сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-81-327

С.В.Вышенский, В.И.Иноземцев

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ НА МИШЕНИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ВЫРОЖДЕННОМ СОСТОЯНИИ

1981

I. Введение

S – матрица для комптоновского рассеяния на бесспиновой частице представима [1] в виде:

$$\langle S-1\rangle = i\,(2\pi)^{-2}(16\,k_0 k_0' p_0 p_0')^{-\frac{1}{2}}\,\delta^4(k+p-k'-p')\;T,$$

$$T = \varepsilon_\mu^{\perp}(k')\,T_{\mu\nu}\,\varepsilon_\nu(k),$$

$$T_{\mu\nu} = (k\cdot k'\,g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu')\,A - [k\cdot k'\,P_\mu P_\nu - \nu(P_\mu k_\nu' + P_\nu k_\mu) + \nu^2 g_{\mu\nu}]\,B.$$

Это выражение учитывает лоренцеву и калибровочную инвариантность теории. Динамика взаимодействия и, следовательно, структура частицы описывается инвариантными амплитудами A и B. k и k' (p и p') – начальный и конечный импульсы фотона (мишени), $P = \frac{1}{2}(p+p')$, $\nu = \frac{1}{4}(s-u)$, s, u, t – переменные Мандельстама, ε_μ – вектор поляризации фотона.

Далее везде будем использовать кулоновскую калибровку и лабораторную систему координат.

Рассеяние рассматривается в низшем порядке теории возмущений. Мы опускаем эффекты высших порядков, в частности инфракрасные расходимости, вклад которых в структурные параметры частиц изучался в работе [2].

Низкоэнергетические теоремы [3-6], полученные при явном или неявном предположении о невырожденности состояния мишени, утверждают, что с точностью до ω^2 $(\omega = k_0)$ амплитуда T представима в виде

$$T = \vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}\,'(\tilde{\alpha}\omega^2 - 2e^2) + (\vec{\varepsilon}\times\vec{k})(\vec{\varepsilon}\,'\times\vec{k}\,')\tilde{\beta}, \tag{I}$$

где e –заряд мишени, структурные константы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ассоциированы с электрической и магнитной поляризуемостями; а также, что инвариантные амплитуды A и B разлагаются в ряд

$$B(\nu^2, t) = B^{Born} + \sum_{k,n\geq 0} B^{(k,n)}\nu^{2k}t^n \tag{2}$$

(и аналогично для A), где выделен борновский член, полученный в предположении о бесструктурности частицы (тогда все структурные константы равны нулю). Коэффициенты $B^{(k,n)}$ и $A^{(k,n)}$ называются обобщенными поляризуемостями системы. Отметим, что $\nu = O(\omega)$, а $t = O(\omega^2)$.

Особенностью формы (I) является то обстоятельство, что она справедлива как для (квантовой или классической) нерелятивистской системы с потенциальным взаимодействием между составными частями, так и для скалярной частицы в квантово-полевом описании, где структурные константы возникают за счет виртуального облака /4,6/.

Целью настоящей работы является изучение изменений в форме (I), связанных с вырожденностью состояния мишени, а также правомерности разложения (2) в этом случае.

Имея в виду упомянутую "устойчивость" формы (I) по отношению к теории, описывающей рассеяние, мы считаем, что не ограничим общности рассмотрения, изучая нерелятивистскую систему двух частиц с потенциальным взаимодействием. Кроме того, мы будем явно выписывать некоторые структурные константы, которые, как мы ожидаем, обращаются в нуль только в нерелятивистском случае и будут отличны от нуля уже при учете первой релятивистской поправки.

2. Изменение вида амплитуды T

В качестве простейшей модели мишени, имеющей внутреннюю структуру, рассмотрим систему двух скалярных частиц с массами $m/2$ и зарядами q_1 и q_2 ($e = q_1 + q_2$), взаимодействующих посредством центрального потенциала. Для наших целей достаточно массу системы считать равной m . Электромагнитный потенциал (вторично квантованное поле) введем в уравнение Шредингера минимальным образом. Тогда с точностью до e^2 амплитуда T комптоновского рассеяния равна

$$T(k,k') = -4(\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}\,')\langle i|Y|i\rangle + \frac{2}{m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon_\beta\sum_n\left(\frac{\langle i|M_1^\alpha|n\rangle\langle n|M_2^\beta|i\rangle}{E_n - E_i - \omega + \frac{\omega^2}{2m}} + \frac{\langle i|N_1^\beta|n\rangle\langle n|N_2^\alpha|i\rangle}{E_n - E_i + \omega' + \frac{\omega'^2}{2m}}\right). \tag{3}$$

α , β =I,2,3. Функции Y , M и N определены в приложении. В матричных элементах подразумевается интегрирование по относительной координате. $\sum_n$ –сумма (интеграл) по всем состояниям спектра, $|i\rangle$ – волновая функция начального и конечного состояния мишени по относительной координате. Далее считаем, что $|i\rangle$ описывает S –состояние.

