объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-81-690

Е.Б.Бальбуцев, З.Вайшвила, И.Н.Михайлов

ФОРМА И НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ КВАДРУПОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР В МАКРОСКОПИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ.

Эллипсоиды

Направлено в ЯФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1,2] нами была развита модель для изучения коллективного движения во вращающихся ядрах. Эта модель объединяет физические аргументы, предложенные в статьях [3-5], и математический метод анализа уравнений классической гидродинамики, разработанный в [6,7].

Центральным элементом модели, отличающим ее от модели классической жидкой капли /КЖК/, является учет распределения частиц /нуклонов/ по скоростям /принцип Паули/, а также зависимость такого распределения от коллективного движения нуклонов /"деформация ферми-поверхности" ядра/. На этом основании модель называется нами моделью капли ферми-жидкости /КФЖ/.

В работах [1,2] дан вывод основных уравнений модели и проведен анализ условий векового равновесия вращающихся ядер и их нормальных мод квадрупольной симметрии при ограничении формы поверхности сплюснутыми сфероидами. Здесь мы продолжаем подобный анализ, включая в рассмотрение эллипсоидальные фигуры равновесия.

Проводя исследования такого рода, мы руководствовались следующими соображениями:

1/ анализ стационарных конфигураций вращающихся ядер и их нормальных мод колебаний является необходимым первым шагом в изучении динамики процессов, происходящих в составных ядерных системах, образованных при слиянии тяжелых ионов высокой энергии с ядрами;

2/ результаты предыдущего анализа [1,2] показали, что учет ферми-движения существенно изменяет выводы модели КЖК относительно спектра нормальных частот ядер и условий устойчивости ядерных конфигураций.

2. ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Опубликовано много работ, посвященных исследованиям формы вращающихся ядер, которые основаны на гидродинамической модели [7-9]. Обычно такие исследования ограничиваются изучением конфигураций, устойчивых относительно малых возмущений условий равновесия. В дальнейшем будет показано, что условия устойчивости КФЖ отличаются от предсказаний гидродинамической модели. Имея в виду это обстоятельство, мы приводим здесь результаты расчетов формы всех возможных равновесных конфигураций КФЖ, выполненных в аппроксимации формы поверхности капли эллипсоидами по методу, развитому в работах [6,7].

Аппроксимируем форму поверхности вращающегося ядра эллипсоидом с полуосями

$$a_3^2 = a_0^2[1 - \frac{4}{3}\delta\cos\gamma] ,$$
$$a_2^2 = a_0^2[1 - \frac{4}{3}\delta\cos(\gamma - 120°)] , \qquad /1/$$
$$a_1^2 = a_0^2[1 - \frac{4}{3}\delta\cos(\gamma + 120°)],$$

где δ и γ - параметры деформации и неаксиальности. a_0 фиксируется условием сохранения объема: $a_1 a_2 a_3 = R^3 = r_0^3 A$ /A - атомный вес, $r_0 = 1,18$ Фм/. В [1,2] было показано, что в условиях векового равновесия связь a_i со скоростью вращения Ω для КФЖ задается теми же уравнениями, что и в обычной гидродинамике [7]:

$$\Omega^2 a_1 = \frac{2a_2 a_3}{\rho}[\frac{15}{4}T(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_1) - \pi q^2(a_1^2 A_1 - a_3^2 A_3)] ,$$
$$\Omega^2 a_2 = \frac{2a_1 a_3}{\rho}[\frac{15}{4}T(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2) - \pi q^2(a_2^2 A_2 - a_3^2 A_3)] . \qquad /2/$$

Здесь ρ - плотность вещества (ρ=const); $q(r)$ - плотность заряда в ядре, которая считается постоянной: $q^2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{0,7}{\pi^2} \frac{Z^2}{A^2} \frac{\text{МэВ}}{r_0^5}$ / Z - число протонов/; T - коэффициент поверхностного натяжения, который можно связать с соответствующим параметром $b \simeq 17$ МэВ формулы Вайцзекера: $T = b/(4\pi r_0^2)$. Ось вращения направлена вдоль оси 3. В /2/ и в дальнейшем используются так называемые индексные символы $A_{ij\ldots}$, $B_{ij\ldots}$, $\mathfrak{A}_{ij\ldots}$, $\mathfrak{B}_{ij\ldots}$ - функции полуосей /см. Приложение/. Уравнения /2/ удобно переписать в другом виде:

$$4\pi q^2(a_1^2 a_2^2 A_{12} - a_3^2 A_3) - 15T(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2 - a_2^2 \mathfrak{A}_{12}) = 0, \qquad /3/$$

$$\rho\Omega^2 = 2R^3(\frac{15}{4}T\,\mathfrak{A}_{12} - \pi q^2 B_{12}), \quad a_1 \neq a_2 . \qquad /4/$$

Соотношение /3/ накладывает геометрическое ограничение на возможные эллипсоидальные фигуры равновесия, связывая параметры δ и γ. Из формулы /4/ определяется скорость вращения Ω, соответствующая каждой из конфигураций, удовлетворяющих условию /3/. Угловой момент вращающейся капли фиксируется выражением $I = \frac{4\pi R^3}{15}\rho(a_1^2 + a_2^2)\,\Omega$.

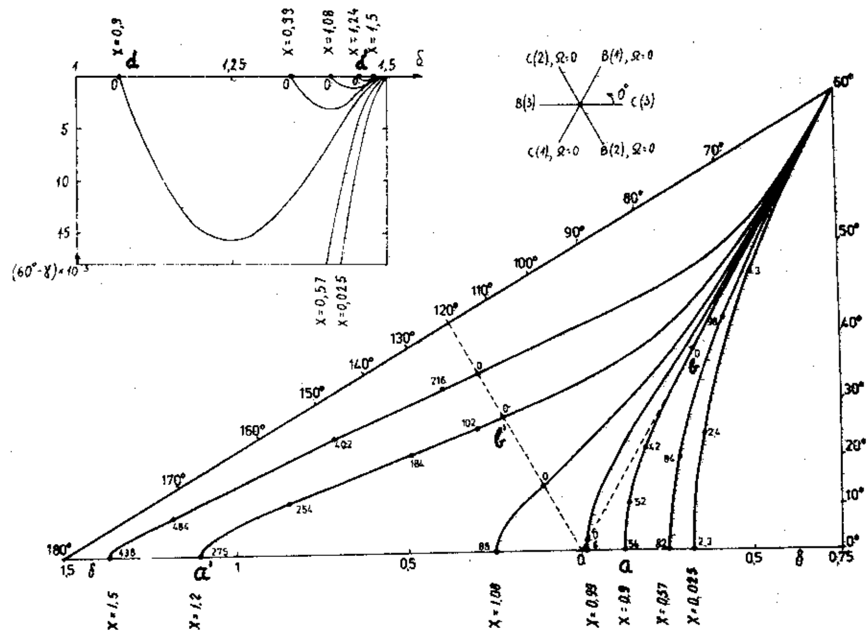


Рис.1. Равновесные эллипсоидальные конфигурации КФЖ, X – параметр делимости. Цифры рядом с точками на кривых – значения углового момента в единицах Планка для ядер с дорожки β-стабильности. Справа вверху – диаграмма, показывающая, как меняется форма капли через каждые 60° параметра неаксиальности γ / В – вытянутый, С – сплюснутый сфероид; цифра рядом с буквой указывает ось симметрии/. Слева вверху – увеличенная область /$59{,}985° \le \gamma \le 60°$, $1 \le \delta \le 1{,}5$/.

