положений, нежели квантовомеханические. Его основная цель состояла в доказательстве невозможности введения "скрытых переменных" в квантовую механику (критику этого доказательства см., например, в /6-8/). Если вывод Неймана рассматривать с точки зрения нашей цели, то его основной недостаток заключается в том, что среди его исходных положений фигурирует предпосылка B' - среднее суммы операторов равно сумме средних (см. гл. IУ, §I в /I/). Она является следствием аксиом теории вероятностей и поэтому частично заменяет их. Таким образом, для вывода статистической интерпретации используется предпосылка тоже статистического характера.

Мы начинаем в разделе 2 с изложения нужных нам сведений об основных понятиях теории вероятностей и ее аксиоматике (по Колмогорову). Вывод постулата статистической интерпретации из других постулатов содержится в разделах 3 и 4. В разделе 5 формулируется соотношение между экспериментальными частотами наблюдения (частицы в некотором объеме, например) и соответствующей вероятностью. Обсуждается одно следствие этого соотношения и его экспериментальная проверка.

В этой работе рассматриваются только "чистые" состояния, описываемые одним вектором ψ, но не матрицей плотности.

В Заключении резюмируется и комментируется основной результат работы и приводятся некоторые его следствия.

2. Аксиоматическая теория вероятностей

Используемые в дальнейшем сведения об аксиоматической теории вероятностей достаточно будет изложить на уровне элементарной теории дискретных событий.

I. Исходным понятием является множество Ω элементарных событий (выпадение грани игральной кости, например). Его всевозможные подмножества F называются случайными событиями (пример такого подмножества: выпадение грани с четным числом очков). Для элементов A, B системы F определен ряд операций ($A \cup B$ или $A+B$; $A \cap B$ или AB ; дополнение $\bar{A}$ к A , т.е. не A , и т.д.), так что F является (булевой) алгеброй (аксиома I). Каждому элементу A из F сопоставляется действительное число $W(A) \geqslant 0$, называемое вероятностью A (аксиома II)[1], так что вероятность $W(\Omega)$, сопоставляемая всему множеству Ω , равна I (аксиома III). Если A , B,... не пересекаются, то

$$W(A+B+\dots) = W(A) + W(B) + \dots \tag{I}$$

(аксиома сложения IУ). Если A и B пересекаются, то можно показать, что

$$W(A+B) = W(A) + W(B) - W(AB). \tag{I'}$$

---

[1] Разные меры $W(A)$ на одном и том же множестве F соответствуют разным комплексам условий наступления или ненаступления событий (разным неправильным игральным костям, например).

Подробности можно найти в /9/, а также в других изложениях теории вероятностей (см., например, /10-12/).

2. Ничто в перечисленных понятиях и аксиомах не указывает на то, что мера $W(A)$ есть именно вероятность. Например, множество Ω может состоять из звеньев цепи. Под F можно понимать всевозможные куски цепи, а под $W(A)$ – суммарную массу звеньев, составляющих кусок (точнее, соответствующую долю полной массы цепи). Теория вероятностей выделяется из общей теории меры с помощью понятия случайности и понятия независимых многократных испытаний /9/.

Относительно понятия испытания см., например, /10,11/. Как бы это понятие не раскрывалось, элемент A называется случайным событием, если в результате процедуры испытания он либо имеет место (наступает, осуществляется), либо нет, причем заранее нельзя предсказать, какая из этих возможностей осуществляется.

Ввиду свойства случайности мера A не может быть найдена в одном испытании (в отличие от случая цепи). Необходимы многократные одинаковые независимые испытания. N одинаковым испытаниям соответствуют N одинаковых экземпляров множества Ω, точнее N полей вероятности (Ω, F, W). Пусть $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_N$ есть сложное событие, состоящее в том, что в первом экземпляре выбирается какое-либо событие A_1, во втором – A_2 и т.д. Принимаем следующий тезис: "Мера любого сложного события $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_N$ равна произведению мер $W(A_1) W(A_2) \ldots W(A_N)$". Математики предпочитают рассматривать этот тезис как определение независимости соответствующих N испытаний. Однако на самом деле он используется не для проверки независимости, а как аксиома, необходимая для нахождения вероятности сложного события. Этот тезис мы будем считать дополнительной аксиомой теории вероятностей (дополняющей аксиомы Колмогорова, перечисленные в пункте 1), полагая, что понятие независимости может быть определено отдельно в каждом приложении теории вероятностей без помощи этого тезиса. Пример: N одинаковых костей бросаются одинаковым образом одновременно в удаленных друг от друга местах.

