объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-81-672

В.Б.Беляев, А.А.Рахимов

ДЛИНЫ И ОБЪЕМЫ РАССЕЯНИЯ ПИОНОВ НА ЯДРАХ

Направлено в "Journal of Physics G: Nuclear Physics"

1981

§1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы был предложен ряд подходов /1-3/ для описания низкоэнергетического рассеяния пионов на ядрах, существенно отличающихся от модели оптического потенциала. Результаты этих работ показывают, что при энергиях пиона, не превышающих энергии ближайшего порога, вообще не возникает необходимости введения понятия оптического потенциала и всех приближений, связанных с использованием оптической модели.

В данной работе на основе одного из упоминавшихся подходов /2/ найдены длины s-рассеяния и p-волновые объемы рассеяния π-мезонов на совокупности ядер ^4He, ^{12}C, ^{16}O, ^{28}Si, ^{32}S, ^{40}Ca.

При этом исследовались следующие вопросы: влияние принципа Паули, роль формы волновой функции основного состояния, вклад закрытых каналов, зависимость от величины протяженности p-волнового πN-потенциала.

Текст организован следующим образом: в §2 приводятся входные данные, т.е. πN-потенциалы и используемая модель ядра; в §3 получены уравнения; результаты даны в §4; §5 - заключение.

§2. ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для πN-потенциала имеем представление

$$v(\vec{k},\vec{k}') = \sum_\nu \mathcal{P}^\nu v^\nu(\vec{k},\vec{k}'), \qquad /1/$$

$$v^\nu(\vec{k},\vec{k}') = \sum_\ell [(2\ell+1)\, v^\nu_{\ell+}(k,k') + \ell\, v^\nu_{\ell-}(k,k')] P_\ell(\cos\theta). \qquad /2/$$

Здесь $\ell_\pm$ означает πN-взаимодействия в состоянии с $j=\ell\pm 1/2$, $\mathcal{P}^\nu$ - проектор на состояние с полным изоспином $T_{\pi N}=1/2, 3/2$. Мы опустили в /2/ явную зависимость от спиновых переменных, поскольку согласно работе /4/ для сферических ядер этой зависимостью можно пренебречь.

В разложении /2/ учитывались только s- и p-волны, а пространственная зависимость потенциалов выбиралась в виде

$$v^\nu_{\ell_j}(k,k') = -\frac{\lambda^\nu_{\ell_j}}{4\pi^2\mu}\, g_\ell(k)\, g_\ell(k'), \qquad /3/$$

$$g_0(k) = (k^2+\beta_s^2)^{-1}, \quad g_1(k) = k(k^2+\beta_p^2)^{-2}.$$

Д

Для описания ядер использовалась оболочечная модель с осцилляторным потенциалом. Очевидно, что в упругом низкоэнергетическом рассеянии пионов нет необходимости учитывать короткодействующие парные корреляции, поскольку они могут быть лишь в процессах с большим переданным импульсом. Известная проблема исключения духовых состояний согласно работе [5] может быть приближенно решена введением в π-ядерную амплитуду, найденную по оболочечным функциям, множителя $\exp(\vec{\Delta}^2 \cdot \mathrm{const})$, где $\vec{\Delta}$ - переданный импульс. Поскольку мы интересуемся процессами с $\Delta \approx 0$, то эта дополнительная перенормировка исчезает. Единственный неизвестный параметр волновой функции фиксируется экспериментальным значением среднеквадратичного радиуса $\overline{r^2}$ ядра. В табл.1 приведены использованные значения $\overline{r^2}$.

Таблица 1

	^{4}He	^{12}C	^{16}O	^{28}Si	^{32}S	^{40}Ca
$\overline{r^2}$ /Фм/	1,672	2,453	2,718	3,078	3,238	3,480
C /A/	1	13/9	3/2	13/7	23/12	2

C(A) - численный коэффициент. Для формфактора ядер S-оболочки, имеющего простой вид $F(q^2) = e^{-q^2 a^2}$, параметр a следующим образом выражается через среднеквадратичный радиус:

$$a = \overline{r^2}/\sqrt{6 \cdot C(A)}$$

/для ядер высших оболочек см. Приложение/.