Множество неэквивалентных равновесных конфигураций вращающихся фигур на плоскости δ, γ заполняет прямоугольный треугольник /рис.1/. Сферической форме соответствует точка 0. Расстояние до этой точки равно параметру δ. Угловая координата γ пробегает значения в интервале $0° \le \gamma \le 180°$. При γ, кратном 60°, равновесная форма обладает аксиальной симметрией /γ= 0° и 120° – сплюснутые, γ = 60° и 180° – вытянутые сфероиды/. Неэквивалентность конфигураций в разных секторах с угловым раствором 60° обязана различной ориентации углового момента относительно вращающейся капли. На части периметра треугольника /гипотенуза и малый катет/, соответствующей максимальным при данном γ значениям δ, капля вырождается в объект с числом измерений, меньшим чем 3/одна или две полуоси эллипсоида обращаются в нуль/.

Каждая из кривых на рисунке соответствует решению уравнения /3/ для определенного значения параметра делимости $X = \frac{2\pi R^3 q^2}{15T} \simeq 0{,}0206\frac{Z^2}{A}$. Представлены как устойчивые относительно деления ($X<1$), так и делящиеся ($X\geq 1$) ядра. Цифры рядом с точками на кривых равны угловому моменту состояния /в единицах Планка/, найденному из уравнения /4/ для ядер с дорожки β-стабильности /Z и A этих ядер связаны соотношением $Z=A/(2+0{,}014A^{2/3})$/. Действительные решения для Ω отсутствуют в случае $60°<\gamma<120°$. Принимая во внимание /1/, видим, что разрешенные конфигурации соответствуют эллипсоидам, вращающимся вокруг самой короткой либо самой длинной оси. Как следует из строгого рассмотрения[7], тело не может вращаться вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии. В соответствии с этим точкам на лучах $\gamma = 60°$ и $120°$ отвечают значения $\Omega=0$. Эллипсоидальные конфигурации можно разделить на следующие пять классов:

а/ $0 \leq X \lesssim 0{,}81$,

б/ $0{,}81 \lesssim X \lesssim 0{,}886$,

в/ $0{,}886 \lesssim X < 1$,

г/ $1 \leq X \lesssim 1{,}2$,

д/ $1{,}2 \lesssim X$.

Кривые класса а/ начинаются с конечных значений δ и γ в точке бифуркации /см. [1,2,6,7] / сплюснутого сфероида на луче $\gamma=0°$. С ростом γ /а вместе с ним и δ / угловой момент монотонно растет. По мере приближения γ к $60°$ капля вырождается в одномерный объект, причем $I\to\infty$, $\Omega\to 0$.

Кривые класса б/ характеризуются тем, что с ростом деформации угловой момент сначала уменьшается до определенного минимального значения I_{min}, а потом начинает быстро расти при $\gamma\to 60°$, как и в предыдущем случае. При $X\simeq 0{,}886$ I_{min} достигает нулевого значения. На рис.1 это новое качество конфигураций класса в/ проявляется в том, что соответствующие кривые пересекают луч $\gamma=60°$ два раза, т.е. заходят в сектор $60°<\gamma<120°$ и опять возвращаются в сектор $0°<\gamma<60°$, где ведут себя при $\gamma\to 60°$ подобно конфигурациям классов а/ и б/ /см. увеличенный фрагмент рис.1/. Части кривых, расположенные в секторе $60°<\gamma<120°$, соответствуют мнимым значениям Ω и представляют интерес только с математической точки зрения.

При $X\to 1$ первое пересечение кривых с лучом $\gamma=60°$ происходит при все меньших значениях δ, достигая значения $\delta=0$ при $X=1$. Кривая для $X=1$ примечательна тем, что это единственная кривая, которая начинается при $\delta=0$ сразу в секторе $60°\leq\gamma\leq 120°$.

Кривые класса г/ начинаются при конечных значениях δ и I в точке бифуркации вытянутого сфероида на луче $\gamma=180°$. С уменьшением γ угловой момент монотонно убывает до нулевого значения на луче $\gamma=120°$. При $\delta\gtrsim 1{,}35$ они пересекают луч $\gamma=60°$ с $I=0$ и стре-

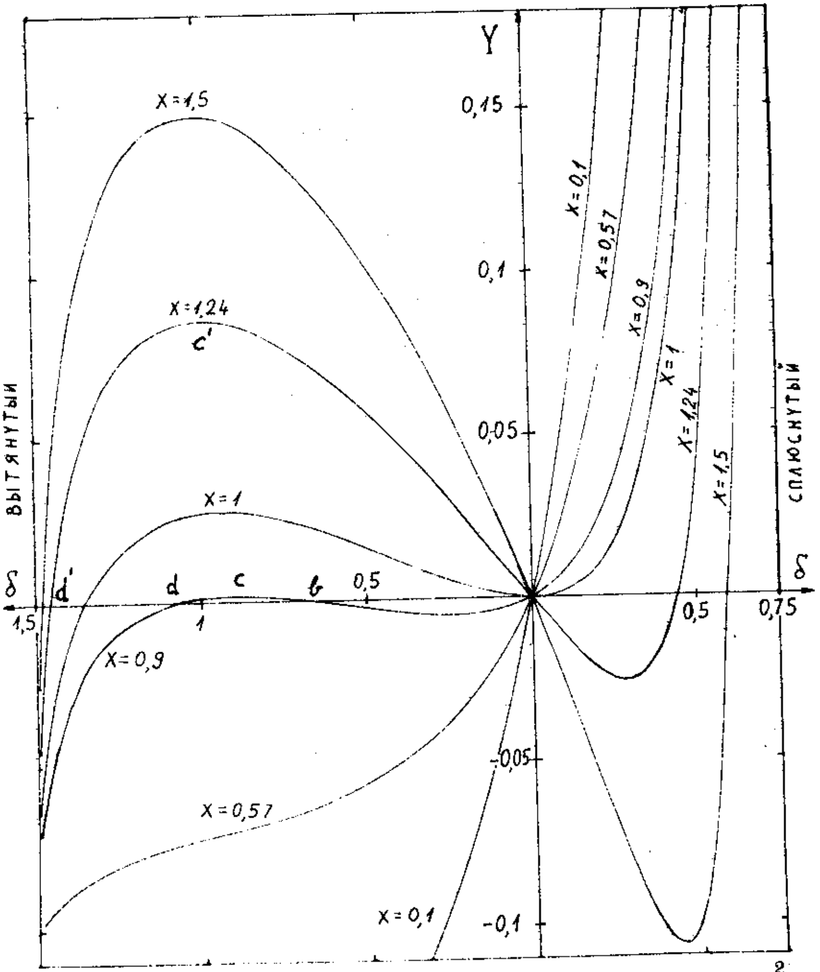


Рис.2. Зависимость параметра вращения $Y = \frac{M\Omega^2}{150\pi T}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2R^2}\right)^2$ капли сфероидальной формы от параметра деформации δ.
X – параметр делимости.

