ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8077

Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янссен

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА. II.

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8077

Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янссен

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА. II.

Направлено в ТМФ

В работе [1] был развит микроскопический метод построения коллективного гамильтониана ядра, описывающего квадрупольные колебания. Было показано, что при достаточно общих предположениях об остаточных силах, действующих между нуклонами в ядре, коллективный гамильтониан имеет следующую структуру:

$$\hat{H} = E_0 + h_1 \hat{N} + h_2 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (b^+_{2\mu} b^+_{2-\mu} \sqrt{(N-\hat{N})(N-1-\hat{N})} + h.c.) + h_3 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (b^+_{2\mu} [b^+_2 b_2]_{2-\mu} \sqrt{N-\hat{N}} + h.c.) + \sum_{L=0,2,4;M} (-1)^M h_{4L} [b^+_2 b^+_2]_{LM} [b_2 b_2]_{L-M} , \qquad /1/$$

где $\hat{N} = \sum_{\mu} b^+_{2\mu} b_{2\mu}$; $b^+_{2\mu}$ ($b_{2\mu}$) - операторы рождения /уничтожения/ квадрупольных фононов. Константы E_0, h_1, h_2, h_3, h_{4L} содержат информацию об одночастичных энергиях и остаточных силах; N - характеризует максимально возможное число бозонных возбуждений в системе.

Гамильтониан /1/ построен из операторов:

$$b^+_{2\mu} \sqrt{N-\hat{N}} , \quad \sqrt{N-\hat{N}}\, b_{2\mu} , \quad b^+_{2\mu} b_{2\mu'} , \qquad /2/$$

и является комбинацией линейных и квадратичных по степеням этих операторов членов. В свою очередь, 35 операторов /2/ представляют собой бозонную реализацию алгебры $SU(6)$ для специального представления, характеризуемого квантовым числом N. Известны аналогичные представления для алгебры $SU(2)$ [2]:

$$I_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} b^+ \sqrt{2I - b^+ b} \qquad I_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2I - b^+ b}\, b ,$$

$$I_0 = -I + b^+ b$$

где I - момент, характеризующий представление алгебры $SU(2)$. Квантовое число N играет для алгебры $SU(6)$ ту же роль, что и I для $SU(2)$.

Можно использовать другое представление для генераторов алгебры $SU(6)$ [3], в котором не присутствует явно квантовое число N:

$$b^+_{2\mu} \sqrt{N - \hat{N}} \rightarrow b^+_{2\mu} \beta, \quad \sqrt{N - \hat{N}}\, b_{2\mu} \rightarrow \beta^+ b_{2\mu}, \quad b^+_{2\mu} b_{2\mu} \rightarrow b^+_{2\mu} b_{2\mu}, \qquad /3/$$

где β^+, β - операторы монопольных бозонов. Взамен квантового числа N мы получаем оператор $\beta^+\beta + \sum_\mu b^+_{2\mu} b_{2\mu}$, коммутирующий со всеми генераторами алгебры $SU(6)$. Его собственное значение, которым и является N, характеризует различные представления этой алгебры.

На основе гамильтониана /1/ был выполнен /4/ расчет свойств коллективных состояний в различных сферических, переходных и деформированных ядрах. Результаты таких расчетов удовлетворительным образом согласовывались с экспериментальными данными.

Однако следует отметить, что в традиционных подходах коллективный гамильтониан явным образом представляется в виде суммы кинетической и потенциальной энергий, в противоположность гамильтониану /1/. При этом потенциальная энергия рассчитывается в рамках метода самосогласованного поля или близких по идеологии приближений, а массовые коэффициенты и момент инерции - в рамках кренкинг-модели.

Чтобы проводить сравнение с такими подходами, необходимо выделить из гамильтониана /1/ потенциальную и кинетическую энергии. Это можно сделать, если совершить преобразование из лабораторной системы в систему координат, вращающуюся вместе с ядром.