§3. ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Как было сказано во введении, многочастичную задачу упругого πA-рассеяния при нулевой энергии π-мезонов будем решать на основе подхода, развитого в работах [2]. Идея этого подхода состоит в переформулировке метода сильной связи каналов на основе вариационного принципа Швингера. Такая переформулировка позволяет уже в первом уравнении учесть вклад от закрытых каналов.

Первое уравнение для функции $|F\rangle$, которое мы и будем решать, имеет вид:

$$V_{11}|F\rangle = V_{11}|\vec{k}\rangle + V_{11}G_0(E - E_1)V_{11}|F\rangle + \qquad /4/$$

$$+ [\langle 1|VG_0(E)V|1\rangle - V_{11}G_0(E)V_{11}]|F\rangle .$$

Здесь $V_{11} = <1|\sum_{i=1}^{A} V_i^{\pi N}|1>$ - усредненный по основному состоянию ядра $|1>$ суммарный πN-потенциал, $G_0(E) = (E-h_0)^{-1}$, h_0 - кинетическая энергия пиона, E - полная энергия системы.

Амплитуда упругого рассеяния пионов на ядре $f(\vec{k}, \vec{k}')$ выражается следующим образом через решение уравнения /4/ $|F>$:

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -(2\pi)^2 \frac{A\mu \cdot m}{\mu + A\cdot m} <\vec{k}'|V_{11}|F> = \qquad /5/$$

$$= \sum_{\ell} f^{\ell}(k^2)(2\ell + 1)P_{\ell}(\cos\theta).$$

μ, m - масса пиона и нуклона соответственно, A - число нуклонов.

Длина /объем/ рассеяния определяется выражением

$$a^{\ell} \equiv \lim_{k\to 0} \frac{f^{\ell}(k)}{k^{2\ell}}, \quad \ell = 0,1.$$

Итак, для решения уравнения /4/ необходимо найти матричные элементы $<1|V_{\pi A}|1>$ и $<1|V_{\pi A}G_0(E)V_{\pi A}|1>$. Не делая большой ошибки[6], будем вычислять эти матричные элементы в статическом пределе, т.е. $\mu/m \to 0$. В этом случае имеем:

$$\frac{1}{A} <\vec{k}|V \ |\vec{p}> = S(\vec{q}^{\,2}) \sum_{\nu} <\mathcal{P}^{\nu}> v^{\nu}(k,p), \qquad /6/$$

$$\frac{1}{A}\sum_i <1\vec{k}|v_i^{\mu}\mathcal{P}_i^{\mu}G_0(E)v_i^{\nu}\mathcal{P}_i^{\nu}|1\vec{k}'> = S((\vec{k}-\vec{k}')^2) \times$$

$$\times \int d\vec{p}\, G_0(E,p^2) \sum_{\nu} v^{\nu}(\vec{k},\vec{p})v^{\nu}(\vec{p},\vec{k}') <\mathcal{P}^{\nu}>, \qquad /7/$$

где $\vec{q} = \vec{k} - \vec{p}$, $\vec{q}' = \vec{p} - \vec{k}'$, $S(\vec{k}^2)$ - формфактор ядра, $<\mathcal{P}^{3/2}> = 2/3$, $<\mathcal{P}^{1/2}> = 1/3$ - для всех ядер с нулевым изоспином.