мятся далее к предельному значению $\delta = 1{,}5$ /при $\gamma \to 60°$ /, причем $I \to \infty$, $\Omega \to 0$.

Такая картина наблюдается до $X \simeq 1{,}2$. Далее начинается класс д/. При уменьшении γ угловой момент капли сначала увеличивается от его значения в точке бифуркации до некоторого максимального значения, а потом уже уменьшается до нуля на луче $\gamma = 120°$. Далее эти кривые ведут себя аналогично кривым класса г/.

Описание эллипсоидальных фигур равновесия будет неполным, если не рассмотреть сфероиды, от которых они ответвляются. В работах /1,2/ речь шла только о сплюснутых сфероидах с $X<1$. Здесь же представлена полная информация о равновесных сфероидальных конфигурациях. На рис.2 показана зависимость деформации вытянутых и сплюснутых сфероидов от скорости вращения Ω для $0<X\leq 1{,}5$.

Как видно, существование сплюснутых сфероидальных фигур равновесия возможно /т.е. $\Omega^2>0$ / для любых X. Кривая $X=1$ делит здесь ядра на две группы. Для ядер с $X\leq 1$ возможны любые деформации: с ростом Ω деформация, начинаясь с $\delta=0$ при $\Omega=0$, плавно растет и стремится к предельному значению $\delta=0{,}75$. В случае $X>1$ существуют решения уравнений /2/ с $\delta\neq 0$ при $\Omega=0$ /статическая деформация/. Начинаясь с некоторой конечной величины δ_0 при $\Omega=0$, δ увеличивается с ростом Ω и стремится к значению $\delta=0{,}75$. Сплюснутые сфероиды с деформацией $\delta<\delta_0$ при $X>1$ не существуют $(\Omega^2<0)$. Статическим деформациям этих ядер на рис.1 соответствуют точки пересечения кривых с лучом $\gamma=120°$.

Существование вытянутых сфероидальных фигур равновесия возможно, если $X\geq 0{,}886$. Причем каждому значению Ω здесь соответствуют две равновесные формы. Эти ядра тоже делятся на две группы кривой $X=1$. Ядра с $0{,}886<X<1$ имеют два отличных от нуля значения статической деформации, а ядра с $X\geq 1$ - только одно. Этим статическим деформациям на рис.1 соответствуют точки пересечения кривых с лучом $\gamma=60°$.

С ростом угловой скорости вращения Ω два возможных значения равновесной деформации вытянутого сфероида сближаются /см. рис.2/ до совпадения при некотором максимальном для данного ядра значении Ω.

В заключение этого раздела интересно проследить за эволюцией формы нескольких ядер вдоль кривых на рис.1 и 2.

Ядро с $X=0{,}9$ может вращаться с любой скоростью Ω в виде сплюснутого сфероида /см. рис.2/. При некотором значении $\Omega_б$ /в точке бифуркации a на рис.1/ оно может принять форму эллипсоида, который при движении вдоль отрезка ab эволюционирует от сплюснутого сфероида $(a_3<a_1=a_2,\ \ \Omega\neq 0)$ до вытянутого $(a_1>a_2=a_3,\ \ \Omega=0)$. Последний сфероид может вращаться вокруг своей оси симметрии со скоростью $0<\Omega\leq\Omega_{max}$. Когда Ω растет от 0 до Ω_{max} /отрезок bc на рис.2/, деформация сфероида также растет. При уменьшении Ω от Ω_{max} до 0 вдоль кривой cd δ растет до некоторого максимального значения при $\Omega=0$ /точка d на рис.1 и 2/. Эта точка также является точкой бифуркации, в которой начинается ветвь эллипсоидальных фигур равновесия. На данной ветви вращение происходит вокруг оси 3, перпендикулярной оси симметрии сфероида /ось 1/, от которого она ответвилась. При этом ядро будет все более вытягиваться вдоль оси 1 так, что его угловой момент будет неограниченно расти.

Ядро с $X=1,24$ может вращаться со скоростью, ограниченной интервалом $0<\Omega\leq\Omega_{max}$, принимая форму вытянутого сфероида /см. рис.2/. При некотором значении Ω /в точке бифуркации a' на рис.1/ оно может стать эллипсоидом, форма которого при движении вдоль отрезка $a'b'$ эволюционирует от вытянутого сфероида $(a_3>a_1=a_2,\ \Omega\neq 0)$ до сплюснутого $(a_2<a_1=a_3,\ \Omega=0)$. Последний может вращаться вокруг своей оси симметрии с любой скоростью. При $\Omega\to\infty$ его деформация стремится к значению $\delta=0,75$ /см. рис.2/. Что касается поведения вытянутого сфероида, то оно полностью аналогично случаю $X=0,9$ /точкам c, d соответствуют точки c', d' / за исключением того факта, что точка b на рис.2 сместилась в начало координат. Точка d' также является точкой бифуркации, в которой от вытянутых сфероидальных конфигураций отходит ветвь эллипсоидальных фигур, причем оси вращения соответствующих сфероидов и эллипсоидов перпендикулярны. Дальнейшая эволюция формы на этой ветви аналогична рассмотренной для случая $X=0,9$.

3. БЭК-БЕНДИНГ, ФОР-БЕНДИНГ, ИЗОМЕРЫ ФОРМЫ

Проследим за эволюцией твердотельного момента инерции J в зависимости от Ω^2 /см. рис.3/ для ядер всех классов /по классификации предыдущего раздела/.

Как видно, на ираст-линии ядер класса а/ наблюдается так называемый гигантский бэк-бендинг /10/. Отметим, что по терминологии, используемой в статье, конфигурации с минимальной энергией называются ираст-конфигурациями вне зависимости от того, соответствуют ли они локальным точкам минимума на поверхности энергии или нет. Проследим за изменениями J ядра с $X=0,57$ вдоль ираст-линии /этому значению X соответствует $A=168$ с дорожки β-стабильности/. Ираст-линия начинается при $I=0$ на сфероидальной ветви. В точке бифуркации $(I=82\hbar)$ она загибается назад по ветви эллипсоидов.

