объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



P4-81-199

В.Б.Беляев, О.П.Соловцова

# ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ В ТЕОРИИ ТРЕХЧАСТИЧНОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в "Journal of Physics, G"

1981

В квантовой теории трех тел есть несколько результатов, имеющих теоремный характер и отражающих специфику собственно трехчастичных систем. К таким результатам следует отнести эффект Ефимова[1] и теорему Томаса[2]. Как было отмечено в работе[3], оба эффекта имеют место, когда параметр $\xi = \frac{a}{r_0} \to \infty$, где $r_0$ - радиус сил в парной подсистеме, а $a$ - парная длина рассеяния. При этом предел Томаса наступает при конечном $a$ и при $r_0 \to 0$, а предел Ефимова имеет место при конечном $r_0$ и $a \to \infty$. В обоих случаях уравнения Фаддеева перестают быть фредгольмовыми[4].

Ниже мы рассмотрим одно предельное соотношение между трехчастичными и двухчастичными длинами рассеяния, которое имеет место в рамках фредгольмовых уравнений. Будем интересоваться длиной рассеяния одной частицы на связанной паре двух других, имеющих энергию связи $\alpha$. При этом будем предполагать, что взаимодействие налетающей частицы с частицами мишени не имеет резонансного характера при малых энергиях и является недостаточно притягивающим для образования трехчастичного связанного состояния при $\alpha = 0$. Такая ситуация имеет место, например, при рассеянии $\pi$-мезонов на дейтроне.

Рассмотрим сначала, как ведет себя вклад в длину $\pi d$-рассеяния, обусловленный двукратным перерассеянием $\pi$-мезона при $\alpha = 0$. Как известно, амплитуда двукратного перерассеяния пропорциональна матричному элементу вида

$$M_2 \sim \langle \phi_d | \frac{1}{r} | \phi_d \rangle . \qquad /1/$$

Уже из размерных соображений ясно, что матричный элемент /1/ стремится к нулю при $\alpha \to 0$. Непосредственно вычисление /1/ по волновым функциям дейтрона вида

$$\phi_d(r) = N_d\left(\frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{r}\right), \qquad /2/$$

$$N_d = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\beta-\alpha)^2}}, \qquad \alpha^2 = -\mathcal{E}_d \cdot m_N ,$$

где $\mathcal{E}_d$ - энергия связи дейтрона; $\beta^{-1}$- протяженность NN -потенциала взаимодействия, приводит к результату

$$M_2 \underset{\alpha\to 0}{\sim} \alpha \ln \alpha/\beta \to 0. \qquad /3/$$

Итак, двукратное перерассеяние исчезает в рассматриваемом пределе.

Посмотрим теперь, что произойдет с длиной $\pi d$-рассеяния в пределе $\alpha \to 0$, если учесть эффекты многократного рассеяния во всех порядках. Для этого сначала воспользуемся модельным примером - рассеянием на фиксированных центрах.

В этом случае длина $\pi d$-рассеяния имеет вид

$$a_{\pi d} = \int d\vec{r}\,|\phi_d(r)|^2\, a(r), \qquad /4/$$

где $a(r)$ задается выражением

$$a(r) = \frac{1}{1 + b^2\left(\frac{e^{-\alpha^* r}}{r}\right)^2}\left(2a_0 - 2b^2\,\frac{e^{-\alpha^* r}}{r}\right). \qquad /5/$$

Здесь использованы следующие обозначения: $b^2 = 2a_1^2 - a_0^2 > 0$, $a_0$ и $a_1$ - изоскалярная и изовекторная компоненты длин $\pi N$-рассеяния соответственно; $\alpha^* = \sqrt{\frac{2\mu_{\pi N}}{m_N}}\cdot\alpha$. Для $a_{\pi d}$, очевидно, имеем оценку

$$a_{\pi d} \le \int d\vec{r}\,|\phi_d(r)|^2\left(2a_0 - 2b^2\,\frac{e^{-\alpha^* r}}{r}\right) = \qquad /6/$$
$$= 2a_0 - 2b^2 \left\langle \phi_d \left| \frac{e^{-\alpha^* r}}{r} \right| \phi_d \right\rangle,$$

из которой в пределе $\alpha \to 0$ получаем

$$a_{\pi d} \le 2a_0\,. \qquad /7/$$

Точное вычисление интеграла /4/ в рассматриваемом пределе приводит к равенству в выражении /7/.

