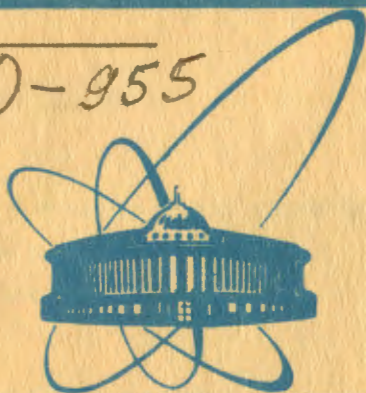


0-955



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

6425/2-81

28/11-81

P4-81-692

Г.Очирбат\*

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД  
В СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА

\* Монгольский государственный университет

1981

В теории парных корреляций сверхпроводящего типа гамильтониан для нейтронной или протонной системы деформированного ядра берется в виде /1/

$$H_0 = \sum_{s \in} \{ E_0(s) - \lambda \} a_{s \in}^+ a_{s \in} - G \sum_{s \neq s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+} , \quad (I)$$

где  $E_0(s)$  - одночастичная энергия,  $s+$ ,  $s-$  - одночастичные состояния,  $\lambda$  - химический потенциал.

Мы используем точные волновые функции и интересуемся только методологическим вопросом, заключающимся в применении теории графов. Ввиду этого положим, что

$$H = \sum E(s) n_s - G \sum_{s \neq s'} b_s^+ b_{s'} , \quad (2)$$

где  $b_s^+ = a_{s-}^+ a_{s-}^+$ ,  $b_s = a_{s-} a_{s+}$ ,

$$n_s = \frac{1}{2} (a_{s+}^+ a_{s+} + a_{s-}^+ a_{s-}) . \quad (3)$$

Здесь  $b_s^+$  и  $b_s$  - операторы рождения и уничтожения пары в состоянии  $s$ ,  $n_s$  - оператор числа пары. Коммутационные соотношения для этих операторов имеют вид:

$$[b_s b_{s'}] = 0, \quad [b_s^+ b_{s'}^+] = 0, \quad [b_s b_{s'}^+] = (1 - 2n_s) \delta_{ss'} , \quad (4)$$

$$[n_s b_{s'}^+] = b_s^+ \delta_{ss'} , \quad [n_s b_{s'}] = -b_s \delta_{ss'} . \quad (5)$$

Рассмотрим задачу на собственные состояния в случае  $(n, N)$ , где  $n$  - число пар,  $N$  - число одночастичных уравнений:

$$H \Psi(n, N) = E_{n, N} \Psi(n, N) . \quad (6)$$

I. Случай  $(1, N)$ . Операторную волновую функцию будем искать в виде

$$\Psi(1, N) = \sum_i \psi_i \varrho_i^+ |0\rangle, \quad (7)$$

где  $|0\rangle$  - вакуум для частиц. Из уравнения  $H\Psi(1, N) = E_{1, N}\Psi(1, N)$  находим, что

$$E_r \Psi_r - G \sum_{c \atop (c \neq r)} \Psi_c = E_{1, N} \Psi_r. \quad (8)$$

Отсюда

$$-\sum_r G / (E_{1, N} - E_r - G) = 1, \quad (9)$$

$$\Psi_r^j = f^j / (E_{1, N}^j - E_r - G), \quad (10)$$

где  $j$  - номер корня уравнения (9),  $f^j$  - величина, не зависящая от  $r$ . Решения вида (7) при различных корнях уравнения (9) ортогональны между собой:

$$\begin{aligned} \sum_{r, s} (\langle 0 | \varrho_r \varrho_s^+ | 0 \rangle) \Psi_r^{*i} \Psi_s^j &= \sum_r \frac{f^{*i}}{E_{1, N}^i - E_r - G} \cdot \frac{f^j}{E_{1, N}^j - E_r - G} = \\ &= \frac{f^{*i} f^j}{E_{1, N}^i - E_{1, N}^j} \left( \sum_r \frac{1}{E_{1, N}^j - E_r - G} - \sum_r \frac{1}{E_{1, N}^i - E_r - G} \right) = 0. \quad (II) \end{aligned}$$

Если ввести оператор

$$c_i^+ = \sum_r \psi_r^i \varrho_r^+,$$

то, несмотря на (II),  $c_i^+ c_j^+ |0\rangle$  ( $i \neq j$ ),  $c_i^+ c_j^+ c_k^+ |0\rangle$  ( $i \neq j \neq k$ ), ... не являются решениями задачи  $(2, N)$ ,  $(3, N)$ , ..., из-за перестановочных соотношений (4). Поэтому для каждого случая  $(n, N)$  необходимо было решать задачу отдельно и диагонализировать матрицу размера, равного сочетанию  $C_N^n$ . Практическая невозможность осуществ-

вления такой программы для достаточно больших  $n$  и  $N$ , имеющих физический интерес в теории парных корреляций сверхтекучего типа, привела к созданию эффективного приближенного метода /4/.