В ядрах класса б/ наблюдается не только бэк-бендинг, но и последующее "загибание вперед" (forth-bending). Так, в ядре с $X=0,85(A=280)$ начало ираст-линии представлено участком ветви сплюснутых сфероидов от $I=0$ до $I\simeq 57\hbar$. Состояние ираст-линии с $I=58\hbar$ расположено на ветви эллипсоидальных фигур равновесия. Форма ядра здесь близка к вытянутому сфероиду. Такое состояние можно назвать высокоспиновым изомером формы: переходы из него в соседние состояния ираст-линии $(I=59\hbar)$ невозможны по энергетическим соображениям, в то время как переход в состояние с меньшим I /на сфероидальную ветвь/ связан с изменением формы.

В ядрах классов в/, г/, д/ ираст-линия лежит целиком на ветке эллипсоидов, которая начинается на луче $\gamma=60°$ /см. увели-

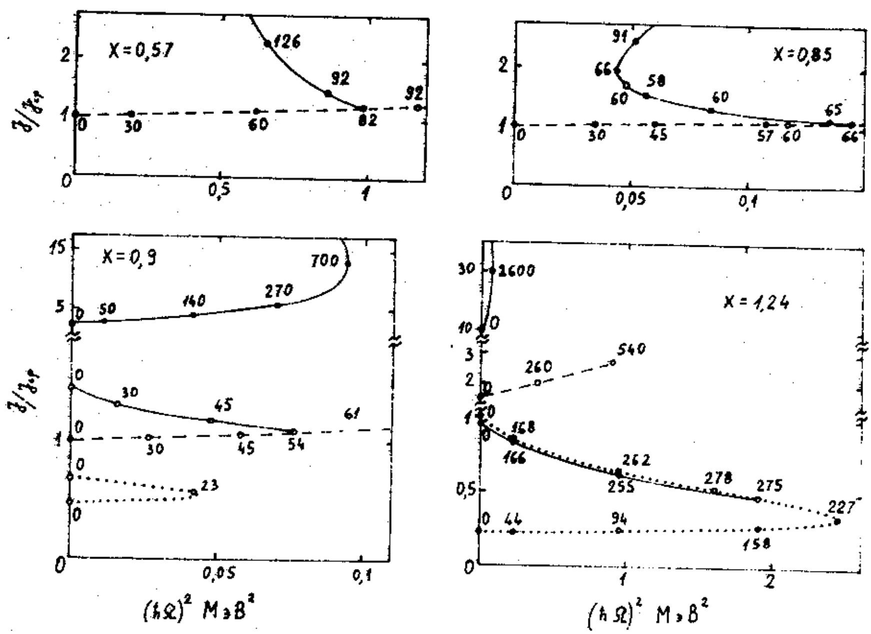


Рис.3. Зависимость твердотельного момента инерции капли от скорости вращения Ω $(J/J_{c\phi}=(a_1^2+a_2^2)/(2R^2))$. Сплошные кривые соответствуют эллипсоидальным конфигурациям, пунктирные – сплюснутым, точечные – вытянутым сфероидам. Цифры рядом с точками – значения углового момента $I=J\Omega$ в единицах Планка для ядер с дорожки β-стабильности. X – параметр делимости. Черные точки соответствуют состояниям с минимальной энергией ядра при данном значении I.

ченный фрагмент рис.1/. Как видно, в них есть, если можно так выразиться, "сверхгигантский" бэк-бендинг в области очень больших I. Эти состояния лежат ниже по энергии, чем состояния, устойчивые относительно симметричного деления /остальные ветки/. Поэтому переход состояний ираст-линии в состояния, устойчивые относительно симметричного деления, абсолютно запрещен. Так что деление из ираст-конфигураций является единственной модой их распада.

4. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КВАДРУПОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КФЖ

Приведенные в предыдущих разделах данные имеют формальный характер, так как ничего не говорят об устойчивости рассмотренных форм ядра. Ее можно изучать на основе анализа спектра нормальных частот вращающихся конфигураций. В /1,2/ было показано, что собственные частоты ω квадрупольных колебаний ядра можно описать системой уравнений на параметры $V_{k,n}$ малых смещений элементов жидкости относительно равновесной формы:

$$\omega^2 V_{k,n} + \int \Delta P_{kn}\, d\vec{r} + \Omega^2 (1-\delta_{k3}) V_{kn} - \frac{10}{M} i\omega\Omega \sum_{j,\ell=1}^{3} \epsilon_{k3j} J_{\ell n} \frac{V_{j,\ell}}{a_\ell^2} -$$

$$- \frac{15}{4} \frac{TR^3}{\rho} [2\mathfrak{A}_{kn} V_{kn} - \delta_{kn} \sum_{\ell=1}^{3} V_{\ell\ell} (\mathfrak{A}_\ell + \mathfrak{B}_{k\ell}) / a_\ell^2] + \qquad /5/$$

$$+ \frac{\pi q^2 R^3}{\rho} [2B_{kn} V_{kn} + \delta_{kn} \sum_{\ell=1}^{3} V_{\ell\ell} (B_{k\ell} - A_\ell)] + \Delta\mathfrak{U}\delta_{kn} = 0 .$$

Здесь $M = mA$ - масса ядра, $\epsilon_{nk\ell}$ - символ Леви-Чивита, $V_{kn} = V_{k,n} + V_{n,k}$

$\Delta\mathfrak{U}$ - лагранжева вариация объемного интеграла $\frac{1}{m} \int \rho x_n \frac{\partial U}{\partial x_k} d^3x$

/ U - среднее поле ядра/, которая подбирается так, чтобы выполнялось условие несжимаемости жидкости: $\sum_n V_{nn} / a_n^2 = 0$ /см. /1,2/ /.