Таким образом, в этом модельном случае перерассеяния во всех порядках исчезают в пределе $\alpha \to 0$.

Откажемся теперь от модели и будем исходить из точных уравнений Фаддеева для $\pi d$-рассеяния в форме [5]. Покажем, что и в этом случае при $\alpha \to 0$ имеет место предельное соотношение $a_{\pi d} = 2a_0$. Для простоты не будем учитывать изотопическую структуру $\pi N$-амплитуды и, кроме того, будем считать ее константой /доказательство проходит и без этих предположений/.



Итак, уравнения имеют вид

$$F_\alpha(p) = \frac{\lambda p^2}{\pi^2 D\left(-\frac{\alpha^2}{m} - \frac{p^2}{2\mu_1}\right)} \int \frac{d\vec{p}_1}{p_1^2}\, \frac{v\left(\frac{\vec{p}}{2} + \vec{p}_1\right) G_\alpha(p_1)}{p^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}\vec{p}\cdot\vec{p}_1 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}p_1^2 + \alpha^{*2}},$$

$$G_\alpha(p) = a_0 \frac{p^2}{p^2 + \alpha^2} v(p) + \frac{a_0}{2\pi^2} p^2 \int \frac{d\vec{p}_1}{p_1^2}\, \frac{G_\alpha(p_1)}{p^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{\mu}\vec{p}\cdot\vec{p}_1 + \alpha^{*2}} + \qquad /8/$$

$$+ \frac{a_0}{2\pi^2} p^2 \int \frac{d\vec{p}_1}{p_1^2}\, \frac{v\left(\vec{p} + \frac{\vec{p}_1}{2}\right) F_\alpha(p_1)}{p^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}_1 + \frac{m}{2\mu_1}p_1^2 + \alpha^2},$$

где $D(Z) = 1 + \frac{\lambda}{m}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\, \frac{q^2 v(q)}{Z - \frac{q^2}{m}}$; $Z$ - энергия парной подсистемы; $a_0$ - длина $\pi N$-рассеяния; $v(p) = \frac{1}{p^2 + \beta^2}$ - формфактор сепарабельного NN-потенциала взаимодействия; $\tilde{\mu} = \frac{m\mu}{m+\mu}$; $\mu_1 = \frac{2m\mu}{2m+\mu}$; $\mu$, $m$ - масса $\pi$-мезона и нуклона соответственно; $\lambda = 2\beta(\alpha+\beta)^2$. Длина $\pi d$-рассеяния определяется соотношением

$$a_{\pi d} \equiv F_\alpha(0). \qquad /9/$$

Положим в первом уравнении /8/ $p = 0$, введем обозначение $G_\alpha(p) = \frac{p^2}{p^2 + \alpha^2}\phi_\alpha(p)$ и исключим $F_\alpha(p)$ из второго уравнения. Тогда уравнения /8/ принимают вид

$$F_\alpha(0) = \frac{8\beta(\alpha+\beta)^3}{\pi}\,\frac{\mu_1}{\mu}\int_0^\infty dp\, \frac{\alpha p^2}{(\alpha^2 + p^2)^2}\, v(p)\,\phi_\alpha(p), \qquad /10/$$

$$\phi_\alpha(p) = a_0 v(p) + a_0 \frac{p^2 + \alpha^2}{2\pi^2} \int \frac{d\vec{p}_1}{p_1^2 + \alpha^2} K_\alpha(\vec{p}, \vec{p}_1)\,\phi_\alpha(p_1), \qquad /11/$$