Для $i \neq j$ имеем

$$\sum_{i\neq j} <1\vec{k}|v_i^{\mu}\mathcal{P}_i^{\mu}G_0(E)v_j^{\nu}\mathcal{P}_j^{\nu}|\vec{k}'1> = \int v^{\mu}(\vec{k},\vec{p})G_0(E,p^2) \times$$

$$\times v^{\nu}(\vec{p},\vec{k}')\,d\vec{p} \sum_{i\neq j} <1\pi|\mathcal{P}_i^{\mu}\mathcal{P}_j^{\nu}\exp(i\vec{q}\vec{r}_i + i\vec{q}'\vec{r}_j')|1\pi>. \qquad /8/$$

$|\pi>$ - изоспиновая функция π-мезона. Введем обозначения:

$$\mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu} = (\mathcal{P}_i^{\mu}\mathcal{P}_j^{\nu} + \mathcal{P}_i^{\nu}\mathcal{P}_j^{\mu})/2, \quad <\pi t_i t_j'|\mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu}|t_i t_j'\pi> = \mathcal{P}_{tt'}^{\mu\nu},$$

$$<\pi t_i t_j'|\mathcal{P}_{ij}^{\mu\nu}|t_i' t_j\pi> = Q_{tt'}^{\mu\nu},$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} = \mathcal{P}^{\mu\nu}_{\frac12\frac12} + \mathcal{P}^{\mu\nu}_{-\frac12-\frac12} + 2\mathcal{P}^{\mu\nu}_{\frac12-\frac12},$$

$$Q^{\mu\nu} = \mathcal{P}^{\mu\nu}_{\frac12\frac12} + \mathcal{P}^{\mu\nu}_{-\frac12-\frac12} + 2Q^{\mu\nu}_{\frac12-\frac12},$$

где t - проекция изотопического спина нуклона; $|n\ell jm\rangle \equiv |\gamma m\rangle$- одночастичная волновая функция. Тогда для суммы в правой части выражения /8/ будем иметь:

$$\sum_{i\neq j} \langle 1\pi|\mathcal{P}^{\mu\nu}_{ij}\, e^{i\vec{q}\vec{r}_i}\; e^{i\vec{q}'\vec{r}_j}\,|1\pi\rangle =$$

$$= \sum_{\gamma,\gamma'}\sum_{\substack{m,m'\\ t,t'}} [\mathcal{P}^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma m}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma' m'}_{\gamma' m'}(\vec{q}') - \qquad /9/$$

$$- Q^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma' m'}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma m}_{\gamma' m'}(\vec{q}')] .$$

Здесь $E^{\gamma m}_{\gamma' m'}(\vec{q}) \equiv \langle\gamma' m'|\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, |\gamma m\rangle$.

При получении соотношения /9/ можно воспользоваться правилами, изложенными, например, в [7].

Суммы по проекциям в правой части /9/ легко находятся, в результате получаем:

для $\gamma = \gamma'$

$$\sum_{\substack{m,m'\\ t,t'}} [\mathcal{P}^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma m}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma m'}_{\gamma m'}(\vec{q}') - Q^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma m'}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma m}_{\gamma m'}(\vec{q}')] =$$

$$= Z_\gamma F_\gamma(\vec{q}) F_\gamma(\vec{q}')[Z_\gamma \mathcal{P}^{\mu\nu} - Q^{\mu\nu}] - Q^{\mu\nu} F^{(h.o.)}_\gamma(\vec{q},\vec{q}') ,$$

для $\gamma \neq \gamma'$

$$\sum_{\substack{mm'\\ tt'}} [\mathcal{P}^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma m}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma' m'}_{\gamma' m'}(\vec{q}') - Q^{\mu\nu}_{tt'}\, E^{\gamma' m'}_{\gamma m}(\vec{q})\, E^{\gamma m}_{\gamma' m'}(\vec{q}')] =$$

$$= \mathcal{P}^{\mu\nu} Z_\gamma Z_{\gamma'} [F_\gamma(\vec{q}) F_{\gamma'}(\vec{q}') + F_\gamma(\vec{q}') F_{\gamma'}(\vec{q})] -$$

$$- Q^{\mu\nu} F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec{q},\vec{q}').$$

Здесь $F_\gamma(\vec{q}^{\,2}) = \frac{1}{4\pi}\int |\phi_{n\ell}(r)|^2\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r}$, $\phi_{n\ell}(r)$ - радиальная часть волновой функции нуклона в подоболочке $|n\ell j\rangle$, Z - число нуклонов одного сорта в подоболочке $(\gamma)=(n\ell j)$, очевидно, $Z_\gamma = 2j+1$, функции $F^{(h.o.)}_\gamma(\vec{q},\vec{q}')$ и $F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec{q},\vec{q}')$ приведены в Приложении. Численные значения коэффициентов $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ и $Q^{\mu\nu}$ также даны в Приложении.