3. Тот факт, что вероятность одновременного выпадения шестерки на двух одинаковых правильных костях равна $1/36$, является очевидным, если мы имеем понятие о вероятности как об относительной частоте. Покажем, что, наоборот, из дополнительной аксиомы можно вывести толкование меры $W(A)$ события A как относительной частоты. Для этого каждое из N одинаковых множеств Ω рассмотрим как состоящее из суммы $A + \bar{A}$. Рассмотрим сложное событие, состоящее в том, что в M испытаниях, $M = 0, 1, 2 \ldots N$, выпало событие A, а в остальных $N - M$ испытаниях – событие $\bar{A}$. В учебниках теории вероятностей с помощью дополнительной аксиомы для меры $W_A(M)$ этого сложного события выводится выражение

$$W_A(M) = \frac{N!}{M!(N-M)!}\ [W(A)]^M\ [1-W(A)]^{N-M} \qquad (2)$$

Известно, что это биномиальное распределение имеет резкий пик в районе $M_{max} \cong N \cdot W(A)$ и он тем резче, чем больше N (закон больших чисел). Распределение (2) характеризует связь $W(A)$ с частотой M. Наиболее четко эту связь можно выразить, если ввести понятие теоретической относительной частоты, определяя ее соотношением M_{max}/N, которое равно $W(A)$. Итак, мере $W(A)$ можно придать смысл вероятности как относительной частоты.

4. Замечание. Вероятностное толкование $W(A)$ получено с помощью мер $W_A(M)$. Их тоже можно истолковать как относительные частоты, что даст право назвать M_{max} наиболее вероятным значением M. Серию из N испытаний надо повторить N' раз. С помощью дополнительной аксиомы можно вычислить (как функцию $W_A(M)$) меру $W_M(M')$ события, состоящего в том, что данное число M (осуществлений события A) будет наступать M' раз, а $N'-M'$ раз будем иметь другое число осуществлений A. Для $W_M(M')$ получим опять биномиальное распределение вида (2), где вместо $W(A)$ следует подставить $W_A(M)$. С его помощью можно определить $M'_{max} = N' \cdot W_A(M)$, откуда $W_A(M) = M'_{max}/N'$.

3. Квадраты модулей волновой функции как аксиоматические вероятности

В основе физической теории лежат ее понятия, ее постулаты (аксиомы) и соотношения теоретических и опытных понятий. Сначала мы будем иметь дело с квантовомеханической идеальной моделью мира, определяемой понятиями и аксиомами теории. Под статистической интерпретацией будет пониматься толкование $|\langle\ |\psi\rangle|^2$ как относительной частоты событий в этом идеальном мире. Соотношение между $|\langle\ |\psi\rangle|^2$ и наблюдаемыми частотами будет обсуждено в разделе 5.

I. В соответствии с обычной схемой эксперимента теория прежде всего должна уметь описывать состояние физической системы (каким-то образом приготовленное) и измерения, производимые с этими состояниями. В классической механике любая совокупность конкретных значений обобщенных координат и импульсов описывает некоторое состояние. Можно сказать, что эта совокупность и есть состояние в классической идеальной модели мира. В квантовой механике соответствующее основное положение гласит:

1) Состояния системы описываются нормированными на единицу векторами ψ некоторого линейного векторного пространства $\mathcal{H}$. Относительно аксиом, определяющих $\mathcal{H}$, см., например, /1,2,13/.

Любой вектор $\mathcal{H}$ соответствует некоторому состоянию (принцип суперпозиции). Исключения связаны с правилами суперотбора.

2. Мы собираемся показать, что аксиомы Колмогорова, сформулированные в пункте I раздела 2, могут быть реализованы с помощью постулата I) и содержащихся в нем понятий.

Понятие события естественно связать с физическим измерением. Однако понятия измерения нет в постулате I), и нам следует употребить другой квантовомеханический термин.

Измерительные приборы являются фактически спектральными анализаторами или фильтрами, осуществляющими те или иные разложения состояния (см., например, /I4/, §I7; /I5/; /4/, гл.II.I). В теории им соответствуют разложения ψ по полным наборам (ортонормированных) векторов. В качестве последних берутся собственные функции φ_ν эрмитовых операторов, у которых φ_ν образуют полные наборы. Такие операторы мы будем называть наблюдаемыми [2], следуя /2/.

Свойство разложимости ψ по полным наборам векторов есть одно из свойств пространства $\mathcal{H}$ (см., например, /I/, гл. II, теорема 7).

Если в этом и следующем разделах встречается термин "Измерение" вместо "Разложение", то следует подразумевать, что в квантовой модели мира введено понятие идеального измерительного прибора, фактически совпадающее с понятием наблюдаемой.

3. Выпишем словарь квантовомеханических терминов, соответствующих теоретико-вероятностным понятиям, встречающимся в аксиоме I Колмогорова.

Вектор состояния ψ соответствует понятию "Множество Ω всех элементарных событий" и одновременно содержит в себе информацию типа "Структура неправильной игральной кости", предопределяющую конкретное значение меры элемента Ω (см. далее). Понятию разложения Ω на элементарные события соответствует разложение ψ по собственным векторам $\varphi(\nu,r)$ какой-либо наблюдаемой $\mathcal{O}$:

$$\psi = S_\nu S_r \; \varphi(\nu,r)\, C(\nu,r) \quad , \qquad \mathcal{O}\,\varphi(\nu,r) = \nu\,\varphi(\nu,r). \tag{3}$$

Здесь S_ν означает суммирование или интегрирование по собственным значениям ν оператора $\mathcal{O}$; S_r есть суммирование-интегрирование по индексу вырождения r .

