сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-81-134

А.И.Георгиева, П.П.Райчев, Р.П.Русев

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДВУХВЕКТОРНО-БОЗОННАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЯДРАХ

1981

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возрос интерес к приложению алгебраических моделей к описанию коллективных движений в ядрах. Эти алгебраические модели используют бозонные представления гамильтониана и базисных функций ядерной системы. Например, в [1] коллективные состояния ядер описываются в терминах взаимодействующих бозонов, что эквивалентно феноменологической модели s- и d-бозонов. В этой модели бозоны представляются в виде фермионных пар, связанных в моменты $\ell = 0,2$, а группа U/6/ является группой динамической симметрии. В [2] показано, что микроскопическое описание коллективных движений, которое основывается на коллективных переменных ядра, приводит к симплектической группе Sp(12,R), которая содержит динамическую группу U/6/. Еще до этого с помощью двух независимых векторных бозонов в [3] была построена модель для описания деформированных четно-четных ядер в рамках нарушенной SU/3/-симметрии. Естественное обобщение последней модели возникает, если воспользоваться дополнительной степенью свободы, предоставляемой новым квантовым числом - "псевдоспином", различающим оба сорта бозонов. Это приведет к расширению группы динамической симметрии SU /3/ до U/6/.

1. ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ СОРТОВ ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ

Основное предположение данной работы состоит в том, что ядерную динамику можно описать с помощью двух независимых векторных бозонов со спином $\ell = 1$. Эти бозоны обладают дополнительным квантовым числом, которое назовем "псевдоспином", и образуют псевдоспиновый дублет, отличающийся проекцией псевдоспина. Мы не предполагаем, что эти бозоны являются связанными парами фермионов, и будем рассматривать соответствующие им операторы рождения и уничтожения формально, не придавая им особого физического смысла. Рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

Обозначим через $x_m(\alpha)$, $(m = 0, \pm 1;\ \alpha = \pm \frac{1}{2})$ циклические координаты квазичастицы с проекцией "псевдоспина" α. Эти координаты имеют вид

$$x_{\pm 1}(\alpha) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}[x(\alpha) + iy(\alpha)],$$

$$x_0(\alpha) = z(\alpha). \qquad /1/$$

Соответствующие обобщенные импульсы задаются следующим выражением:

$$q_m(\alpha) = -i\frac{\partial}{\partial x^m(\alpha)} \qquad (\hbar = 1), \qquad /2а/$$

где

$$x^m = \sum_n g^{mn} x_n, \qquad g^{mn} = (-1)^n \delta_{m,-n}. \qquad /2б/$$

С помощью выражения /1/, /2/ можно построить операторы рождения и уничтожения векторных бозонов с угловым моментом $\ell = 1$, проекцией углового момента m и проекцией "псевдоспина" α :

$$u^*_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x_m(\alpha) - iq_m(\alpha)],$$

$$u^m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x^m(\alpha) + iq^m(\alpha)]. \qquad /3/$$

Операторы $u^*_m(\alpha)$ и $u^m(\alpha)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[u^*_m(\alpha),\ u^n(\beta)] = -\delta^n_m\,\delta(\alpha,\beta), \qquad /4/$$

где $\delta^n_m\ \delta(\alpha,\beta)$ - символы Кронекера.

В дальнейшем для наглядности введем

$$u^*_m\left(\alpha = \frac{1}{2}\right) = p^*_m, \qquad u^*_m\left(\alpha = -\frac{1}{2}\right) = n^*_m \qquad /5а/$$

и

$$(p^*_m)^* = p^m, \qquad (n^*_m)^* = n^m. \qquad /5б/$$

В этих обозначениях самый общий вид одно- и двухчастичного гамильтониана, сохраняющего число частиц и удовлетворяющего условиям эрмитовости, можно записать в следующем виде:

$$H = \epsilon_p (p^*p)^\circ + \epsilon_n (n^*n)^\circ +$$

$$+ \sum_{L=0,2} \{Z^1_L (p^*p^*)^L (pp)^L + Z^\circ_L (p^*n^*)^L (pn)^L + Z^{-1}_L (n^*n^*)^L (nn)^L\} +$$