В результате проделанных выкладок для ядра в квадратных скобках в уравнении /4/ имеем:

$$\sum_{\mu\nu}\sum_{i,j} <1\vec{k}|\, v_i^{\mu}\mathcal{P}_i^{\mu}\, G_0(E) v_j^{\nu}\mathcal{P}_j^{\nu}\, |1\vec{k}'> - <\vec{k}|\, V\ \ G_0(E) V\ \ |\vec{k}'> =$$

$$= AS((\vec{k}-\vec{k}')^2)\int d\vec{p}\, G_0(E,p^2)\sum_{\nu} v^{\nu}(\vec{k},\vec{p}) v^{\nu}(\vec{p},\vec{k}') <\mathcal{P}^{\nu}> - \qquad /10/$$

$$-\frac{2}{3}\int d\vec{p}[v^{1/2}(\vec{k},\vec{p})\, v^{1/2}(\vec{p},\vec{k}') + 2v^{3/2}(\vec{k},\vec{p})\, v^{3/2}(\vec{p},\vec{k}')] \times$$

$$\times G_0(E,p^2)[\sum_{\gamma} F_{\gamma}(\vec{q}) F_{\gamma}(\vec{q}')\, Z + \sum_{\gamma} F_{\gamma}^{(h.o.)}(\vec{q},\vec{q}')] .$$

Подставляя /6/ и /10/ в уравнение /4/ и отделяя парциальные волны, приходим к одномерному интегральному уравнению, которое решалось численно.

§4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала посмотрим, как влияет учет антисимметризации волновой функции мишени, т.е. принцип Паули, на величину реальной части длины π-ядерного рассеяния. Для случая $\pi\,^4He$ -рассеяния оказалось, что

$$\Delta_a = \frac{|a^s| - |\tilde{a}^s|}{|a^s|} \approx 4{,}6\,\% ,$$

где a^s - длина рассеяния, найденная с учетом антисимметризации, $\tilde{a}^s$ - без учета, причем с ростом А величина Δ_a падает примерно как $1/A^2$. Роль закрытых каналов, очевидно, можно оценить, заменяя в уравнении /4/ ядро $<1|VG_0(E)V|1>$ на $V_{11}G_0(E)V_{11}$. Вычисленные для этих двух случаев /a^s и a^s_{coh} соответственно/ длины рассеяния приведены в табл.2.

Таблица 2

Длины π-ядерного s-рассеяния; a^s - результат решения уравнения /4/, a^s_{coh} - результат решения уравнения /4/ в пренебрежении закрытыми каналами, πN- данные взяты из работ [8]

	^4He	^{12}C	^{16}O	^{28}Si	^{32}S	^{40}Ca
$-a^s$ /Фм/	0,1320	0,3623	0,4765	0,7883	0,8880	1,0760
$-a^s_{coh}$ /Фм/	0,1935	0,5217	0,6688	1,0440	1,160	1,3780

Как видно из таблицы, учет вклада от закрытых каналов значительно изменяет величину реальной части длины S-рассеяния. Вместе с тем оказалось, что объем рассеяния a^p при этом для всех рассмотренных ядер меняется не более чем на 2%.

Таким образом, для вычисления p-волновых объемов рассеяния можно пользоваться простым уравнением

$$V_{11}|F\rangle = V_{11}|\vec{k}\rangle + V_{11}G_0(E - E_1)V_{11}|F\rangle . \qquad /11/$$

На основе уравнения /11/ с формфакторами гауссовского вида p-волновые объемы рассеяния a^p были вычислены для ядер $^{52}_{24}Cr$, $^{56}_{26}Fe$, $^{64}_{30}Zn$. Результаты для всех рассмотренных ядер приведены в табл.3.