1. Система координат, вращающаяся вместе с ядром, или, как принято ее называть, внутренняя система, определяется условием, что ее оси совпадают с главными осями тензора квадрупольной деформации, т.е. оператор квадрупольного момента массы $Q_{2\mu}$ в этой системе приводится к такому виду, что /5/:

$$Q_{21} = Q_{2-1} = Q_{22} - Q_{2-2} = 0 \ . \qquad /4/$$

Таким образом, для перехода во внутреннюю систему прежде всего нужно построить оператор $Q_{2\mu}$, удовлетворяющий следующим общим требованиям /5/:

$$Q^{+}_{2\mu} = (-1)^{\mu} Q_{2-\mu} \ , \quad [\, Q_{2\mu} , Q_{2\mu'} \,] = 0 \ .$$

Но этого нельзя сделать, беря линейную комбинацию операторов /3/.

Чтобы построить оператор с нужными свойствами, рассмотрим сначала квадрупольный оператор, введенный Эллиотом /6/, который определяется следующим образом:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{i} \{ r_i^2 Y_{2\mu} (\vec{\Omega}_i^{(r)}) + P_i^2 Y_{2\mu} (\vec{\Omega}_i^{(p)}) \} \ . \qquad /5/$$

Здесь индекс "i" различает нуклоны; r_i - радиус, а p_i - импульс нуклона; $Y_{2\mu} (\vec{\Omega}^{(r,p)})$ - сферические функции, зависящие от углов, характеризующих направление радиус-вектора нуклона или его импульса.

Операторы $\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям /6/:

$$[\, \tilde{\tilde{Q}}_{2\mu} , \tilde{\tilde{Q}}_{2\mu'} \,] = 3\sqrt{10} \sum_{m} C^{1\,m}_{2\mu\, 2\mu'} \, I_m \ ,$$

$$[\, I_m , \tilde{\tilde{Q}}_{2\mu} \,] = \sqrt{6} \sum_{\mu'} C^{2\mu'}_{2\mu\, 1m} \, \tilde{\tilde{Q}}_{2\mu'} \ , \qquad /6/$$

где I_m - оператор углового момента, $C^{2\mu'}_{2\mu\, 1m}$ - коэффициент Клебша-Гордона.

В отличие от оператора $Q_{2\mu}$, оператор $\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu}$, удовлетворяющий соотношениям /6/, может быть построен /и при этом единственным образом/ в виде линейной комбинации операторов /3/:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu} = -\sqrt{8}\,(b^{+}_{2\mu}\beta + \beta^{+}(-1)^{\mu} b_{2-\mu} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sum_{\nu\nu'} C^{2\mu}_{2\nu\, 2\nu'}\, b^{+}_{2\nu}(-1)^{\mu'} b_{2-\nu'}) .$$

Для дальнейшего полезно воспользоваться дифференциальным представлением бозонных операторов:

$$b^{+}_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{\mu} - (-1)^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{-\mu}}\right), \quad b_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)^{\mu} x_{-\mu} + \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right),$$

$$\beta^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{00} - \frac{\partial}{\partial x_{00}}\right), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{00} + \frac{\partial}{\partial x_{00}}\right). \qquad /7/$$

Переменная x_{00} является скаляром по отношению к вращению, а $x_{2\mu}$ преобразуется при вращении как компонента квадрупольного тензора. Оператор $\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu}$ в представлении /7/ запишется следующим образом:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{2\mu} = -\sqrt{8}\,(x_{00}x_{\mu} + \frac{\sqrt{7}}{4}[x\,x]_{2\mu}) + \sqrt{8}\,\Big(\frac{\partial}{\partial x_{00}}(-1)^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{-\mu}} + \frac{\sqrt{7}}{4}(-1)^{\mu}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big]_{2-\mu}\Big); \qquad /8/$$