Таким образом понятию элемента Ω сопоставляется компонента ψ , направленная по $\varphi(\nu,r)$, или проекция ψ на $\varphi(\nu,r)$.

---

[2] Термин общепринят, хотя, возможно, и неудачен, поскольку речь идет о теоретическом понятии. Нейман такие операторы называет гипермаксимальными (см. стр. I28 в /I/).

Точнее, речь должна идти о проекции ψ на подпространство, натянутое на векторы $\varphi(\nu,r)$: ν фиксировано, r пробегает все значения. Другая формулировка: элементарное событие состоит в том, что в состоянии Ψ наблюдаемая $\mathcal{O}$ принимает одно из своих собственных значений.

Понятию элемента множества F всех подмножеств Ω сопоставляется компонента (или проекция) ψ в подпространстве, натянутом на векторы $\varphi(\nu,r)$ со значениями ν, принадлежащими какому-либо отрезку $(\alpha;\beta)$ действительной прямой R $(\alpha\leqslant\nu\leqslant\beta$, r принимает все значения) или некоторой совокупности таких отрезков. Например, если φ_m – собственные функции z-проекции орбитального момента ($m=0,\pm1,\pm2,\ldots$) и $(\alpha;\beta)$ есть отрезок $(-1{,}53\,;\,2{,}57)$, то речь идет о подпространстве, натянутом на векторы φ_{-1}, φ_0, φ_1, φ_2. Далее малыми латинскими буквами $a, b, \ldots$ будут обозначаться такие отрезки или их совокупности, а также соответствующие им квантовые события.

Обобщая, можно рассматривать разложение ψ по собственным функциям набора коммутирующих операторов $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ и под $a, b, \ldots$ подразумевать некоторые многомерные области значений их собственных чисел ν_1, $\nu_2, \ldots$.

Для a и b можно определить операции объединения $a\cup b$ или $a+b$ (наблюдение тех точек спектра, которые входят в a или в b), пересечения или общей части $a\cap b$ или ab и все прочие операции булевой алгебры, определенные для множества событий F в теории вероятностей.

4. Выберем в качестве меры элементарного квантового события квадрат модуля коэффициента $c(\nu,r)$ из разложения (3). Соответственно определим формулой

$$W(a) = S_{\nu\in a}\, S_r\, |\langle \varphi(\nu,r)|\psi\rangle|^2 \tag{4}$$

меру события a, состоящего в том, что в состоянии ψ собственные значения $\mathcal{O}$ попадают в отрезок a .

Для того, чтобы показать, что $W(a)$ удовлетворяет аксиомам II, III, IV Колмогорова (см. раздел 2), окажется полезной перепись (4) в ином виде.

Пользуясь формулой $\langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle$, получаем

$$W(a) = S_{\nu\in a}\, S_r \langle\psi|\varphi(\nu,r)\rangle\langle\varphi(\nu,r)|\psi\rangle \equiv \langle\psi|P_a|\psi\rangle. \tag{5}$$

Здесь введен так называемый проекционный оператор

$$P_a \equiv S_{\nu\in a}\, S_r\, |\varphi(\nu,r)\rangle\langle\varphi(\nu,r)|. \tag{6}$$

Он эрмитов и имеет свойство $P_a^2 = P_a$, так что $W(a)$ можно еще записать в виде

$$W(a) = \langle\psi, P_a\psi\rangle = \langle P_a\psi, P_a\psi\rangle \equiv \|P_a\psi\|^2. \tag{7}$$

Из (6) следует, что если a и b не пересекаются, то $P_{a+b} = P_a + P_b$. Если a и b пересекаются, то $P_{a+b} = P_a + P_b - P_{ab}$: точки $a+b$ получаются из точек a и b выбрасыванием общих точек $a \cap b$. Из (6) следует также, что $P_{ab} = P_a P_b$.

Заметим, что в случае, когда речь идет о разложении ψ по собственным векторам нескольких коммутирующих наблюдаемых $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots$, то (7) обобщается следующим образом:

$$W(a_1, a_2, \dots) = \| P_{a_1}^{(1)} P_{a_2}^{(2)} \dots \psi \|^2, \tag{8}$$

где $P_{a_i}^{(i)}$ – проектор на событие a_i, соответствующий наблюдаемой $\mathcal{O}_i$ (см. /1/, гл. Ш, раздел I, определение W).