$$+ Z^\circ_1 (p^*n^*)^1 (pn)^1 +$$

$$+ \sum_{L=0,2} \{u_L[(p^*p^*)^L (nn)^L + (n^*n^*)^L (pp)^L] +$$

$$+ v_L[(p^*p^*)^L (np)^L + (p^*n^*)^L (pp)^L] + \qquad /6/$$

$$+ w_L[(n^*n^*)^L (pn)^L + (n^*p^*)^L (nn)^L]\},$$

где

$$(pp)^L_M = \sum_{m,s} C^{LM}_{1m1s}\, p_m p_s; \quad (p^*p^*)^L_M = \sum_{m,s} C^{LM}_{1m1s}\, p^*_m p^*_s$$

и т.д.

В /6/ ϵ_p, ϵ_n, $Z^{0,\pm 1}_L$, Z^0_1, u_L, v_L, w_L /$L = 0,2$/ - реальные числа, которые играют роль феноменологических констант одно- и двухчастичного взаимодействия.

Отметим, что гамильтониан /6/ не сохраняет псевдоспина системы. Он будет коммутировать с операторами псевдоспина:

$$T_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}p^*\cdot n; \quad T_0 = \frac{1}{2}[p^*\cdot p - n^*\cdot n]; \quad T_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}n^* p,$$

если $Z^0_L = Z^{\pm 1}_L$; $u_L = v_L = w_L = 0$; Z^0_1 - произвольное, и будет коммутировать с оператором T_0 при произвольных Z^k_L и $u_L = v_L = w_L = 0$.

Хорошо известно, что с помощью операторов $u^*_m(\alpha)$ и $u^m(\alpha)$ можно построить генераторы симплектической группы $Sp(12,R)$, а именно:

$$u^*_m(\alpha)\, u^*_s(\beta); \quad u^*_m(\alpha)\, u^s(\beta); \quad u^m(\alpha)\, u^s(\beta). \qquad /7/$$

Очевидно, гамильтониан /6/ можно выразить через некоторые генераторы, данные в /7/; с другой стороны, в общем случае оператор H инвариантен только относительно группы трехмерных вращений 0/3/ и, таким образом, группа $Sp(12,K)$ является группой динамической симметрии гамильтониана по Гелл-Манну[4], т.е. в одном унитарном неприводимом представлении этой группы содержатся все собственные состояния H. Отметим, однако, что H можно также выразить с помощью операторов $u^*_m(\alpha)\, u^s(\beta)$, которые являются генераторами компактности подгруппы $U(6) \subset Sp(12,R)$. Поэтому матрица гамильтониана будет диагональной по отношению к состояниям, принадлежащим к разным УНП группы U/6/, и задача о нахождении собственных векторов и собственных значений гамильтониана сводится к его диагонализации в конечномерных подпространствах неприводимых представлений U/6/. Однако это не уменьшает значения Sp(12,R) как полной динамической группы гамильтониана, так как, с одной стороны, для нахождения полного спектра системы необходимо диагонализировать H во всех подпространствах УНП группы U/6/, содержащихся в данном представлении Sp(12,R). С другой стороны, разные УНП U/6/ связываются посредством операторов перехода, которые в общем случае выражаются в виде

$$R^L_M = \sum_{\alpha\beta} \{ f^L_M(\alpha\beta)(u^*(\alpha)\,u^*(\beta))^L_M + a^L_M(\alpha\beta)(u^*(\alpha)\,u(\beta))^L_M + h^L_M(\alpha\beta)(u(\alpha)\,u(\beta))^L_M \} . \qquad /8/$$

Что касается задачи диагонализации гамильтониана H внутри данного УНП группы U/6/, ее можно решить в аналитическом виде, если H можно выразить с помощью операторов Казимира по цепочкам подгрупп, содержащихся в U/6/.