где

$$K_\alpha(\vec{p}, \vec{p}_1) = \frac{1}{p^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{\mu}\vec{p}\cdot\vec{p}_1 + p_1^2 + \alpha^{*2}} + \qquad /12/$$
$$+ \frac{\beta^4}{\pi^2}\int \frac{d\vec{p}_2}{p_2^2}\, \frac{v\left(\vec{p} + \frac{\vec{p}_2}{2}\right)}{p^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}_2 + \frac{m}{2\mu_1}p_2^2 + \alpha^2}\, \frac{p_2^2}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{m}{2\mu_1}p_2^2} - \alpha} \times$$
$$\times \frac{v\left(\frac{\vec{p}_2}{2} + \vec{p}_1\right)}{p_2^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}\vec{p}_2\cdot\vec{p}_1 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}p_1^2 + \alpha^{*2}}.$$

Предполагая непрерывность функции $\phi_\alpha(p)$ в окрестности точки $\alpha = p = 0$ и используя представление $\delta$-функции

$$\frac{\pi}{4}\,\delta(p) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha p^2}{(\alpha^2 + p^2)^2} \qquad /13/$$

для $F_{\alpha=0}(0)$, получим

$$F_{\alpha=0}(0) = 2\beta^4 \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}}\, v(0)\,\phi_{\alpha=0}(0). \qquad /14/$$

Покажем теперь, что функция $\phi_\alpha(p)$ действительно непрерывна в точке $\alpha = p = 0$. Для этого положим в уравнении /11/ $p = 0$ и $p_1 = \alpha y_1$, $p_2 = \alpha y_2$, тогда получаем

$$\phi_\alpha(0) = a_0 v(0) + a_0 \alpha \int_0^\infty dy_1\, K(0, y_1)\,\phi_\alpha(\alpha y_1). \qquad /15/$$

Таким образом, из /15/ получаем оценку для $\phi_\alpha(0)$:

$$|\phi_\alpha(0) - a_0 v(0)| \le a_0 \alpha \int_0^\infty dy_1\, |K(0, y_1)|\,|\phi_\alpha(\alpha y_1)|. \qquad /16/$$

Вспомним теперь, что мы предполагаем отсутствие трехчастичных связанных состояний и резонансов при $\alpha = 0$ из-за слабости притяжения между налетающей частицей и частицами мишени. Это предположение означает, что при $\alpha \to 0$ функции $F_\alpha$ и $\phi_\alpha$ будут оставаться ограниченными. Тогда из /16/ получаем

$$|\phi_\alpha(0) - a_0 v(0)| \le a_0 \alpha M \int_0^\infty dy_1\, |K(0, y_1)|, \qquad /17/$$

где $M \ge |\phi_\alpha(\alpha y_1)|$ и интеграл в правой части существует, откуда в пределе $\alpha \to 0$ имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} \phi_\alpha(0) = a_0 v(0). \qquad /18/$$

Аналогичные рассуждения приводят также к пределу в "обратном" порядке, то есть

$$\lim_{p \to 0} \phi_0(p) = a_0 v(0). \qquad /19/$$

Соотношения /18/ и /19/ означают, что функция $\phi_\alpha(p)$ непрерывна в точке $\alpha = p = 0$ и можно воспользоваться соотношением /14/, то есть что

$$a_{\pi d}\big|_{\alpha=0} = F_{\alpha=0}(0) = 2\frac{\mu_1}{\tilde{\mu}}\, a_0. \qquad /20/$$



Итак, мы показали, что и в общем случае длина "$\pi d$-рассеяния" стремится к сумме элементарных длин при $\alpha \to 0$.

Предельное соотношение /20/ будем использовать для вычисления длин рассеяния частиц на реальном дейтроне, имея в виду малость величины $\alpha/\beta$.