5. Неотрицательность $W(a)$ (аксиома П) прямо усматривается из (4). Свойство $W(\Omega)=1$ выводится из (5) с помощью условия полноты $\psi(v,r)$

$$S_v S_r \ |\psi(v,r)\rangle\langle\psi(v,r)| = 1$$

и условия нормировки $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Наконец, в случае непересекающихся $a, b, \dots$ имеем

$$W(a+b+\dots) = \langle\psi | P_{a+b+\dots} |\psi\rangle = \langle\psi | P_a + P_b + \dots |\psi\rangle = W(a) + W(b) + \dots \tag{9}$$

Использовано свойство $P_{a+b} = P_a + P_b$ и дистрибутивное свойство скалярного произведения в пространстве $\mathcal{H}$

$$\langle\psi, \psi_a + \psi_b + \dots\rangle = \langle\psi, \psi_a\rangle + \langle\psi, \psi_b\rangle + \dots$$

6. Подчеркнем, что всем аксиомам Колмогорова подчиняется только вполне определенное множество мер (8), а именно $W(a_1, a_2 \dots)$ при всех $a_1, a_2 \dots$ и фиксированном ψ, причем все проекторы в (8) соответствуют коммутирующим наблюдаемым. Возможность рассмотрения некоммутирующих $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots$ в /1/ отбрасывается на том основании, что тогда (8) зависело бы от порядка следования $P_{a_i}^{(i)}$ (см. /1/, гл. Ш, стр. 151). Однако почему бы нам не рассматривать вероятности, зависящие от порядка выполнения измерений? Можно показать, что этому препятствует уже невыполнение аксиомы I (см. раздел 2): события теперь не подчиняются правилам булевой алгебры. А именно, не выполняется свойство дистрибутивности $a_1(a_2 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$ для событий a_1, a_2, a_3, соответствующих некоммутирующим проекторам $P_{a_1}^{(1)}, P_{a_2}^{(2)}, P_{a_3}^{(3)}$, см. пример в конце гл. 6.4 в /3/.

7. Кое-что из изложенного выше (а именно пункт 5) было известно еще по книге фон Неймана /1/. Однако наш подход и цель иные, чем у фон Неймана. Он <u>постулировал</u> (см. /1/ гл. Ш раздел I), что (8) есть вероятность и затем проверил, что (8) обладает "разумными свойствами" вероятности. Мы же хотим <u>вывести</u> заключение, что $W(a)$ есть вероятность на том основании, что $W(a)$ имеет все свойства, которыми долж-

на обладать вероятность согласно ее аксиоматическому определению. Для этой цели надо еще вывести свойство случайности квантового события и частотное истолкование меры $W(\alpha)$.

4. Свойство случайности квантового события и частотная интерпретация его меры

Хотя в предыдущем разделе и были использованы вероятностные термины ("событие", например), но в сущности ничто из того, что там было изложено, не препятствует невероятностному толкованию меры $W(\alpha)$. Например, выражение $|\langle x|\psi\rangle|^2$ можно толковать так же, как в случае классического поля $\phi(x)$: $|\phi(x)|^2$ пропорционально, например, плотности энергии поля. В этом разделе мы покажем, откуда вытекает свойство случайности квантового события и частотное истолкование его меры.

I. Случайность квантового события вытекает из ортодоксальной или копенгагенской интерпретации вектора состояния ψ : ψ описывает одну физическую систему (один электрон или один атом водорода и т.д.) Относительно другой возможной интерпретации см. замечание А в Заключении. Обсудим следствия ортодоксальной интерпретации.

Простейшее разложение ψ на квантовые события имеет вид $\psi = P_\alpha\psi + (1-P_\alpha)\psi$, где P_α – какой-либо проектор. Например, в опыте Штерна-Герлаха осуществляется разложение $\psi = [\varphi(+) + \varphi(-)]/\sqrt{2}$, где $\varphi(+)$ и $\varphi(-)$ – суть собственные функции z -проекции оператора спина электрона. Поскольку ψ описывает один неделимый электрон, то это разложение не может означать разложения электрона на две "половинки". В квантовой механике постулируется:

2) В результате квантового измерения, соответствующего разложению $\psi = P_\alpha\psi + (1-P_\alpha)\psi$, физическая система оказывается либо в состоянии $P_\alpha\psi$, либо в состоянии $(1-P_\alpha)\psi$, причем нельзя предсказать, какая из этих возможностей осуществится (см., например, /2/, гл. I; /16/, раздел 4.2).

Этот "постулат редукции" волновой функции означает, что квантовое событие обладает свойством случайности, см. раздел 2, пункт 2.

Говоря о случайном квантовом событии, часто употребляют термин "Вопрос" (question, proposition), см. /3,17/ [3]. Его происхождение таково. Вместо того, чтобы называть $W(\alpha)$ вероятностью случайного события α, можно говорить, что $W(\alpha)$ есть вероятность ответа "да" на вопрос: "попадают ли собственные значения наблюдаемой $\mathcal{O}$ в интервал α при измерении $\mathcal{O}$ в состоянии ψ ?" Или: "принимает ли проектор P_α значение I в состоянии ψ ?".