Чтобы найти эти цепочки, можно воспользоваться стандартным методом редукции фундаментального неприводимого представления группы U/6/, а именно $[1]_6$ /см., например,[6] /. Это представление задается в операторном виде как $u^*_m(\alpha)$ /m =0, ±1, $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ /и имеет размерность $\dim[1]_6 = 6$. Оно содержит следующие неприводимые представления, имеющие ту же самую размерность, что и $[1]_6$:

$$[1]_6 \supset [1]_4 + [1]_2 \supset [1]_3 + [11]_3 \supset (1)_3 + (1)_3 , \qquad /9а/$$

$$[1]_6 \supset [1]_3 + [1]_2 \supset (1)_4 \supset (1_3) + (1_3)^* , \qquad /9б/$$

$$[1]_6 \supset [1]_3 + [11]_3 \supset (1)_3 + (1)^*_3 , \qquad /9в/$$

$$[1]_6 \supset [1]_3 \times [1]_2 \supset (1)_3 \times (1)_2 + (1)_3\,(-1)_2 , \qquad /9г/$$

$$[1]_6 \supset (1)_6 \supset (1)_3 \times (1)_2 + (1)_3\,(-1)_2 . \qquad /9д/$$

Представления в прямоугольных скобках $[n_r] \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]_r$ задают алгебры унитарных r-мерных групп, а в круглых скобках $(\omega_1, \dots, \omega_{<\frac{r}{2}>-1}, \omega_{<\frac{r}{2}>})_r$, $(\omega_1, \dots, \omega_{<\frac{r}{2}>})^*_r$ - алгебры соответствующих ортогональных r-мерных групп. Эти редукции можно использовать и для классификации коллективных состояний, содержащихся в наиболее симметрическом непредвидимом представлении группы U/6/. На основе соответствующих алгебраических моделей [1-3] можно считать, что разные цепочки подгрупп определяют разные предельные случаи /ротационные, вибрационные и т.д./ для описания коллективных характеристик ядер. Подробное рассмотрение этих предельных случаев является задачей будущего.

2. О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБР, ВОЗНИКАЮЩИХ НА ОСНОВЕ ДВУХ ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ

Для большей наглядности введем следующие непереводимые тензорные операторы ранга:

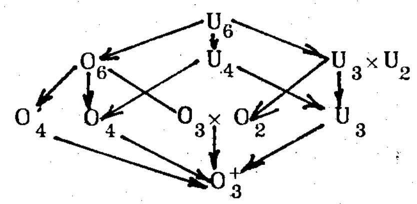
$$A^J_M(\alpha\beta) = \sum_{m,n} C^{JM}_{1m1n}\, u^*_m(\alpha)\, u_n(\beta) , \qquad /10/$$

где C^{JM}_{1m1n} - коэффициент Клебша-Гордона [5].

Операторы /10/ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[A^{J_1}_{M_1}(\alpha\beta), A^{J_2}_{M_2}(\alpha'\beta')] = -\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)} \sum_J C^{JM_1+M_2}_{J_1M_1J_2M_2} \times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \{(-1)^J A^J_M(\alpha\beta')\delta(\alpha'\beta) - (-1)^{J_1+J_2} A^J_M(\alpha'\beta)\delta(\alpha\beta')\} . \qquad /11/$$

Из сделанного нами разложения фундаментального представления U/6/, а также из исследования коммутационных соотношений /11/ вытекает следующая схема групповой редукции:



/12/

Коротко перечислим эти группы, их генераторы и операторы Казимира:

1. Группа U_6. Генераторами этой группы являются

$$A^J_M(\alpha\beta); \quad J = 0,1,2; \quad \alpha,\beta = n,p . \qquad /13а/$$

Оператор Казимира

$$C_2(U_6) = \sum_{JM} \sum_{\alpha\beta} A^J_M(\alpha\beta) A^J_{-M}(\beta\alpha) = N(N+5)\,, \qquad /13б/$$

где

$$N = -\sqrt{3}A^0(pp) - \sqrt{3}A^0(nn) \qquad /13в/$$

- оператор числа частиц.