Таблица 3

Объемы p-волнового рассеяния a^p /Фм^3/, соответствующие двум значениям протяженности p-волнового πN-потенциала β_p

	^4He	^{12}C	^{16}O	^{28}Si	^{32}S	^{40}Ca	^{52}Cr	^{56}Fe	^{64}Zn
β_p = =2,11 Фм$^{-1}$	0,60	1,89	2,60	3,83	4,03	4,63	4,02	3,75	2,81
β_p = =3,5 Фм$^{-1}$	0,063	0,092	0,050	0,058	-0,004	-0,14			
эксп.				3,91 ± 0,14	4,19 ± 0,12	4,42 ± 0,05		3,40 ± 0,17	2,69 ± 0,23

Здесь β_p = 2,11 Фм$^{-1}$ соответствует πN - данным работы /8/, а β_p = = 3,5 Фм$^{-1}$ - работы /9/. Экспериментальные значения взяты из статьи /10/, при этом эффекты поглощения были учтены в соответствии с предписанием /11,12/.

Из табл.3 видно, что так же, как и в /13/, имеется резкая зависимость объемов p-волнового рассеяния от протяженности p-волнового πN-потенциала, причем набор πN-данных /8/ дает хорошее согласие с имеющимися экспериментальными результатами. Следует заметить, что в величину p-волнового объема рассеяния в равной мере вносят вклад s- и p-волны элементарного πN-взаимодействия. Как известно, в длины s-рассеяния вклад πN p-волн пренебрежимо мал, например, в наших расчетах для ^{40}Ca он составляет величину 3,5% и примерно линейно с A падает для более тяжелых ядер.

Наконец, табл.4 содержит результаты расчета π-ядерных длин s-рассеяния для четырех имеющихся наборов элементарных πN -

данных. Экспериментальные значения, взятые из обзора [14], приведены с учетом эффектов поглощения согласно предписанию работ [11,12].

Таблица 4

Длины π-ядерного s-рассеяния a^s /Фм/, найденные на основе уравнения /4/ для различных наборов πN-данных

	^4He	^{12}C	^{16}O	^{28}Si	^{32}S	n ^{40}Ca
a	0,99	0,277	0,3682	0,6281	0,7117	0,8737
b	0,132	0,3623	0,4765	0,7883	0,8880	1,0760
c	0,1583	0,4269	0,5700	0,9101	1,0190	1,226
d	0,117	0,345	0,463	0,75	0,861	0,997
эксп.	0,101 $\pm$0,04	0,356 $\pm$0,06	0,45 $\pm$0,1			

a – [15], b – [8], c – [16], d – [21].

Как видно из табл.4, набор πN-данных [16] является наименее предпочтительным среди всех остальных.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, результаты расчетов длин s-рассеяния и объемов p-рассеяния, представленные в табл.2-4, свидетельствуют о возможности достаточно хорошего описания имеющихся экспериментальных данных по π-ядерному взаимодействию при низких энергиях. На основе этого можно сделать следующие заключения. Во-первых, процедура учета эффектов поглощения π-мезона, предложенная в работе [11], по-видимому, является вполне правдоподобной. В связи с этим тем более представляет интерес теоретическое обоснование этой процедуры, например, в рамках подхода, развиваемого в работах [17,18]. Во-вторых, рассмотренные длины рассеяния слабо зависят от вида радиальной зависимости волновой функции основного состояния, так как для воспроизведения π-ядерных длин рассеяния оказались достаточными простые однопараметрические плотности нуклонов в ядрах. Последнее обстоятельство, а также резкая зависимость объемов π-ядерного p-рассеяния от протяженности элементарного πN-потенциала позволяют произвести дискриминацию различных наборов имеющихся πN -данных.