---

3) Фон Нейман вместо него употреблял слово Eigenschaft (свойство), см. /1/, гл. III, раздел 5.

2. Понятию " N независимых множеств Ω " (см. раздел 2, пункт 2) естественно сопоставить известное квантовомеханическое понятие ансамбля N невзаимодействующих систем.[1] Если мы знаем векторы состояния каждой из составляющих ансамбль физических систем, то описать весь ансамбль в целом нам позволяет следующий постулат:

3) Пусть система S описывается вектором $|\psi\rangle$ и другая система S' описывается вектором $|\psi'\rangle$. Если системы невзаимодействующие, то составная система из S и S' описывается элементом $|\psi\rangle|\psi'\rangle$ прямого произведения $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$ (см. /4/, гл. 3, "правило 2").

Из этого постулата по индукции следует, что вектор состояния Φ ансамбля из N систем является произведением N векторов

$$\Phi = \psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_N \equiv \Pi_j \psi_j, \qquad (10)$$

где ψ_j описывает систему S_j. В частности, если состояния отдельных систем ансамбля описываются собственными функциями оператора $\mathcal{O}$, то состояние ансамбля в целом описывается вектором

$$\Phi(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_N) = \varphi(\nu_1, r_1)\, \varphi(\nu_2, r_2) \dots \varphi(\nu_N, r_N). \qquad (10')$$

Проекционный оператор вида

$$P(a_1\, a_2 \dots a_N) = S_{\nu_1 \in a_1} S_{r_1} \dots S_{\nu_N \in a_N} S_{r_N} \;|\Phi(\nu_1, \dots \nu_N)\rangle\langle\Phi(\nu_1, \dots \nu_N)|$$

распадается в силу (10') на произведение

$$P(a_1\; a_2 \dots a_N) = P(a_1)\, P(a_2) \dots P(a_N) \qquad (11)$$

проекционных операторов вида (6), относящихся к отдельным системам ансамбля. Проектор (11) соответствует сложному событию, состоящему в том, что у каждой системы S_j наблюдается (измеряется) событие, соответствующее проектору $P(a_j)$.

Из (10) и (11) следует, что мера

$$W(a_1\; a_2 \dots a_N) = \langle \Phi,\; P(a_1\; a_2 \dots a_N)\, \Phi\rangle,$$

соответствующая проектору (11) и вектору (10), распадается на произведение мер

$$W(a_1\; a_2 \dots a_N) = W(a_1)\, W(a_2) \dots W(a_N), \qquad (12)$$

где $W(a_i)$ определяется соотношением (4). Таким образом, исходя из постулата 3), мы получили дополнительную аксиому теории вероятностей (см. раздел 2, пункт 2). Она лежит в основе вывода биномиального распределения для схемы Бернулли, с помощью которого можно истолковать меру $W(a)$ как относительную частоту и придать таким образом этой мере смысл вероятности (см. раздел 2, пункт 3).

Сделаем замечание относительно формул (10) и (10') в связи с квантовомеханическим принципом тождественности частиц.

Можно считать, что составляющие ансамбль системы находятся далеко друг от друга (в пространстве или во времени) и поэтому не взаимодействуют. В таком случае частицы, входящие в эти системы, различаются своей принадлежностью к разным системам. Волновые пакеты этих частиц никогда не перекрываются: перекрытие противоречило бы условию невзаимодействия. Можно, например, считать, что протоны из системы S_i и протоны другой системы S_j находятся в разных состояниях, потому что пространственно разделены. Поэтому (10) и (11) не надо как-то симметризовать или антисимметризовать (это надо делать только с волновой функцией системы S, если в S есть несколько тождественных частиц).

3. Приведем чисто квантовомеханический вывод биномиального распределения, не опирающийся на соотношение (12).

По аналогии с (11) выпишем для ансамбля из N одинаковых систем проектор, соответствующий следующему квантовому событию: наблюдаемая $\mathcal{O}$ принимает значение из отрезка a в M системах (выбранных определенным образом, $M=0,1,2,\dots N$), а в остальных $N-M$ системах значения вне a (т.е. в дополнении $\bar{a}$ к a). В силу (11) этот проектор равен произведению

$$P_{i_1}(a)\,P_{i_2}(a)\dots P_{i_M}(a)\;P_{i_{M+1}}(\bar{a})\,P_{i_{M+2}}(\bar{a})\dots P_{i_N}(\bar{a}). \tag{13}$$

Здесь $i_1, i_2,\dots i_M$ – какие-либо M номеров из N, например, $i_1=1$, $i_2=2,\dots i_M=M$. Заметим, что проектор $P_{\bar{a}}$, соответствующий $\bar{a}$, равен $1-P_a$, потому что проектор, соответствующий всей действительной прямой $a+\bar{a}$, равен 1.