$\Delta P_{nk} = \Delta P_{kn}$ - лагранжева вариация тензора натяжений, определяемая из уравнений /см. /1,2/ /:

$$i\omega (\Delta P_{kn} + \mu_{kn}) = -2\Omega \sum_{j=1}^{3} (\epsilon_{k3j} \Delta P_{jn} + \epsilon_{n3j} \Delta P_{jk}) , \qquad /6/$$

где

$$\mu_{kn} = \frac{3\mu}{4\pi R} \left(\frac{V_{k,n}}{a_n^2} + \frac{V_{n,k}}{a_k^2} \right), \quad \mu = \left(\frac{9\pi}{A}\right)^{2/3} \left(\frac{h}{2mr_0^2}\right)^2 .$$

Подставляя решения уравнения /6/ в /5/, получаем систему девяти уравнений $(k,n = 1,2,3)$, которая определяет собственные частоты ω. Она распадается на две несвязанные подсистемы, отличающиеся симметрией коэффициентов $V_{k,n}$ относительно поворота системы координат на 180° вокруг оси 3. Подсистема, содержащая $V_{1,1}$, $V_{2,2}$, $V_{1,2}$, $V_{2,1}$, $V_{3,3}$, определяет моды колебаний положительной сигнатуры /по терминологии, принятой в ядерной физике /11/ /. Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} g_1 - d_1 - \Omega^2 & g_2 - d_2 - \Omega^2 & 2\Omega & -2\Omega \\ h_1 - d_3 - \Omega^2 & h_2 - d_4 + \Omega^2 & 2\Omega(4f_2 - 1) & 2\Omega(4f_1 - 1) \\ \Omega(1 - 4f_1) & \Omega(4f_2 - 1) & 2f_2 + 1 & 2f_1 + 1 \\ \Omega & \Omega & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad /7/$$

где

$$f_1=\frac{\mu R^2}{(16\Omega^2-\omega^2)a_1^2},\quad f_2=\frac{a_1^2}{a_2^2}f_1,\quad g_1=-\omega^2\left(\frac{1}{2}+\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)+3\mu\frac{R^2}{a_1^2},$$

$$g_2=-\omega^2\left(\frac{1}{2}+\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)+3\mu\frac{R^2}{a_2^2},\quad h_1=-\omega^2\left(\frac{1}{2}+f_1\right),\quad h_2=\omega^2\left(\frac{1}{2}+f_2\right),$$

$$d_1=\frac{\pi q^2R^3}{\rho}\left[6a_3^2A_{13}+3\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2}A_{23}-2\frac{a_3^2}{a_1^2}A_3-A_1\right]+$$

$$+\frac{15}{4}\frac{TR^3}{\rho a_1^2}\left[3a_2^2\mathcal{A}_{23}+(a_3^2+5a_1^2)\mathcal{A}_{13}-2\mathcal{A}_1-10\mathcal{A}_3\right],$$

$$d_3=\frac{\pi q^2R^3}{\rho}\left[2a_2^2A_{12}+2a_3^2A_{13}-\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2}A_{23}-A_1\right]+$$

$$+\frac{15}{4}\frac{TR^3}{\rho a_1^2}\left[2a_2^2\mathcal{A}_{12}+(a_1^2+a_3^2)\mathcal{A}_{13}-a_2^2\mathcal{A}_{23}-4\mathcal{A}_1\right].$$

Выражения для d_2, d_4 получаются из d_1, d_3 соответственно заменой индексов $1\leftrightarrow 2$.

Уравнение /7/ можно привести к кубическому относительно ω^2 уравнению. Ввиду громоздкости здесь его не выписываем.

Подсистема, содержащая $V_{1,3}$, $V_{3,1}$, $V_{2,3}$, $V_{3,2}$, определяет моды колебаний отрицательной сигнатуры. Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \omega^2(1+2r_3)+2Q_1+\Omega^2 & -2\omega^2\Omega(2r_3-1) & \Omega^2+\omega^2 & 2\omega^2\Omega \\ \omega^2(1+2r_1)+2Q_1+\Omega^2 & -4\omega^2\Omega r_1 & \Omega^2-\omega^2 & 0 \\ 2\Omega(1-2r_3) & \omega^2(1+2r_3)+2Q_2+\Omega^2 & 2\Omega & \Omega^2+\omega^2 \\ -4\Omega r_2 & \omega^2(1+2r_2)+2Q_2+\Omega^2 & 0 & \Omega^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0. \qquad /8/$$

Здесь

$$r_1=[\mu/(4\Omega^2-\omega^2)]\frac{R^2}{a_1^2},\quad r_2=r_1a_1^2/a_2^2,\quad r_3=r_1a_1^2/a_3^2;$$

$$Q_k=\frac{15T}{\rho}\left(XB_{k3}-\frac{R^3}{2}\mathcal{A}_{k3}\right),\quad k=1,2.$$

Это уравнение тоже сводится к кубическому относительно ω^2.

Решения уравнений на ω существенно зависят от параметров X, A. Поэтому расчет спектра собственных частот квадрупольных колебаний проводился для ядер с дорожки β-стабильности, принадлежащих различным классам /по классификации второго раздела/.

Классы а/, б/ представляет ядро $^{168}Er(X=0{,}57)$, спектр которого изображен на рис.4а. Напомним, что при $X<0{,}886$ возможны только сплюснутые сфероиды /см. рис.2/. Эта часть спектра описана в /1,2/. Колебания положительной сигнатуры относительно сфероидальных равновесных конфигураций можно разделить на β- и γ-вибрационные возбуждения, что и отмечено на рисунке. Индексом a помечены ветви колебаний отрицательной сигнатуры. При $\Omega=0$ высоколежащая мода воспроизводит экспериментальное значение энергии гигантского квадрупольного резонанса /ГКР/ /см. /1,2/ /. Ветви колебаний относительно эллипсоидальной равновесной формы сшиваются с соответствующими ветвями сфероидов в точке бифуркации, где $\Omega_б^2=\frac{2R^3}{\rho}(\frac{15}{4}T\mathfrak{A}_{11}-\pi q^2 B_{11})$/см. /1,2/ /. Движение по эллипсоидальным ветвям от этой точки сопровождается уменьшением Ω и ростом I /см. рис.3/. Предельными значениями частот при $\Omega\to 0$ /$\gamma\to 60°$, $I\to\infty$ / являются 0 или ∞.

Значительно богаче картина в ядрах классов в/, г/, д/ /см. рис.4б,в, 5а,б/. Аксиальные равновесные конфигурации КФЖ могут быть как сплюснутыми, так и вытянутыми сфероидами. Возможность существования в этих ядрах статической деформации приводит к качественным изменениям в колебательном спектре: 1/ появляется еще одна точка бифуркации /при $\Omega=0$ /, а вместе с ней и новые эллипсоидальные ветви /сплошные кривые с индексом е /; 2/ уже при $\Omega=0$ происходит расщепление на три ветви / a , β , γ / высоколежащей сфероидальной моды /сплюснутой для $X>1$, вытянутой для $X<1$ /.

Проследим за поведением колебательных мод ядер класса в/ /рис.4б,5а/.