2. Случай  $(2, N)$ . Волновая функция имеет вид

$$\Psi(2, N) = \sum \Psi_{ij} \varrho_i^+ \varrho_j^+ |0\rangle, \quad (12)$$

где  $\Psi_{ij} = 0$ , если  $j \leq i$ .

Подставим ее в уравнение (6). После этого, умножая данное уравнение с левой стороны на вектор вида  $\langle 0 | \varrho_r \varrho_k$ , получим систему алгебраических однородных уравнений

$$(E_r + E_k - E_{2N})(\Psi_{rk} + \Psi_{kr}) - G \sum_{j \neq r} (\Psi_{jr} + \Psi_{rj}) - G \sum_{j \neq k} (\Psi_{jk} + \Psi_{kj}) = 0. \quad (13)$$

При  $N=2$  задача тривиальна:  $E_{2,2} = E_1 + E_2$ ,  $\Psi_{12} = 1$ . При  $N=3$  характерный для больших  $N$  несвязный граф еще не появляется, поэтому подробно рассмотрим случай  $N=4$ . Матрица системы тогда имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{12} - \varepsilon_{2N} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon_{13} - \varepsilon_{2N} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon_{14} - \varepsilon_{2N} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \varepsilon_{23} - \varepsilon_{2N} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon_{24} - \varepsilon_{2N} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \varepsilon_{34} - \varepsilon_{2N} \end{pmatrix} \quad (14)$$

где мы ввели обозначения:  $\varepsilon_{ik} = (E_i + E_k)/G$ ,  $\varepsilon = E_{2N}/G$ .

Представим определитель этой матрицы в виде полинома по степеням произведений диагональных элементов:

$$\det(2, N) = \sum K_{i_1, i_2, \dots} (\varepsilon_{i_1} - \varepsilon)(\varepsilon_{i_2} - \varepsilon) \dots, \quad (15)$$

и покажем связь структуры коэффициентов  $K_{i_1, i_2, \dots}$  с топологической структурой графов.

Для краткости изложения введем ряд определений.

Определение I. Любой член полинома (15), порядок которого на

число  $\rho$  ниже максимальной степени, называется членом вершины  $\rho$ .

Определение 2. Произведение  $(\varepsilon_{j_1} - \varepsilon)(\varepsilon_{j_2} - \varepsilon) \dots (\varepsilon_{j_\rho} - \varepsilon)$ , которое следует подставить к произведению  $(\varepsilon_{j_1} - \varepsilon)(\varepsilon_{j_2} - \varepsilon) \dots (\varepsilon_{j_m} - \varepsilon)$  члена вершины  $\rho$  до образования максимальной степени, называется дополнительными множителями этого члена.

Коэффициент единственного члена вершины 0 равен 1, а коэффициент при любом члене вершины  $\rho=1$  равен нулю. При  $\rho=2$  возможны два случая. Если индексы  $j_1, j_2$  двух дополнительных множителей,  $(\varepsilon_{j_1} - \varepsilon)(\varepsilon_{j_2} - \varepsilon)$ , какого-то члена вершины 2 содержат общее число, то этот член входит в (15) с коэффициентом

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

а в любом другом случае - с коэффициентом

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично любой член вершины  $\rho$  входит в (15) с коэффициентом, равным определителю матрицы  $(\rho \times \rho)$ , в которой  $(l, m)$ -й элемент равен 1 (или 0), если индексы  $j_l$  и  $j_m$  в  $l$ -й и  $m$ -й дополнительных множителях данного члена содержат (или не содержат) общее число. Порядок этих множителей в произведении несуществен, так как их перестановка не влияет на величину определителя.

Теперь каждой матрице  $(\rho \times \rho)$ , соответствующей коэффициенту члена вершины  $\rho$ , поставим в соответствие граф с  $\rho$  вершинами, в котором  $i$ -я и  $r$ -я вершины соединены, если в матрице  $(i, r)$ -й элемент равен 1. Тогда каждый член секулярного уравнения в сверхтекучей модели ядра связывается с определенным графом. При  $\rho=2$  существуют два графа:



Первый соответствует членам четвертого порядка, два дополнительных множителя которых имеют следующие индексы:

I2, I3; I2, I4; I2, 23; I2, 34; I3, I4; I3, 23; I3, 34; I4, 23;

I4, 34; 23, 34.