Используя технику, аналогичную развитой в /6/, удерживаем в (3) члены порядка до ω^2 . Получаем

$$T = (\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}\,')\,T_1 + (\vec{\varepsilon}\times\vec{k})(\vec{\varepsilon}\,'\times\vec{k}\,')\,T_2\,,$$

$$T_1 = \omega^2(a - c\cos\varphi) - 2e^2, \tag{4}$$

$$T_2 = b + f\cos\varphi,$$

здесь φ – угол рассеяния, a , b , c , f – структурные константы, определенные в приложении. Отметим, что константы c и f , обусловливающие принципиальное отличие (4) от (I), обязаны своим появлением суммированию в (3) по состояниям $|n\rangle$ с энергией $E_n = E_i$. Причем c отлична от нуля и в нерелятивистском случае для потенциалов типа кулоновского, где энергетический уровень E_i не имеет определенной четности. А для потенциалов типа осцилляторного, где уровень E_i всегда имеет определенную четность, при нерелятивистском рассмотрении (4) не отличается от (I).

3. Дифференцируемость инвариантных амплитуд

Запишем амплитуду T в лабораторной системе в кулоновской калибровке через инвариантные амплитуды:

$$T = (\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}\,')\left[A\frac{t}{2} + B\nu^2 - (\vec{k}\vec{k}\,')\left(A + B\frac{t}{8}\right)\right] + (\vec{\varepsilon}\times\vec{k})(\vec{\varepsilon}\,'\times\vec{k}\,')\left(A + B\frac{t}{8}\right).$$

Сравнение с (4) дает:

$$B(\nu^2, t) = -T_1\left[(t/4)^2 - \nu^2\right]^{-1} - T_2\,m^{-2}\ .$$

и аналогичное выражение для амплитуды A. Подставим значения из (4) и вычтем борновский член, равный $B^{Born} = 2e^2[(t/4)^2-\nu^2]^{-1}$:

$$B - B^{Born} = \frac{c-f}{2} + [(t/4)^2-\nu^2]^{-1} + m^{-2}(c-a-b-f). \tag{5}$$

Полученное выражение, очевидно, не дифференцируемо в нуле по ν^2 и t, что делает неприменимым разложение (2). Такая же ситуация возникает и в случае амплитуды $A(\nu^2, t)$.

Отметим, что вклад состояния рассеивателя с $E_n = E_i$ и произвольным спином S в амплитуду T может быть параметризован релятивистски-инвариантным образом; соответствующие инвариантные амплитуды могут быть представлены в форме

$$A^{(s)} = \frac{F^2(m^2+2(\nu^2-t/4))}{2(\nu-t/4)}\left[\nu^2(W_1^{(s)} - sW_2^{(s)}) + W_2^{(s)}(\nu-(t/4))^2\frac{m^2+\nu-\frac{3t}{2}}{m^2+2(\nu-(t/4))}\right] + (\nu\to-\nu),$$

$$B^{(s)} = \frac{F^2(m^2+2(\nu^2-t/4))}{2(\nu-t/4)}\left[-\frac{t}{2}(W_1^{(s)} - sW_2^{(s)}) + \frac{(\nu-t/4)^2}{m^2+2(\nu-t/4)}W_2^{(s)}\right] + (\nu\to-\nu),$$

где

$$W_1^{(s)} = 2\sum_{\ell=0}^{[\frac{s-1}{2}]}\frac{(-1)^{s+\ell}(2s-2\ell-1)!!}{2^\ell(s-2\ell-1)!(\ell-1)!}(\nu-t/4)^{4\ell}\left[(\nu-t/4)(\nu+\frac{3t}{4}) + \frac{m^2 t}{2}\right]^{s-2\ell-2},$$

$$W_2^{(s)} = \sum_{\ell=0}^{[\frac{s-1}{2}]}\frac{(-1)^{s+\ell}(2s-2\ell-1)!!}{2^\ell(s-2\ell-1)!\,\ell!}(\nu-\frac{t}{4})^{4\ell}\left[(\nu-t/4)(\nu+\frac{3t}{4}) + \frac{m^2 t}{2}\right]^{s-2\ell-2},$$

F – формфактор вершины $\langle i|J_\mu|n\rangle$.
В окрестности точки $\nu = 0$, $t = 0$ амплитуды обладают сингулярными особенностями вида

$$A^{(s)} \sim \frac{t^{s-1}}{\nu^2-(t/4)^2}, \qquad B^{(s)} \sim \frac{t^s}{2(\nu^2-(t/4)^2)}. \tag{6}$$

При $S = 1$ выражения (6) совпадают с сингулярностями в (5).