Частоте колебаний сферического ядра соответствуют две точки на оси ординат: $\omega_{сф}=\sqrt{2}(\mu+\frac{12T}{\rho R^3}-\frac{8\pi q^2}{15\rho})^{1/2}$, в которой сходятся пять ветвей сплюснутых сфероидов; $\omega=0$. При увеличении Ω мы будем двигаться по линиям сплюснутых сфероидов, выходящим из этих точек. По достижении точки бифуркации $\Omega_б$ нужно будет сделать выбор: либо продолжать движение по ветви сплюснутых сфероидов, либо свернуть на ветвь эллипсоидов, которая приведет /при уменьшении Ω до нуля/ к вытянутому невращающемуся сфероиду с меньшей из двух возможных деформацией /см. рис.2/.

Если при $\Omega=0$ ядро имеет форму вытянутого сфероида с меньшим δ, то выбор надо сделать уже вначале /точка $\Omega=0$ является в данном случае точкой бифуркации/: двигаться либо по ветви

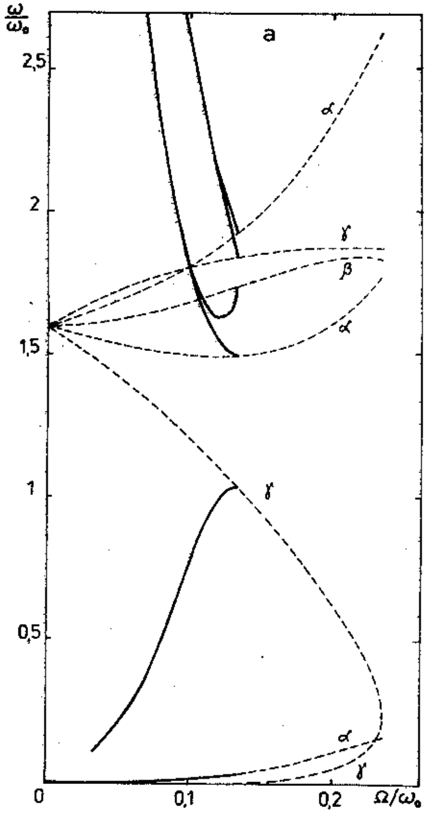


Рис.4. Зависимость спектра квадрупольных колебаний от скорости вращения КФЖ с параметрами делимости: а/ X=0,57 (A=168), б/ X=0,9 (A=300), в/X=1,24(A=500). Сплошные кривые соответствуют эллипсоидальным конфигурациям, пунктирные – сплюснутым, точечные – вытянутым сфероидам; $\hbar\omega_0$ = $= 41/A^{1/3}$ МэВ. Справа от точки $E_B = 0$ – состояния сплюснутых сфероидов с отрицательной энергией связи.

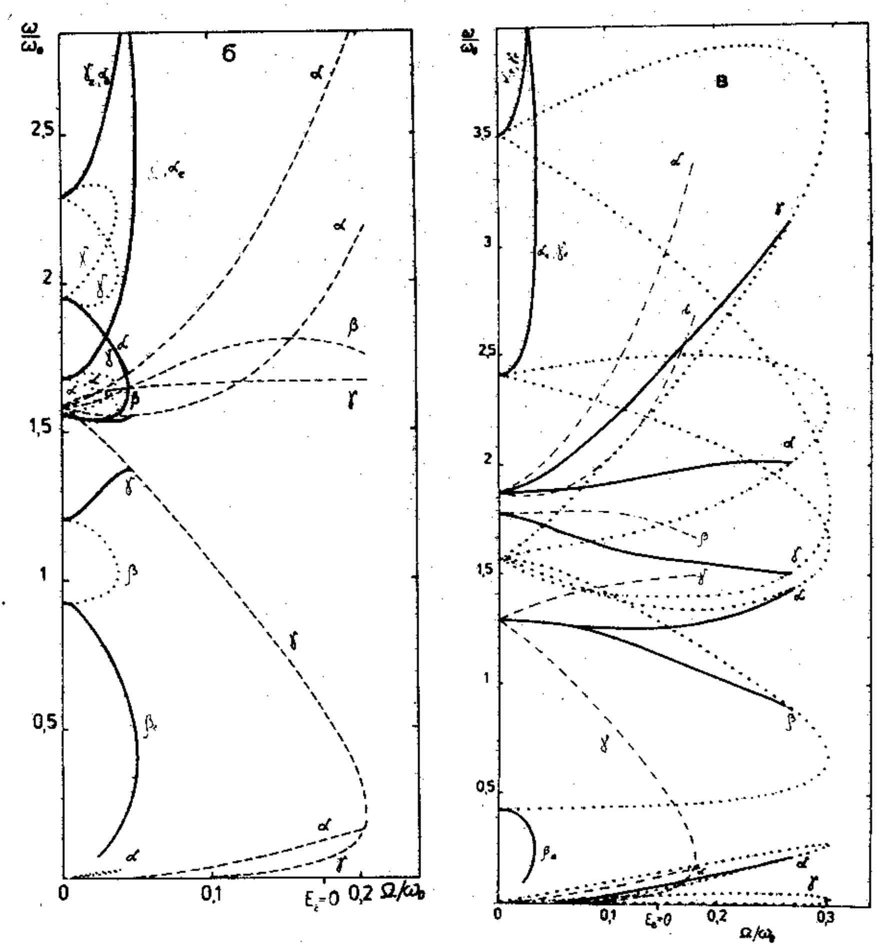
эллипсоидов, которая заканчивается, сшиваясь с ветвью сплюснутых сфероидов, либо по ветви вытянутых сфероидов, которая приведет снова к невращающемуся вытянутому сфероиду, но уже с бо́льшим δ.

Третья возможность – старт при Ω=0 из точки, соответствующей частоте колебаний невращающегося вытянутого сфероида с бо́льшим δ. И здесь выбор: движение либо по ветви вытянутых сфероидов, либо – по новой ветви эллипсоидов /кривые с индексом е /, которая представляет частоту колебаний эллипсоида с γ, близким к 60°. При $\gamma \to 60°$ эти ветви ведут себя так же, как и эллипсоидальные ветви ядер классов а/, б/.

Проследим за поведением собственных частот ядер классов г/, д/ /рис.4в,5б/.

Если начать со сферического ядра /при $\Omega = 0$ /, то, увеличивая Ω, мы будем двигаться по кривым вытянутых сфероидов /пять ветвей выходят из точки $\omega_{сф}$ и две – из точки $\omega = 0$ /. По достижении точки бифуркации $\Omega_б$ предстоит сделать выбор: либо продолжать движение по ветви сфероидов, либо свернуть на ветвь эллипсоидов, которая приведет /при уменьшении Ω до нуля/ к сплюснутому невращающемуся сфероиду.

Следующая возможность – увеличивать Ω от нуля, начиная со сплюснутого сфероида. Здесь нужно сделать выбор / $\Omega = 0$ – точка бифуркации/: двигаться либо по ветви эллипсоидов, которая заканчивается, сшиваясь с ветвью вытянутых сфероидов, либо – по ветви сплюснутых сфероидов.