а второй - также членам четвертого порядка, но дополнительные множители

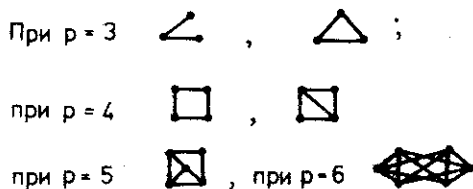
ли которых имеют индексы I2,34; I3,24; I4,23; Аналогично любой граф соответствует множеству членов, имеющих общую индексную структуру. Поэтому мы используем здесь непомеченные графы. Графы, появившиеся в случае (2,4), будут также присутствовать во всех случаях (2,N), где N > 5.

Теория графов может наглядно показывать возможные топологические неэквивалентные индексные структуры членов (15). Более того, существует изящный графический способ вычисления определителей матриц, которые изображаются графами [2-3]. Определитель матрицы A, соответствующей графу G, равен

$$\det A(G) = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i} 2^{c_i} \quad (16)$$

где  $e_i$ ,  $c_i$  - число четных компонент, число простых циклов  $i$ -го линейного подграфа.

Возможны следующие графы в случае (2,4):



Мы разобрали случай (2,5). Размер системы равен 10, максимальный граф имеет столько же вершин. Из огромного количества графов, имеющих до 10 вершин, здесь реализуется сравнительно небольшое их число. Эти графы приведены в Приложении. Определители матриц, изображающих эти графы, т.е. коэффициенты  $K_i$ ,  $i_2, \dots$  в (15), вычисленные по формуле (16), даны в таблице, где  $p$  - число вершин,  $\gamma$  - номер графа вершин  $p$  в Приложении.

Рассмотрим случай (3, N). Волновая функция имеет вид:

$$\Psi(3, N) = \sum_{ijk} \psi_{ijk} e_i^+ e_j^+ e_k^+ |0\rangle, \quad (17)$$

Таблица

$\gamma$ \ P	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	0	-I	0	0	0	0	0	0	-32	-64
2		0	2	0	-2	0	8	16		
3			0	I	-2	-4	0			
4				-3	-2	4	0			
5					0	0	0			

причем  $\Psi_{ijk}$  может принимать ненулевые значения только при  $i < j < k$ .  
Уравнения для  $\Psi_{ijk}$  :

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k - E_{3N}) \Psi_{ijk} - G \sum_{\substack{p, s \\ s \neq i}} \Psi_{sjk} - G \sum_{\substack{p, s \\ i \neq j}} \Psi_{sik} - G \sum_{\substack{p, s \\ s \neq k}} \Psi_{ijs} = 0, \quad (18)$$

где  $\rho$  - обозначает суммирование по перестановкам индексов. Анализ структуры уравнений (8), (13), (18) позволяет написать нам уравнения для волновой функции в самом общем случае  $(n, N)$  :























$$(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \dots + \varepsilon_n - E_{nN}) \sum_{\rho} \Psi_{ijk\dots n} - G \sum_{\substack{p, s \\ s \neq i}} \Psi_{sjk\dots n} - G \sum_{\substack{p, s \\ s \neq j}} \Psi_{isk\dots n} - \dots - G \sum_{\substack{p, s \\ s \neq n}} \Psi_{ij\dots s} = 0. \quad (19)$$










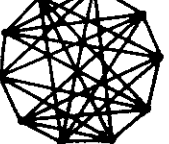
Здесь, как и выше,  $\Psi_{ijk\dots n} = 0$ , если индекс не удовлетворяет условию:  $i < j < k < \dots < n$ . Вид уравнений (19) показывает, что если мы напьем матрицу системы, то  $(i_1, i_2, \dots, i_n; j_1, j_2, \dots, j_n)$  -й элемент равен I, если набор чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$  отличается от набора чисел  $j_1, j_2, \dots, j_n$  только одним числом. В противном случае этот элемент равен нулю. Это как раз та матрица, в соответствие которой можно поставить граф. Таким образом, в любом случае мы имеем дело с графом. Графический способ изображения секулярного уравнения носит универсальный характер в сверхтекучей модели ядра.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. В.Г. Соловьеву и кандидату физико-математических наук Л.А.Малову за внимание к данной работе и поддержку.

Приложение:

Графы , появившиеся в случае (2,5)

№	4	5	6	7
1				
2				
3				
4				
5				
6				

р \ ч	1	2	3
1			
2			
3			
8			
9			
10			



### Литература

1. В.Г. Соловьев . Теория атомного ядра. М., 1981.
2. Ф. Харари. Теория графов. М., 1973.
3. F.Nagary. The determinant of the adjacency matrix of a graph SIAM Review, 4, 1962.
4. В.Г. Соловьев. ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 823.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 ноября 1981 года.