2. Группа $U_3 \times U_2$. Генераторы этой группы состоят из двух наборов коммутирующих операторов:

а/ группа U_2. Ее генераторы

$$N = -\sqrt{3}A^0(pp) - \sqrt{3}A^0(nn)\,,$$
$$T_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}A^0(pn)\,,\quad T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}[A^0(nn) - A^0(pp)],\quad T_{-1} = -\sqrt{\frac{3}{2}}A^0(np) \qquad /14/$$

интерпретируются как оператор числа частиц и операторы псевдоспина соответственно. Оператор Казимира этой группы есть

$$C(U_2) = 4T^2 + N^2\,; \qquad /15/$$

б/ группа U_3. Ее генераторы

$$N = -\sqrt{3}[A^0(pp) + A^0(nn)]\,, \qquad /16а/$$

$$L_M = -\sqrt{2}[A^1_M(pp) + A^1_M(nn)]\,, \qquad /16б/$$

$$Q_M = \sqrt{6}[A^2_M(pp) + A^2_M(nn)] \qquad /16в/$$

коммутируют с /14/ и интерпретируются соответственно как оператор числа частиц, оператор углового и оператор квадрупольного момента. Оператор Казимира этой группы

$$C_2(U_3) = \frac{1}{6}Q^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}N^2. \qquad /17/$$

Отметим, что группы U_3 и U_2 являются взаимно дополняющими, а именно: собственные значения оператора Казимира группы U_3 /17/ полностью определяются собственными значениями оператора Казимира U_2 /15/, поскольку можно показать, что

$$C_2(U_3) = \frac{1}{2}C(U_2) + N\,. \qquad /18/$$

3. Группа углового момента O_3^+. Генераторы этой группы даются выражением /16б/, а оператор Казимира есть L^2.

4. Группа $U/4/$. Алгебра Ли этой группы получается, если к генераторам $SU/3/$, определенным с помощью /16б-в/, добавить

$$A^L_M(np) + A^L_M(pn)\,. \qquad /19/$$

Оператор Казимира есть

$$C_2(U_4) = C_2(SU_3) - \frac{2}{3}T^2 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3}N +$$
$$+ \sum_{L=1,2} [(p^*n)^L (p^*n)^L + (n^*p)^L (n^*p)^L]\,. \qquad /20/$$

5. Группа $0/6/$ имеет следующие генераторы:

$$i[A^2_M(pn) - A^2_M(np)]\,, \qquad /21а/$$

$$A^1_M(pp) - A^1_M(nn)\,, \qquad /21б/$$

$$A^1_M(pn) + A^1_M(pn)\,, \qquad /21в/$$

$$A^1_M(pp) + A^1_M(nn) \equiv -\sqrt{2}L_M\,, \qquad /21г/$$

$$i[A^0(pn) - A^0(np)] \equiv -i\sqrt{\frac{2}{3}}(T_1 - T_{-1})\,, \qquad /21д/$$

а ее оператор Казимира записывается в виде

$$C_2(O_6) = \sum_{L=0,1,2} (-1)^{L+1} [(p^*n)^L (p^*n)^L + (n^*p)^L (n^*p)^L] +$$
$$+ \frac{1}{2}L_p^2 + \frac{1}{2}L_n^2 + \frac{1}{2}N^2 - 2T_0^2 + 3N\,, \qquad /22/$$

где введено обозначение $L_\alpha = -\sqrt{2}A^1(\alpha\alpha)$, $(\alpha = p, n)$.

6. Две группы O_4 и O_4'. Генераторы первой из этих групп состоят из операторов углового момента /16б/ и генераторов /21в/. Очевидно также, что те же самые операторы содержатся среди генераторов группы $U/4/$, описанной в п.4. Оператор Казимира этой группы есть

$$C_2(O_4) = (p^*n)^1 (p^*n)^1 + (n^*p)^1 (n^*p)^1 + \frac{1}{2}L^2 + N +$$
$$+ \frac{1}{2}L_p L_n - \frac{1}{6}Q_p G_n + \frac{2}{3}N_p N_n\,, \qquad /23/$$

где $Q_\alpha = \sqrt{6}A^2(\alpha\alpha)$; $\alpha = p,n$ - оператор квадрупольного момента p- и n-бозона соответственно, а $N_p = p^*p$, $N_n = n^*n$ - операторы числа p- и n-бозонов.

Вторая из этих групп, а именно O_4', получается с помощью оператора углового момента L_M и операторов /21б/.