Последний вариант - увеличивать Ω от нуля, начиная с вытянутого сфероида. И здесь надо выбирать: двигаться либо по ветви вытянутых сфероидов, либо - по новой эллипсоидальной ветви /с индексом е /. Эти новые ветви аналогичны таковым в ядрах класса в/.

Число ненулевых мод сфероидальных конфигураций - на единицу больше, чем у эллипсоидальных конфигураций, которые от них ответвляются в точке бифуркации $\Omega_б$.Однако общее число мод, естественно, в обоих случаях одинаково. Дело в том, что в эллипсоидальных конфигурациях существует голдстоуновская ветвь возбуждений $\omega^2=0$, возникающая вследствие нарушения аксиальной симметрии. Эта ветвь сшивается с γ-ветвью сфероидов, которая зануляется в точке бифуркации $\Omega_б$. Следует также заметить, что среди эллипсоидальных решений присутствует мода отрицательной

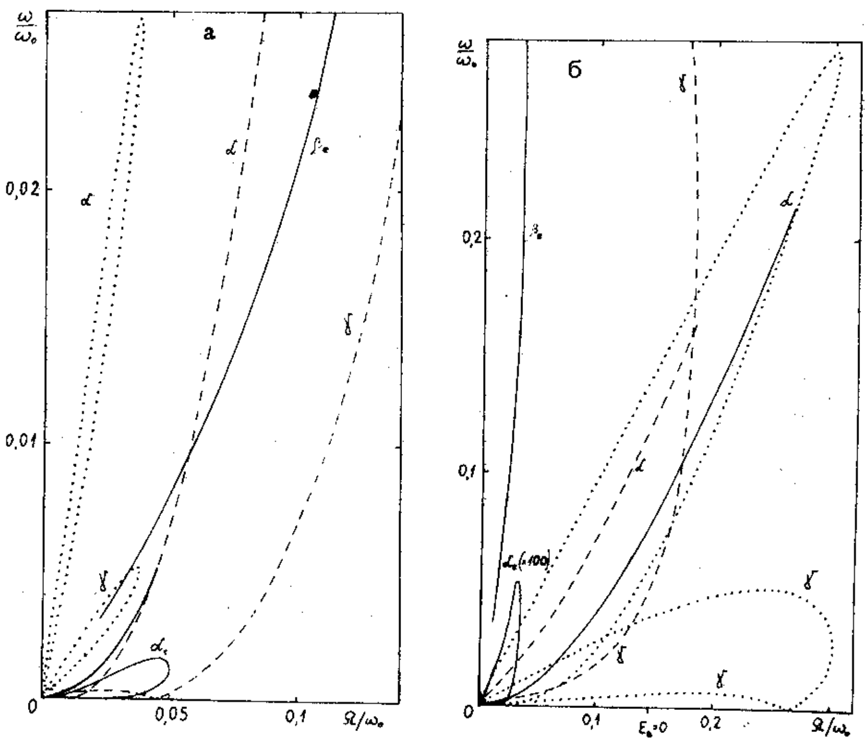


Рис.5. Мягкие моды спектра квадрупольных колебаний КФЖ: а/ параметр делимости X=0,9(A≈300), б/ X=1,24 (A=500).Сплошные кривые соответствуют эллипсоидальным конфигурациям, пунктирные - сплюснутым сфероидам, точечные - вытянутым сфероидам; $\hbar\omega_0 = 41/A^{1/3}$МэВ. Справа от точки E_B=0 - состояния сплюснутых сфероидов с отрицательной энергией связи.

сигнатуры $\omega^2 = \Omega^2$/как и в случае сфероидов/, которая соответствует вращению ядра как целого.

5. КЛАССИЧЕСКАЯ ЖИДКАЯ КАПЛЯ

Равновесные конфигурации КФЖ и КЖК в нашем подходе описываются одинаковыми уравнениями /см./1,2/ /. Характеристические уравнения на частоты /7/, /8/ станут уравнениями на моды квадрупольных колебаний КЖК /7,12/, если положить в них скорость Ферми v_F=0 /или μ = 0 /. На рис.6 приведен спектр квадрупольных колебаний вращающейся КЖК. Видно, что эта модель не воспроизводит энергию ГКР при $\Omega=0$ /ее результат совпадает с результатом Бора и Моттельсона /11/ для сферической КЖК. Отсутствуют также мягкие моды. Эллипсоидальные моды при $\Omega\to 0$ стремятся к ∞ или к 0. Если $X \gtrsim 0{,}8$, то эти ветви обрываются, так как α-моды становятся комплексными. Голдстоуновская ветвь сшивается с γ-ветвью сфероидов в той же точке бифуркации, что и в случае КФЖ.

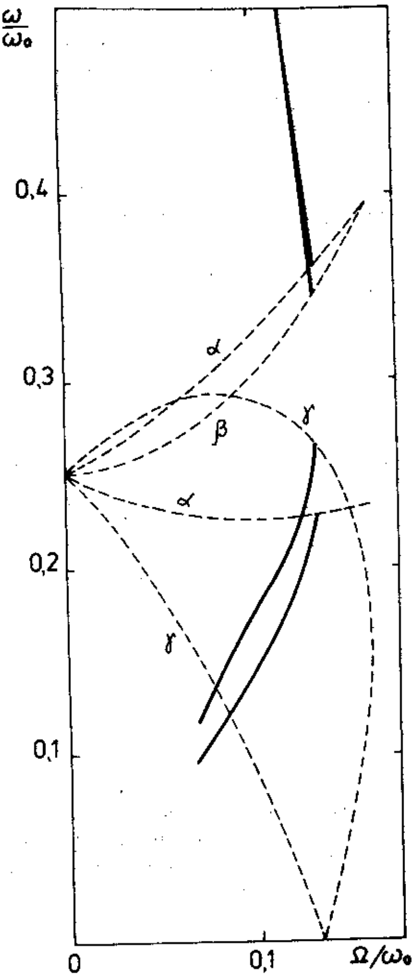


Рис.6. Зависимость спектра квадрупольных колебаний от скорости вращения для КЖК с параметром делимости $X=0{,}57$ ($A=168$). Сплошные кривые соответствуют эллипсоидальным конфигурациям, пунктирные - сплюснутым сфероидам; $\hbar\omega_0 = 41/A^{1/3}$ МэВ.

6. К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

В модели КЖК критериями устойчивости являются: /1/ действительность всех нормальных частот колебаний системы, /2/ положительность давления. Эти ограничения приводят практически к требованию $X<1$ /7/. Для сфероидальных конфигураций первое условие устанавливает верхнюю границу для угловых моментов /1,2/, близкую к найденной при изучении поверхности энергии ядер /8/.