Пусть мы не интересуемся (не измеряем), в каких именно M системах из N оператор $\mathcal{O}$ принимает значения из a. Такому измерению соответствует проектор P_M, являющийся суммой $\sum_c$ выражений (13), взятой по всем сочетаниям C_N^M из N по M [4]. Проектору P_M соответствует мера

$$\begin{aligned} W_a(M) &= \langle \Phi, P_M\, \Phi\rangle = \\ &= \sum_c \langle \Pi_j \psi_j | P_{i_1}(a)\dots P_{i_M}(a)\,P_{i_{M+1}}(\bar{a})\dots P_{i_N}(\bar{a}) | \Pi_i \psi_i\rangle = \\ &= \sum_c \Pi_{k=1}^{M} \langle \psi_k | P_k(a) | \psi_k\rangle\, \Pi_{l=1}^{N-M} \langle \psi_l | P_l(\bar{a}) | \psi_l\rangle = \\ &= C_N^M\,[W(a)]^M\,[1-W(a)]^{N-M}. \end{aligned} \tag{14}$$

Мы воспользовались тем, что проектор P_i действует только на ψ_i. Использовано далее соотношение (7) и

---

[4] Поясняющий пример: если P_i есть проекторы на непересекающиеся интервалы Δp_i значений импульса, $i=1,2,\dots n$, то $\sum_i P_i$ соответствует такому событию: импульс принимает значения, попадающие либо в Δp_1, либо в $\Delta p_2,\dots$, либо в Δp_n.

$$\langle \psi_\ell, P_\ell(\bar a)\psi_\ell\rangle = \langle \psi_\ell, [1 - P_\ell(a)]\psi_\ell\rangle = 1 - W(a). \quad (15)$$

Таким образом, получено биномиальное распределение (I4) для сложного события, состоящего в том, что в M измерениях наблюдаемая принимает значения из отрезка a, в остальных же $N-M$ измерениях не принимает таких значений.

5. Соотношение между флуктуациями наблюдаемых частот и вероятностями

Мы получили толкование $\|P_a\psi\|^2$ как относительной частоты квантового события в идеальной модели мира, основанной на постулатах I), 2), 3), не содержащих правил соответствия с реальным миром. Если эти правила добавить, то $\|P_a\psi\|^2$ будет иметь отношение к наблюдаемым частотам. В этом разделе в основном будут обсуждаться флуктуации или распределения наблюдаемых частот около некоторого среднего значения, а не соотношение (равенство) этого среднего значения и соответствующей теоретической вероятности. Последнее зависит от выбора потенциала в уравнении Шредингера и других частных предположений. Конкретный же вид упомянутых флуктуаций - распределений должен быть всегда совершенно определенным (биномиальным, например), если такие общие квантовые постулаты, как I), 2), 3), правильно отражают свойства реального мира.

Соотношение между наблюдаемыми частотами и вероятностями было сформулировано А.Н.Колмогоровым применительно к любым практическим приложениям теории вероятностей. Мы изложим его на квантовомеханическом языке.

Если постулаты I), 2), 3) правильно отражают природу, то в эксперименте с N практически невзаимодействующими системами физическая величина, соответствующая наблюдаемой $\mathcal{O}$, будет принимать значения из отрезка a у M из этих N систем с вероятностью $W_a(M)$, см. (I4). При больших N это значит, что почти всегда наблюдаемая частота будет близка к некоторой наивероятнейшей частоте M_{max}. Однако при $M_{max} \neq 0$ имеется малая, но ненулевая вероятность $W_a(M)$ получить значения M, сильно отличающиеся от M_{max}.

В этой формулировке использовано понятие теоретического вероятностного распределения $W_a(M)$. Его можно заменить соответствующим экспериментальным распределением, которое может быть измерено следующим образом. Надо взять N' ансамблей из N физических систем, и тогда $W_a(M)$ почти всегда приблизительно равно при большом N' наблюденной относительной частоте появления фиксированного числа M (числа систем, у которых наблюдаемая приняла значения из интервала a). Однако опять раскрытие термина"почти всегда приблизительно" требует знания теоретического распределения $W_M(M')$ (см. раздел 2, пункт 4).

Таким образом, установление соотношения между наблюдаемыми частотами и вероятностью требует, чтобы мы имели некое априорное понятие о вероятности. Эта логическая трудность не имеет однако существенного практического значения /12/.

1. В качестве приложения изложенного соотношения обсудим вопрос о том, является ли невозможным (ненаблюдаемым) событие, вероятность которого равна нулю. А.Н.Колмогоров полагает (см. /9/, гл. I, примечание II к §2), что оно не невозможно, поскольку его относительная частота M/N должна только почти всегда равняться нулю (аргумент К).

Этот вопрос важен для квантовой теории. Дело в том, что законы сохранения и правила запрета формулируются этой теорией в вероятностном виде: вероятность нарушения закона или запрета равна нулю (в силу равенства нулю соответствующих элементов S-матрицы, например). Если событие, имеющее нулевую вероятность, не невозможно, то одно наблюдение (даже вполне достоверное) распада протона $p \to e^{+} + \pi^{0}$ не противоречит закону сохранения барионного числа.