где квадратные скобки $[\;\;]_{2\mu}$ обозначают векторную связь. Сравнивая /8/ с /5/, мы видим, что первый член в правой стороне /8/ может быть отождествлен с искомым массовым квадрупольным оператором. Таким образом,

$$Q_{2\mu} = -\sqrt{8}\,(x_{00}x_{\mu} + \frac{\sqrt{7}}{4}[x\,x]_{2\mu}) .$$

Теперь легко определить преобразование, переводящее из лабораторной во внутреннюю систему координат. Преобразуем координаты x_{μ} следующим образом:

$$x_{\mu} = D^{2}_{\mu 0}(\vec{\theta})\,\bar{x}_{0} + \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{2}_{\mu 2}(\vec{\theta}) + D^{2}_{\mu -2}(\vec{\theta}))\,\bar{x}_{2}, \qquad /9/$$

где $D^{2}_{\mu k}$ - функции Вигнера.

Вместо 5 переменных x_μ мы ввели три угла Эйлера θ_1, θ_2, θ_3, описывающие вращение ядра, и координаты $\bar{x}_0$, $\bar{x}_2$, характеризующие его форму.

В новых переменных оператор $Q_{2\mu}$ запишется следующим образом:

$$Q_{2\mu} = D^2_{\mu 0}(\vec{\theta})\,\bar{Q}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D^2_{\mu 2}(\vec{\theta}) + D^2_{\mu -2}(\vec{\theta}) \right) \bar{Q}_2 \,,$$

где

$$\bar{Q}_0 = \bar{x}_0^2 - \bar{x}_2^2 - \sqrt{8}\,x_{00}\,\bar{x}_0 \,, \quad \bar{Q}_2 = -\sqrt{8}\left(x_{00}\bar{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x}_0\bar{x}_2 \right).$$

Таким образом, преобразование /9/ приводит $Q_{2\mu}$ к виду, удовлетворяющему условию /4/. Для того, чтобы представить $Q_{2\mu}$ в декартовых или сферических координатах, нужно $\bar{x}_0$, $\bar{x}_2$ и x_{00} преобразовать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_2 \\ x_{00} \end{pmatrix} \qquad /10/$$

В координатах x_1, x_2, x_3 внутренний квадрупольный момент преобразуется к хорошо известному выражению

$$\bar{Q}_0 = \frac{1}{2}\left(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \right), \quad \bar{Q}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 \right),$$

или в сферических координатах -

$$\bar{Q}_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, r^2\, Y_{20}(\theta,\phi)\,, \quad \bar{Q}_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, r^2 \left(Y_{22}(\theta\phi) + Y_{2-2}(\theta\phi) \right),$$

где $x_1 = r\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = r\cos\theta$.

II.

Применяя преобразования /3/, /7/, /9/ и /10/, можно записать гамильтониан /1/ следующим образом:

$$H_{\text{колл.}} = T_{\text{rot.}} + T_{\text{vib.}} + V + H_{\text{св.}} \qquad /11/$$

Потенциальная энергия равна:

$$V(x_1, x_2, x_3) = V_0 + V_1(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) +$$

$$+ V_2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + V_3(x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 +$$

$$+ x_3^2 x_1 x_2) .$$

Параметры V_0, V_1, V_2, V_3 линейно выражаются через коэффициенты гамильтониана /1/.

Кинетическая энергия колебаний записывается следующим образом:

$$T_{vib.} = 2 \sum_{i,k=1}^{3} \left\{ B_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} B_{ik}(x) \right\} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_+} \right)^4 . \qquad /12/$$

Ротационная часть гамильтониана имеет следующий вид:

$$T_{rot} = \sum_{i=1}^{3} \frac{I_i^2}{2\vartheta_i} + d_1 \sum_{i=1}^{3} \frac{I_i^4}{A_i^2} + d_2 \sum_{i \neq k} \frac{I_i^2 I_k^2}{A_i A_k} . \qquad /13/$$

Здесь I_i - операторы проекций момента на оси внутренней системы координат;

$$\frac{1}{\vartheta_i} = \frac{1}{A_i} [a_1 + a_2(x_k^2 + x_\ell^2) + a_3 x_i^2 + a_4 x_k x_\ell + a_5 x_i (x_k + x_\ell)]$$

$$A_i = 2(x_k - x_\ell)^2 , \qquad /14/$$

$$i \neq k \neq \ell .$$

Параметры d_1, d_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 линейно выражаются через коэффициенты гамильтониана /1/.