В разработанной выше модели КФЖ также имеется ограничение на возможные угловые моменты сфероидальных конфигураций /1,2/, однако верхняя граница угловых моментов расположена значительно выше, чем в КЖК. Для эллипсоидальных конфигураций первое условие не приводит к ограничениям сверху на угловые моменты в обеих моделях. Требование положительности давления является малоинформативным в случае КФЖ, и его следует заменить условием положительности энергии связи E_B. При реалистических значениях ядерного потенциала это требование лишь незначительно понижает верхнюю границу угловых моментов сплюснутых сфероидов, найденную в /1,2/. У вытянутых сфероидов E_B становится отрицательной лишь при $X \gtrsim 1{,}35$, а в случае эллипсоидов - только на ветвях, помеченных индексом е. В обоих случаях это происходить только при очень больших угловых моментах.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим вкратце основные результаты.

Описан спектр квадрупольных колебаний вращающейся КФЖ, причем при $\Omega = 0$ воспроизводится экспериментальное значение энергии ГКР. Предсказано его расщепление во вращающихся ядрах, а также наличие мягких мод. Показано, что границы устойчивости КФЖ относительно квадрупольных колебаний значительно шире таковых для КЖК как по угловым моментам, так и по параметру делимости. Теория предсказывает большое разнообразие возможных форм вращающихся ядер. Подтверждено наличие гигантского бэк-бендинга. Предсказано существование изомеров формы, фор-бендинга и "сверхгигантского бэк-бендинга".

Проявились следующие достоинства самой модели: а/ весьма полный математический анализ может быть проделан на основе сравнительно простых расчетов, б/ в ее рамках естественно могут быть описаны колебания более высокой мультипольности, чем 2 /6,7/. Не видно также принципиальных трудностей на пути усложнения параметризации формы ядра. Модель может быть также приспособлена для описания вероятностей электромагнитных переходов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегральные символы были введены в работах /6,7/:

$$A_{ij\dots} = \int_0^\infty \frac{du}{\Delta_C (a_i^2+u)(a_j^2+u)\dots}, \quad B_{ij\dots} = \int_0^\infty \frac{u\,du}{\Delta_C (a_i^2+u)(a_j^2+u)\dots},$$

$$\mathcal{A}_{ij\dots} = \int_0^\infty \frac{dt}{\Delta_R (a_i^2+t^2)(a_j^2+t^2)\dots}, \quad \mathcal{B}_{ij\dots} = \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{\Delta_R (a_i^2+t^2)(a_j^2+t^2)\dots},$$

где $\Delta_C^2 = (a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)$, $\Delta_R^2 = (a_1^2+t^2)(a_2^2+t^2)(a_3^2+t^2)$.

Они симметричны относительно перестановки индексов и связаны друг с другом рядом полезных соотношений /см.[6,7] /:

$$A_{ij}(a_i^2 - a_j^2) = A_j - A_i\,, \quad B_{ij} = A_i - a_j^2 A_{ji} = A_j - a_i^2 A_{ij}\,,$$

$$\mathcal{A}_{ij}(a_i^2 - a_j^2) = \mathcal{A}_j - \mathcal{A}_i\,, \quad \mathcal{B}_{ij} = \mathcal{A}_i - a_j^2\mathcal{A}_{ji} = \mathcal{A}_j - a_i^2\mathcal{A}_{ij}\,,$$

$$\mathcal{A}_i = 3\mathcal{B}_{ii} + \mathcal{B}_{ij} + \mathcal{B}_{ik}\,, \quad 2A_i = 3B_{ii} + B_{ij} + B_{ik} \ (i \neq j \neq k)\,.$$

Интегральные символы можно выразить через неполные эллиптические интегралы $F(k,\phi)$, $E(k,\phi)$. Индексом p обозначим минимальную полуось эллипсоида, q - среднюю, r - максимальную. Тогда имеем:

$$A_p = \frac{2\left[\frac{a_q}{a_p}\sin\phi - E(k,\phi)\right]}{a_r^3 \sin^3\phi \cos^2\theta}\,,$$

$$A_q = \frac{2\left[E(k,\phi) - F(k,\phi)\cos^2\theta - \frac{a_p}{a_q}\sin^2\theta\sin\phi\right]}{a_r^3 \sin^3\phi \sin^2\theta \cos^2\theta}\,,$$

$$A_r = 2\,\frac{F(k,\phi) - E(k,\phi)}{a_r^3 \sin^3\phi \sin^2\theta}\,,$$

где $k^2 = \sin^2\theta = \dfrac{a_q^2 - a_r^2}{a_p^2 - a_r^2}$, $\cos\phi = a_p/a_r$. А для символов $\mathcal{A}_i$

$$\mathcal{A}_p = \frac{E(k,\phi) - F(k,\phi)\cdot a_p^2/a_q^2}{a_r a_q a_p^2 \sin^3\phi \sin^2\theta}\,,$$

$$\mathcal{A}_q = \frac{\cos^2\theta F(k,\phi) - E(k,\phi)\cdot a_p^2/a_q^2 + \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta\cdot a_p/a_q}{a_r a_q^3 \sin^3\phi \sin^2\theta \cos^2\theta}\,,$$

$$\mathcal{A}_r = \frac{\sin^2\phi\cos^2\theta F(k,\phi) + \cos^2\phi E(k,\phi) - \sin\phi\cos\phi\cdot a_p/a_q}{a_r^3 a_q \sin^3\phi \cos^2\theta}\,.$$

Здесь $k = \sin\theta = \dfrac{a_r}{a_q}\left(\dfrac{a_q^2 - a_p^2}{a_r^2 - a_p^2}\right)^{1/2}$. В случае сфероидов эти выражения упрощаются и всё выражается через элементарные функции [2,6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Balbutsev E.B. et al. Phys.Lett., 1981, 105B, p.84.

2. Balbutsev E.B., Mikhailov I.N., Vaishvila Z. JINR, E4-81-281, Dubna, 1981.
3. Bertch G.F. Ann.Phys., 1974, 86, p.138.
4. Bertch G.F. In: Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons, 1977, Les Houches Lectures, ed. by R.Balian et al. North Holland, Amsterdam, 1978, vol.1, p.175.
5. Nix J.R., Sierk A.J. Phys.Rev., 1980, C21, p.396.
6. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. "Мир", М., 1973.
7. Rosenkilde C.E. J.Math.Phys., 1967, 8, p.84,88,98.
8. Cohen S., Plasil F., Swiatecki W.J. Ann. of Phys., 1974, 82, p.557.
9. Пик-Пичак Г.А. ЖЭТФ, 1958, 34, с.341.
10. Andersson G. et al. Nucl.Phys., 1976, A268, p.205.
11. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. "Мир", М., 1977, т.2.
12. Вайшвила З., Михайлов И.Н. ОИЯИ, Р4-80-451, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1981 года.