7. Группа O/3/x O/2/ является одновременно подгруппой как O /6/, так и U/3/x U/2/. Ее генераторы состоят из оператора углового момента и генераторов /21д/. Оператор Казимира этой группы

$$C(O_3 \times O_2) = 2T^2 - 2T_0^2 + L^2. \qquad /24/$$

Рассмотрение гамильтониана /6/ и выражения для операторов Казимира соответствующих цепочек подгрупп показывает, что все члены двухчастичного взаимодействия в гамильтониане могут быть выражены посредством линейных комбинаций операторов Казимира. Таким способом состояния, которые диагонализируют гамильтониан, могут быть охарактеризованы квантовыми числами, определяющими собственные значения операторов Казимира для соответствующей цепочки подгрупп.

Авторы выражают благодарность Г.Н.Афанасьеву и И.Н.Михайлову и проф. В.Г.Соловьеву за полезные обсуждения и помощь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Групповая редукция прямого произведения $[1]_6 \times [1]_6 \times \times [0^5,-1]_6 \times [0^5,-1]_6$, которым задается самый общий вид двухчастичного взаимодействия, дает число и тензорный вид независимых двухчастичных членов взаимодействия. Для иллюстрации мы выписываем редукцию по цепочке /8г/:

$$U(6) \supset U(3) \otimes U(2) \supset O(3) \otimes O(2),$$

$$[1]_6 \times [1]_6 \times [0^5,-1]_6 \times [0^5,-1]_6 = \qquad /П1/$$

$$= [2,0^4,-2]_6 + 2[1,0^4,-1]_6 + [0]_6 + \ldots$$

В правой части /П1/ находятся только те неприводимые представления U/6/, которые дают ненулевые члены при диагонализации H по базисным состояниям /6/:

$$[2,0^4,-2]_6 = \underline{[42]_3 \times [4]_2} + \underline{[42]_3 \times [31]_2} + \underline{[42]_3 \times [22]_2} +$$
$$+ [321]_3 \times [31]_2 + [321]_3 \times [22]_2 + \underline{[222]_3 \times [4]_2} + \qquad /П2/$$
$$+ \underline{[222]_3 \times [22]_2} + [3]_3 \times [22]_2 + [3]_3 \times [2]_2 +$$
$$+ [321]_3 \times [31]_2 + [33]_3 \times [31]_2.$$

Только подчеркнутые члены содержат скаляры по O/3/:

$$[42]_3 \times ([42]_2 + [31]_2 + [22]_2) =$$
$$= [(4)_3 + (3)_3 + 2(2)_3 + (0)_3] \times [(4)_2 + 2(2)_2 + 3(0)_2],$$
$$[222]_3 \times ([4]_2 + [22]_2) = (0)_3 \times [(4)_2 + (2)_2 + 2(0)_2],$$
$$[1,0^4,-1]_6 = [21]_3 \times [2]_2 + [21]_3 \times [11]_2 + [111]_3 \times [2]_2, \qquad /П3/$$
$$[111]_3 \times [2]_2 = (0)_3 \times [(2)_2 + (0)_2],$$

и, наконец,

$$[0]_6 = [0]_3 \times [0]_2 = (0)_3 \times (0)_2. \qquad /П4/$$

Итак, мы видим, что независимых скаляров в двухчастичном взаимодействии векторных бозонов 13 - столько, сколько констант введенного гамильтониана. Из них 7 имеют "псевдоспин" 0, 2 имеют "псевдоспин" $\underline{+}4$ и 4 - $\underline{+}2$, что видно из выражения /6/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Castanos O. et al. J.Math.Phys., 1979, 20, N1, p. 35; Arima A., Iachello F. Phys.Rev.Lett., 1975, 35, p. 1069; Arima A., Iachello F. Ann.Phys., N.Y. , 1978, p. 201.
2. Vanagas V., Nadjakov E., Raychev P. Preprint ICTP-Trieste, IC/75/40.
3. Райчев П., Русев Р. ЯФ, 1978, 27, с. 1501; Караджов Д. и др. ОИЯИ, Р4-11670, Дубна, 1978; Караджов Д., Райчев П., Русев Р. ОИЯИ, Р4-11671, Дубна, 1978.
4. Dashen R.F., Gell-Mann M. Phys.Lett., 1965, 17, p. 142.
5. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", М., 1975.
6. Ванагас В.В. Алгебраические методы в теории ядра. "Минтис", Вильнюс, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 февраля 1981 года.