Таким образом, то обстоятельство, что рассеиватель находится в вырожденном состоянии, приводит к изменениям в низкоэнергетических теоремах по сравнению с невырожденным случаем. Это особенно интересно при рассмотрении моделей, в которых мезоны и мезонные

резонансы являются радиально возбужденными (и, возможно, вырожденными) состояниями кварк – антикварковой системы.

Авторы благодарны С.Б.Герасимову, А.Б.Говоркову и В.А.Мещерякову за полезные обсуждения.

Приложение

Приведем явные выражения для функций, фигурирующих в (3). Обозначим $\mathcal{E}(\vec{k}) = \exp(i\vec{k}\frac{\vec{r}}{2})$. Тогда

$$Y(\vec{r}) = q_1^2\,\mathcal{E}(\vec{k}-\vec{k}') + q_2^2\,\mathcal{E}(\vec{k}'-\vec{k}),$$

$$M_1^\alpha(\vec{r}) = \mathcal{A}_{++}(\vec{k}')k_\alpha + 2\mathcal{A}_{-+}(\vec{k}')p_\alpha,$$

$$M_2^\beta(\vec{r}) = 2\mathcal{A}_{--}(\vec{k})p_\beta,$$

$$N_1^\beta(\vec{r}) = -\mathcal{A}_{+-}(\vec{k})k'_\beta + 2\mathcal{A}_{--}(\vec{k})p_\beta,$$

$$N_2^\alpha(\vec{r}) = 2\mathcal{A}_{-+}(\vec{k}')p_\alpha,$$

где $p_\alpha = -i\partial/\partial r_\alpha$, а

$$\mathcal{A}_{\pm+}(\vec{k}) = q_1\mathcal{E}(-\vec{k}) \pm q_2\mathcal{E}(\vec{k}),$$
$$\mathcal{A}_{\pm-}(\vec{k}) = q_1\mathcal{E}(\vec{k}) \pm q_2\mathcal{E}(-\vec{k}).$$

Приведем выражения для структурных констант a, b, c, f, использованных в (4). Напомним, что $|i\rangle$ описывает S-состояние.

$$f = -2e^2\sum{}^{**}\left|\langle i|\frac{1}{2m}L_3|n\rangle\right|^2,$$

$$a = \alpha + \Delta\alpha + \eta^{**},$$
$$b = \beta + \Delta\beta + \varkappa^{**} + 2\alpha^{**},$$
$$c = 2\varkappa^{**} + \alpha^{**},$$

где

$$\alpha = 4m(q_1-q_2)^2 \sum{}^{*} \frac{1}{E_n-E_i} \left|\langle i| \frac{r_3}{2} |n\rangle\right|^2, \quad \Delta\alpha = \frac{2}{3} e^2 r_e^2,$$

$$\beta = 4m e^2 \sum{}^{*} \frac{1}{E_n-E_i} \left|\langle i| \frac{1}{2m} L_3 |n\rangle\right|^2, \quad \Delta\beta = -\frac{1}{3} r_e^2 \left[4(q_1-q_2)^2 + e^2\right],$$

$$\gamma^{**} = \frac{1}{3} (q_1-q_2)^2 \sum{}^{**} \mathrm{Im}\left(\langle i| r_3^2 \vec{p} |n\rangle \langle n| \vec{r} |i\rangle\right),$$

$$æ^{**} = e^2 \sum{}^{**} \mathrm{Im}\left(\langle i| r_1 r_2 |n\rangle \langle n| r_1 p_2 |i\rangle\right),$$

$$\alpha^{**} = 2(q_1-q_2)^2 \sum{}^{**} \left|\langle i| \frac{r_3}{2} |n\rangle\right|^2, \quad r_e^2 = \langle i| \left(\frac{r}{2}\right)^2 |i\rangle .$$

$\sum^{*}$ означает суммирование (интегрирование) по всем $|n\rangle$ с $E_n \neq E_i$, а $\sum^{**}$ – по всем $|n\rangle$ с $E_n = E_i$ (явный учет вырождения). $\vec{p} = -i\partial/\partial\vec{r}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Заметим, что в нерелятивистском случае $\gamma = \beta = \beta^{**} = æ^{**} = 0$, а α^{**} и γ^{**} отличны от нуля для потенциалов типа кулоновского (см. раздел I).

Литература

1. Bardeen W.A., Tung Wu-Ki. Phys.Rev., 1968, 173, p. 1423.
2. Gerasimov S.B., Soloviev L.D. Nucl.Phys., 1965, 74, p. 589.
3. Low F.E. Phys.Rev., 1954, 96, p. 1428.
4. Gell-Mann M., Goldberger M.L. Phys.Rev., 1954, 96, p. 1433.
5. Guiasu I., Radescu E.E. Ann. Phys. (N.Y.), 1979, 120, p. 145.
6. Петрунькин В.А. Труды ФИАН СССР, I968, 4I, с. I65.

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 мая I98I года.