Оставшийся оператор $H_{вн.}$ пропорционален $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} I_i^2$.

Мы не приводим его детальную структуру. Подобный оператор обсуждался в работе /7/. Его можно интерпретировать как зависящее от импульса колебаний взаимодействие колебаний с вращением.

Гамильтониан /11/ инвариантен относительно преобразования:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ \\ I_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_k \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ \\ I_k \end{pmatrix} \qquad i, k = 1, 2, 3. \qquad /15/$$

Последнее есть следствие того факта, что физическое описание не зависит от порядка нумерации координатных осей.

Ниже мы обсудим свойства потенциальной энергии, массовых коэффициентов и моментов инерции в терминах внутренних квадрупольных моментов $\bar{Q}_0$ и $\bar{Q}_2$ и соответствующих производных.

. *Потенциальная энергия*

В зависимости от значений параметров V_0, V_1, V_2, V_3 форма потенциальной энергии как функции $\bar{Q}_0$ и $\bar{Q}_2$ может быть трех типов:

а/ потенциальная энергия имеет только один минимум при $\bar{Q}_0 = \bar{Q}_2 = 0$;

б/ потенциальная энергия имеет максимум при $\bar{Q}_0 = \bar{Q}_2 = 0$ и минимум, соответствующий неаксиальной деформации ($\bar{Q}_0 \neq 0$, $\bar{Q}_2 \neq 0$, $\bar{Q}_2 \neq \sqrt{3}\,\bar{Q}_0$) ;

в/ потенциальная энергия имеет три экстремальных точки: максимум при $\bar{Q}_0 = \bar{Q}_2 = 0$ и два минимума, отвечающие аксиальной деформации / $\bar{Q}_0 \neq 0$, $\bar{Q}_2 = 0$ или $\sqrt{3}\,\bar{Q}_0$/.

Различные виды кривой потенциальной энергии деформации /для случая $\bar{Q}_2 = 0$ / приведены на *рис. 1*.