Попробуем уточнить аргумент К. Вычислим вероятность того, что при $W(A) = 0$ событие A будет наблюдено $M \neq 0$ раз. Биномиальное распределение (2) дает $W_A(M) = 0$ для любого $M \neq 0$. Таким образом, любое уклонение частоты от нулевой имеет нулевую вероятность. Это опять вероятность, и K говорит, что не невозможно наблюдать $M = 1$. Однако уточнение можно продолжать: вычислить вероятность $W_{M=1}(M')$ того, что, повторяя N испытаний N' раз, мы получим $M' \neq 0$ раз значение $M = 1$. Поскольку $W_{M=1}(M')$ выражается через вероятность W_A (1), см. (15), которая равна нулю, то $W_{M=1}(M' \neq 0) = 0$ и т.д.

Равенство нулю всех мыслимых характеристик отклонения от нулевого значения M (т.е. от невозможности) свидетельствует против аргумента K. Во всяком случае изложенная аргументация означает, что противоположный тезис "Если вероятность события равна нулю, то оно невозможно", не противоречит исходным положениям теории вероятностей и может быть принят как дополнительное точное утверждение вместо утверждения Колмогорова. Тогда квантовые запреты означают четкое экспериментальное предсказание: запрещенные события невозможны.

2. Остановимся на вопросе экспериментальной проверки соотношения между наблюдаемыми частотами и вероятностью. Это соотношение гласит, что в случае, когда имеется всего два возможных результата измерения, флуктуация наблюдаемой частоты около наивероятнейшего значения должна описываться биномиальным распределением (2) или (14). Для флуктуаций в радиоактивном распаде было установлено, что соответствующее экспериментальное распределение действительно следует предельной форме биномиального распределения, а именно, распределению Пуассона /18/.

Здесь я хочу подчеркнуть, что описанные в /I8/ опыты являются лишь простейшим примером того, что вообще можно и следует проверять. Должно быть биномиальным и распределение, обозначенное как $W_M(M')$ в пункте 4 раздела 2. Если число возможных результатов измерения больше двух, то можно проверять полиномиальное распределение, например,

$$W_{a_1,a_2}(M_1,M_2)=\frac{N!}{M_1!\,M_2!\,M_3!}\left[W(a_1)\right]^{M_1}\left[W(a_2)\right]^{M_2}\left[W(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\right]^{M_3} \tag{I6}$$

$$M_1+M_2+M_3=N\quad,\quad W(a_1)+W(a_2)+W(\bar{a}_1+\bar{a}_2)=1\,.$$

Основной результат этой работы означает, что рассмотренные опыты проверяют правильность описания природы квантовыми постулатами I),2),3).

6. Заключение

Мы показали, что квадраты модулей вида $\| P_a\psi\|^2$ удовлетворяют аксиоматическому определению вероятностей (см. раздел 2), исходя из следующих квантовых постулатов:

I) Состояния описываются нормированными векторами ψ некоторого линейного пространства;

2) Постулат редукции ψ при измерении;

3) Вектор состояния φ ансамбля невзаимодействующих физических систем $S_1, S_2,\ldots$ является прямым произведением их векторов состояния $\psi_1, \psi_2,\ldots$.

Поскольку $\| P_a\psi\|^2$ является вероятностью ввиду I),2),3), то специальный постулат о вероятностной интерпретации $\| P_a\psi\|^2$ является излишним при наличии I),2),3). Можно сказать, что I),2),3) дают конкретную реализацию аксиом теории вероятностей.

I. Итак, мы заключаем, что вероятностная или статистическая интерпретация $\| P_a\psi\|^2$ является необходимым следствием I),2),3). В некотором смысле имеет место и свойство достаточности. В этой работе мы придерживались ортодоксальной формы квантовой механики. Однако квантовую теорию можно построить на теоретико-вероятностной основе, используя понятие вероятности как исходное (см., например, /I9,20/). Привлекая ряд других положений, на этом пути можно придти к описанию состояния вектором гильбертова пространства. Таким образом и в этом подходе устанавливается зависимость между статистической интерпретацией и другими постулатами квантовой механики.

2. Возможно, будет полезной краткая формулировка нашего основного результата в виде следующего упрощенного тезиса: "Наличие у вещества одновременно волновых и корпускулярных свойств с необходимостью ведет к вероятностной интерпретации Борна". Под волновыми здесь

должны пониматься те свойства, которые вытекают из описания состояния физической системы волновыми функциями, в частности, свойства типа дифракции, т.е. свойства разложимости состояния. Корпускулярность означает, что это волновое описание применяется не к непрерывной среде, но к отдельным частицам (электрон, атом, молекула и т.д.) и к их ансамблям.