Из вида ядра уравнения /11/ ясно, что поправка к $\delta$-функции, обусловленная конечным значением $\alpha$, будет пропорциональна $\alpha/\beta$, поэтому, разлагая функцию $\phi_\alpha(p)$ в ряд по $\alpha/\beta$ ($\alpha/\beta \sim 1/6$), можно получить приближенное выражение для трехчастичной длины рассеяния типа

$$F_\alpha(0) = \frac{2\dfrac{\mu_1}{\tilde{\mu}} a_0 + \left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3 \dfrac{2\mu_1}{\tilde{\mu}} a_0 \dfrac{a_0 \alpha J_1(\alpha)}{1 - a_0\alpha/(1 + \sqrt{2\tilde{\mu}/m})}}{1 - \left(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3 \dfrac{\mu_1}{\tilde{\mu}} a_0 \alpha J_2(\alpha)}, \qquad /21/$$

$$J_1(\alpha) = \frac{2}{\pi^2}\frac{\mu}{\tilde{\mu}} \int_0^\infty dx \frac{x}{x^2+1}\, \frac{\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} \int_0^\infty dx_1 \frac{x_1^2}{x_1^2+1} \ln \frac{x^2 + x_1^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}(1 + x x_1)}{x^2 + x_1^2 + \frac{2\tilde{\mu}}{m}(1 - x x_1)},$$

$$J_2(\alpha) = \frac{16}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_1}{2m}} \int_0^\infty dx \frac{x}{x^2+1}\, \frac{\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Выражение типа /21/, но учитывающее форму и спин-изоспиновую структуру взаимодействия налетающей частицы с частицами мишени, использовалось для вычисления длин рассеяния в системах $\pi d$ и $\Lambda d$. Результаты расчета приведены в таблице в колонке a. Для сравнения приводятся результаты импульсного приближения /см. формулу /20// и расчеты точного решения уравнений Фаддеева. Наборы параметров элементарных $\pi N$- и $\Lambda N$-взаимодействий взяты из работ /6,7/. Как видно из таблицы, длины рассеяния $\pi d$ и $\Lambda d$, найденные вышеизложенным методом, удовлетворительно согласуются с точным трехчастичным расчетом.

**Таблица**

Трехчастичные длины рассеяния

| | $a^{имп.}$ /Фм/ | a /Фм/ | $a^{Фадд.}$ /Фм/ | $a^{эксп.}$ /Фм/ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi^- d$ /7/ | −0,013 | −0,044 | −0,045 /8/ | $-0{,}073^{+0{,}031}_{-0{,}024}$ /10/ |
| $\Lambda d$ /8/ | 4,7 | −16,8 | −12,2 /9/ | – |

В заключение авторы выражают искренною благодарность О.И.Картавцеву за конструктивную критику и Ю.А.Симонову за интерес к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ефимов В. ЯФ, 1970, 12, с.1080; Phys.Lett., 1970, 33B, p.563.
2. Thomas L.H. Phys.Rev., 1935, 47, p.903.
3. Simonov Yu.A. et al. Nucl.Phys., 1980, A334, p.80.
4. Фаддеев Л.Д. Ядерные реакции при нерелятивистских энергиях. Конспект лекций. Изд-во МИФИ, М., 1971.
5. Petrov V.M., Peresypkin V.V. Phys.Lett., 1973, 44B, p.321.
6. Bugg D.V. et al. Phys.Lett., 1973, 44B, p.278.
7. Alexander G. et al. Phys.Rev., 1968, 173, p.1452.
8. Petrov V.M., Peresypkin V.V. Nucl.Phys., 1974, A220, p.277.
9. Пересыпкин В.В., Петров Н.М. Препринт ИТФ, 75-39Р, Киев, 1975.
10. Cheon L.T., Von Egidy J. Nucl.Phys., 1974, A234, p.234.


Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1981 года.