Наконец, как и для наилегчайших ядер [2], оказался очень существенным вклад возбужденных состояний ядер в реальные части s-волновых длин π-ядерного рассеяния.

Резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что с большой достоверностью многочастичную систему $\pi+A$ связанных нуклонов при низкой энергии пиона можно рассматривать как динамическую систему только с одной нетривиальной степенью свободы.

В заключение авторы выражают благодарность А.Л.Зубареву и М.М.Мусаханову за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем явные выражения $F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec q,\vec q')$, $F^{(h.o.)}_{\gamma}(\vec q,\vec q')$, $F_\gamma(q^2)$, а также численные значения $\mathcal{P}^{\mu\nu}$, $Q^{\mu\nu}$, введенных в разделе 3.

По определению

$$F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec q,\vec q') = \sum_{mm'} \langle \gamma m | e^{i\vec q\vec r} | \gamma' m'\rangle \langle \gamma' m' | e^{i\vec q'\vec r} | \gamma m\rangle , \qquad /П.1/$$

$$|\gamma m\rangle \equiv |n\ell\, jm\rangle .$$

Разложим входящие сюда экспоненты по парциальным волнам и, используя теорему Вигнера-Эккарта, проведем суммирование по m,m'. Тогда имеем:

$$F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec q,\vec q') = (4\pi)^2 \sum_{\substack{\tilde\ell\tilde m\\ \tilde\ell'\tilde m'}} i^{\tilde\ell+\tilde\ell'}\, Y^*_{\tilde\ell\tilde m}(\hat q)\, Y_{\tilde\ell'\tilde m'}(\hat q')\, h^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(\vec q^{\,2}) \times$$

$$\times h^{\tilde\ell'}_{\gamma\gamma'}(q'^2)\, \delta_{\tilde\ell\tilde\ell'}\, \delta_{\tilde m,-\tilde m'} (-1)^{j+j'} (-1)^{m} \langle(\ell \tfrac12) j \| Y_{\tilde\ell} \| (\ell' \tfrac12) j'\rangle \times \qquad /П.2/$$

$$\times \langle (\ell' \tfrac12) j' \| Y_{\tilde\ell'} \| (\ell \tfrac12) j\rangle / [\tilde\ell] ,$$

где

$$[\ell] = (2\ell+1), \quad h^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(\vec q^{\,2}) = q^{\tilde\ell}\, d^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(\vec q^{\,2}) ,$$

$$q^{-\tilde\ell}\cdot d^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(q) = \int_0^\infty j_{\tilde\ell}(qr)\, \phi_\gamma(r^2)\, \phi_{\gamma'}(r^2)\, r^2 dr .$$

$j_\ell(z)$ – сферическая функция Бесселя. Явный вид $d^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}$ дан в обзоре[19]. Подставив в /П.2/ приведённые матричные элементы $\langle(\ell\tfrac12)j\|Y_L\|(\ell'\tfrac12)j\rangle$ из формулы /9.5.8/, данной в книге[20], получим для $F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec q,\vec q')$ следующее выражение:

$$F^{(h.o.)}_{\gamma\gamma'}(\vec q,\vec q') = 4\pi [jj'\ell\ell'] (-1)^{\ell+\ell'} \sum_{\tilde\ell\tilde m} Y^*_{\tilde\ell\tilde m}(\hat q)\, Y_{\tilde\ell\tilde m}(\hat q') \times h^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(\vec q^{\,2}) \times \qquad /П.3/$$

$$\times h^{\tilde\ell}_{\gamma\gamma'}(\vec q'^{\,2}) \times \begin{pmatrix} \ell & \tilde\ell & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} j & j' & \tilde\ell \\ \ell' & \ell & \tfrac12 \end{Bmatrix}^2 .$$