3. Замечания по поводу основного результата

А. Свойство случайности результата квантового измерения нами было выведено с помощью ортодоксальной интерпретации ψ, согласно которой ψ описывает <u>одну</u> систему. Ансамбль систем описывается вектором (I0) и отсюда выводилась частотная интерпретация $\|P_a\psi\|^2$. Оба эти вывода не могут быть получены, если считать, что ψ описывает ансамбль /I4,I6,23/. В рамках ансамблевой интерпретации ψ можно только показать, что $\|P_a\psi\|^2$ есть некоторая мера (см. раздел 3). Постулирование статистического толкования этой меры является при этой интерпретации необходимым.

Б. Неправильно было бы думать, что постулат редукции 2), вводящий понятие случайности, фактически эквивалентен постулату статистической интерпретации. Ведь не со всякой случайностью связана вероятность (пример: случайность завтрашнего дождя). Статистическая интерпретация ψ следует из всех трех постулатов I),2),3).

4. Вывод статистической интерпретации ψ из других квантовых постулатов можно рассматривать как вклад в осуществление такой важной задачи теории, как описание наблюдаемых фактов с помощью наименьшего числа предпосылок. Сейчас мы перечислим другие следствия нашего исследования, которые имеют уже отношение не к внутреннему строению теории (ее аксиоматике), но к связи теории с экспериментом.

Наш результат означает, что с постулатами I),2),3) совместима только следующая статистическая интерпретация ψ : $\|P_a\psi\|^2$ есть относительная частота измерений в ансамбле и соответственно $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ есть среднее по ансамблю. Как на пример иной интерпретации, укажем на предложение толковать $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ как среднее по набору последовательных во времени измерений /2I,22/. Поскольку в силу I),2),3) выражение $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ обязательно имеет смысл среднего по ансамблю, то интерпретация /2I,22/ совместима с постулатами I),2),3) только в том случае, если среднее по времени совпадает со средним по ансамблю (заметим, что в /2I,22/ обсуждается как раз тот случай, когда совпадения нет).

В разделе 5 было подчеркнуто, что следствием статистической интерпретации ψ (т.е. постулатов I),2),3) в конечном счете) является вполне определенное распределение флуктуаций наблюдаемых частот около средней частоты. С помощью этого распределения было показано, что событие, имеющее нулевую вероятность, следует считать невозможным, хотя общим правилом является лишь приблизительное совпадение наблюдаемых относительных частот с вероятностью. Поэтому наблюдение теоретически строго запрещенных процессов обязательно означает, что неверен вариант теории, дающий запрет.

Были предложены эксперименты, более полно проверяющие предсказываемые квантовой теорией флуктуации наблюдаемых частот, чем это было сделано до сих пор.

Приношу благодарность А.Б.Говоркову, А.А.Тяпкину, В.Л.Любошицу, Е.Л.Фейнбергу и особенно М.И.Подгорецкому за обсуждение и критику первоначального варианта настоящей работы.

Литература

I. Нейман И. Математические основы квантовой механики. "Наука", Москва I964.

2. Дирак П. Принципы квантовой механики. "Наука", Москва, I979.

3. Fano G. Mathematical Methods of Quantum Mechanics, McGraw-Hill New York 1971, Ch. 6.

4. d'Espagnat B. Conceptual Foundations of Quantum Mechanics. W.Benjamin, California 1971.

5. Feynman R.P. The concept of probability of Quantum Mechanics, in: Proc. Second Berkeley Symp. on Math.Statistics and Probability ed. J.Neyman, University of California Press, Berkeley 1951,p.533-541.

6. Bell J.S. Rev.Mod.Phys. 1966, 38, p. 447-452.

7. Bohm D., Bub J. Rev.Mod.Phys., 1966, 38, p. 470.

8. Ахиезер А.И., Половин Р.В. УФН, I972, I07, с. 463.

9. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей, "Наука", Москва, I979, гл. I.

I0. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" I965.

II. Лоэв М. Теория вероятностей, ИИЛ, М., I962.

I2. Колмогоров А.Н. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. II, Акад. наук СССР, Москва, I956, гл. XI, с. 252.

I3. Böhm A. The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York 1978.

I4. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. Высшая школа. Москва, I96I.

I5. Мессиа А. Квантовая механика,"Наука,"Москва, I978. т. I, гл. V § I3.

I6. Ballentine L. Rev.Mod.Phys., 1970 42, 358.

I7. Jauch J.M. Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, 1968, Ch. 5.

I8. Кюри М. Радиоактивность. Москва ГИФМЛ I960, § 58.
I9. Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики."Мир", Москва, I968, гл. I.
20. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. "Мир", Москва, I965, гл. 2.2.
2I. Buonomano V. Nuovo Cimento 1980 57B, 146.
22. Cerofolini F. Nuovo Cimento 1980 58B, 286.
23. Блохинцев Д.И. Принципиальные вопросы квантовой механики. "Наука", Москва, I966.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября I98I года.