Здесь выражения $\begin{pmatrix} \ell & \tilde{\ell} & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{Bmatrix} j & j' & \tilde{\ell} \\ \ell' & \ell' & ½ \end{Bmatrix}$ - соответственно 3j- и 6j- символы Вигнера. Отсюда, в частности при $(\gamma) = (\gamma') = (n\ell j)$, получим следующее выражение:

$$F_{\gamma}^{(h.o.)}(\vec{q},\vec{q}') = \sum_{m} E_{\gamma m}^{\gamma m}(\vec{q}) E_{\gamma m}^{\gamma m}(\vec{q}') - Z_{\gamma} F_{\gamma}(\vec{q}) F_{\gamma}(\vec{q}') =$$

$$= 4\pi [j]^2 [\ell]^2 \sum_{\tilde{\ell}\tilde{m}} Y^{*}_{\tilde{\ell}\tilde{m}}(\hat{q}) Y_{\tilde{\ell}\tilde{m}}(\hat{q}') h^{\tilde{\ell}}_{\gamma\gamma}(\vec{q}^{\,2}) \times \qquad /П.4/$$

$$\times h^{\tilde{\ell}}_{\gamma\gamma}(\vec{q}'^{\,2}) \begin{pmatrix} \ell & \tilde{\ell} & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} j & j & \tilde{\ell} \\ \ell & \ell & ½ \end{Bmatrix}^2 .$$

Покажем теперь правила отбора, вытекающие из закона сохранения полного момента и четности.

Пусть

$$\int Y^{*}_{\ell_1 m_1}(\hat{r}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \phi^{*}_{n_1\ell_1}(r^2) \phi_{n_2\ell_2}(r^2) =$$

$$= 4\pi \sum_{L,M} H_{LM}(k,p) Y_{LM}(\hat{k}) Y^{*}_{LM}(\hat{p}); \quad \vec{q} = \vec{k} - \vec{p}$$

и

$$d^{R}_{\gamma_1\gamma_2}(\vec{q}) = 4\pi \sum_{\ell'' m''} d^{\ell\ell''}_{\gamma_1\gamma_2}(k,p) Y_{\ell'' m''}(\hat{k}) Y^{*}_{\ell'' m''}(\hat{p}) .$$

Используя формулу

$$q^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{q}) = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ m\lambda}}^{\ell} C^{\ell m}_{\lambda m_\lambda}(k,p) Y_{\lambda m_\lambda}(\hat{k}) Y_{\ell-\lambda,\, m-m_\lambda}(\hat{p}) ,$$

$$C^{\ell m}_{\lambda m_\lambda}(k,p) = k^{\lambda} p^{\ell-\lambda} (-1)^{m+\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & \ell-\lambda & \ell \\ m_\lambda & m-m_\lambda & -m \end{pmatrix} \sqrt{\frac{4\pi [\ell]! [\ell]}{[\lambda]! [\ell-\lambda]!}} ,$$

получаем

$$H_{LM}(k,p) = 4\pi \sum_{\substack{\ell m \\ \lambda m_\lambda}} \langle \ell_1 m_1 | \ell m | \ell_2 m_2 \rangle \langle \ell'' m'' | \lambda m_\lambda | LM \rangle \times$$

$$\times \langle LM | \ell-\lambda, m-m_\lambda | \ell'' m'' \rangle C^{\ell m}_{\lambda m_\lambda}(k,p) d^{\ell\ell''}_{\gamma_1\gamma_2}(k', p'),$$

где

$$\langle \ell_1 m_1 | \ell_2 m_2 | \ell_3 m_3 \rangle = \int d\hat{k}\, Y^{*}_{\ell_1 m_1}(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{k}) .$$

Отсюда видно, что $H_{LM}(k,p)$ не равна нулю при выполнении следующих условий:

$$\ell + \ell_1 + \ell_2 = 2N_1 , \qquad m'' = m_\lambda + M ,$$

$$\ell'' + L + \lambda = 2N_2 , \qquad M = m - m_\lambda + m'' ,$$

$$\ell'' + L - \lambda + \ell = 2N_3 , \qquad N_i = 0,1,2, \ldots .$$

Это означает, что

1/ $F^{(h.o.)}_{\gamma_1\gamma_2}(\vec{q},\vec{q}') = 0$ для нечетных значений $(\ell_1+\ell_2)$, т.е. переходы между состояниями различной четности запрещены;

2/ в сумме по $\tilde{m}$ в /П.3/ и /П.4/ дают ненулевой вклад только члены с $\tilde{m} = 0$.

В заключение этого раздела приведем явные выражения функций $F_{n\ell}(\vec{q}^2)$, определяемые как

$$F_{n\ell}(\vec{q}^2) = \frac{1}{4\pi} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} |\phi_{n\ell}(r)|^2 d\vec{r},$$

$$F_{1s}(\vec{q}^2) = \exp(-\vec{x}^2), \quad F_{1p}(\vec{q}^2) = (1-2\vec{x}^2/3)\exp(-\vec{x}^2),$$

$$F_{1d}(\vec{q}^2) = ((4/15)\vec{x}^4 + 1 - 4\vec{x}^2/3)\exp(-\vec{x}^2), \quad \vec{x}^2 = \vec{q}^2 \cdot a^2,$$

$$F_{2s}(\vec{q}^2) = \frac{3}{2}[F_{1s}(\vec{q}^2) - 2F_{2p}(\vec{q}^2) + 5F_{1d}(\vec{q}^2)/3],$$

$$S(\vec{q}^2) = \frac{2}{A}\sum_{\gamma} F_{\gamma}(\vec{q}^2) Z_{\gamma},$$

a определяется как $a = \overline{r^2}/\sqrt{6 \cdot C(A)}$; $\overline{r}^2$, $C(A)$ даны в табл.1.

Таблица 5

Численные значения $\mathcal{P}^{\mu\nu}$, $Q^{\mu\nu}$

$\mu\nu$	33	31	11
$\mathcal{P}^{\mu\nu}$	16/0	8/9	4/9
$Q^{\mu\nu}$	12/9	0	6/9

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев В.Б., Вжеционко Е. ЯФ, 1978, 28, с.392; Беляев В.Б. и др. Phys.Lett., 1979, B83, p.19.
2. Belyaev V.B. et al. J.Phys.G: Nucl.Phys., 1980, 6, p.249.
3. Беляев В.Б. и др. ЯФ, 1980, 32, с.1120; Беляев В.Б. и др. ЯФ, 1981, 33, с.699.
4. Wakamatsu M. Nucl.Phys., 1974, A312, p.427.
5. Foldy L.L., Walecka J.D. Ann.Phys., 1969, 54, p.447.
6. Koltun D.S. Adv.Nucl.Phys., 1969, 3, p.71.
7. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. "Мир", М., 1974, т.2.
8. Salomon M. TRJUMF Report, TR-74-2, 1974.

9. Desgrolard P., Hamman T.F. Phys.Rev., 1972, C6, p.482.
10. Бакенштосс Г. УФН, 1972, 107, с.405.
11. Bruckner K. Phys.Rev., 1955, 98, p.769.
12. Cheon L.T., von Egidy. Nucl.Phys., 1974, A234, p.401.
13. Alexander J. et al. Nucl.Phys., 1981, A356, p.307.
14. Tausher L. Proc. of the I course of Int. School of Phys. on Exotic Atoms, Erice, 1977.
15. Samaranajake V.K., Wollcock W.S. Nucl.Phys., 1972, B49, p.128.
16. Kock R., Pietarinen E. Nucl.Phys., 1980, A336, p.331.
17. Koltun D.S., Mizutani T. Ann.Phys., 1977, 1, p.109.
18. Avishay Y., Mazutani T. Nucl.Phys., 1980, A338, p.377.
19. De Forest Jr., Walecka J.D. Adv.Phys., 1966, vol.15, p.1.
20. Эль-Баз Э., Кастель Б. Графические методы алгебры спинов. "Мир", М., 1974, с.175.
21. Bugg J.V. et al. Phys.Lett., 1973, B44, p.278.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 октября 1981 года.