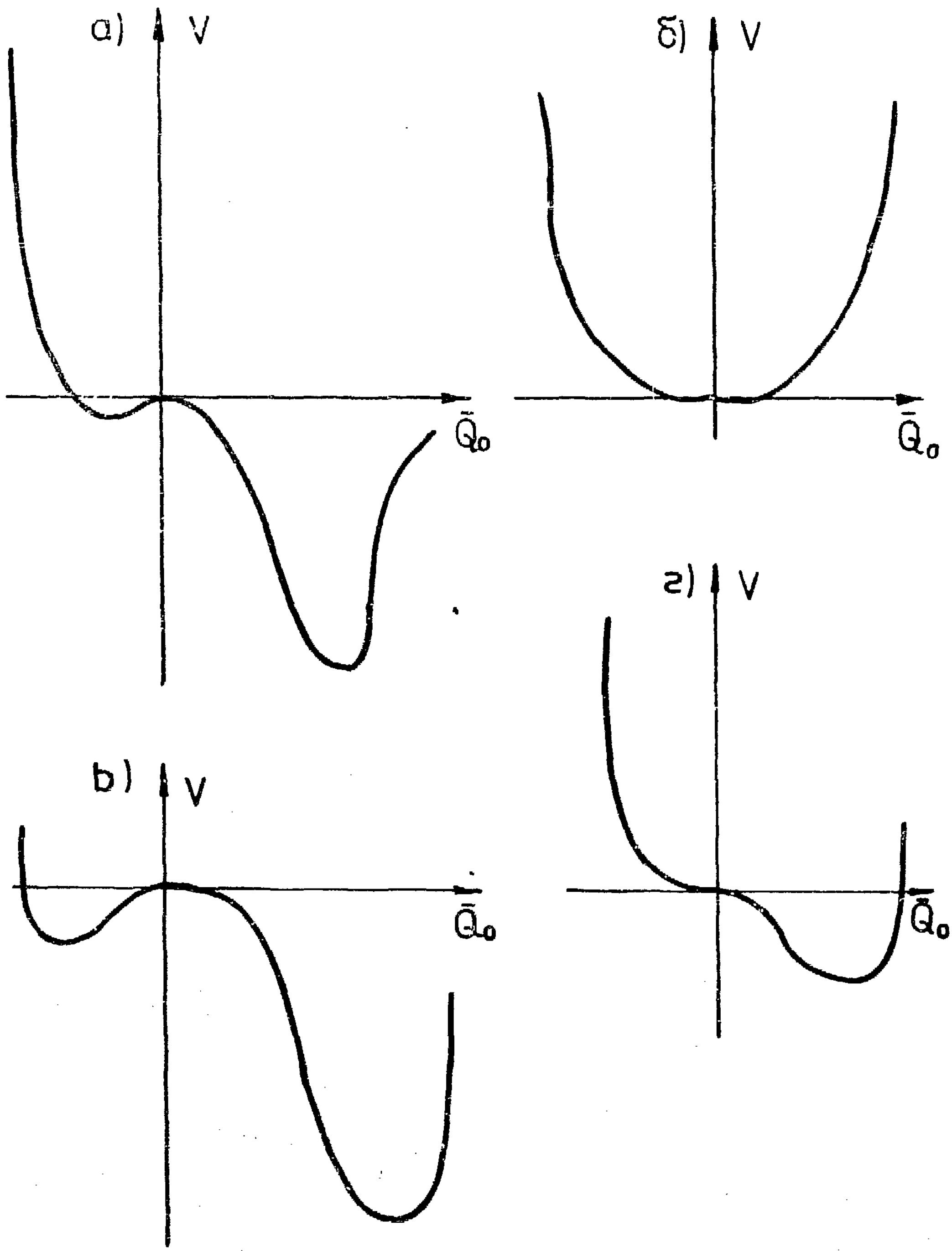

Рис. 1. Зависимость потенциальной энергии деформации от $\bar{Q}_0$ для различных наборов параметров гамильтониана.

2. Массовые коэффициенты

В выражении для вибрационной части кинетической энергии /12/ присутствуют члены второго и четвертого порядков по колективным импульсам. Члены четвертого порядка обычно интерпретируются как неадиабатические поправки к кинетической энергии колебаний. Соответствующие им массовые коэффициенты не зависят от x_1, x_2, x_3. Массовые коэффициенты при квадратичных по импульсу членах зависят от координат x_1, x_2, x_3. Различные случаи такой зависимости для массового коэффициента, соответствующего движению по координате $\bar{Q}_0$, показаны на *рис. 2*. Случаям 2 а,б,в,г соответствуют те же значения коэффициентов гамильтониана /1/, что и случаям 1 а,б,в,г на *рис. 1*.

3. Момент инерции

Выражая /13/ и /14/ через $\bar{Q}_0$, $\bar{Q}_2$ и r^2 мы запишем ротационную энергию следующим образом:

$$T_{rot} = \sum_{i=1}^{3} \frac{I_i^2}{2\mathcal{J}_i^{(2)}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{I_i^4}{2\mathcal{J}_i^{(4)}} + \sum_{i\neq k=1}^{3} \frac{I_i^2 I_k^2}{2\mathcal{J}_{ik}^{(2,2)}},$$

где

$$\mathcal{J}_1^{(2)} = \left(\sqrt{r^2+2\bar{Q}_0} - \sqrt{r^2-\bar{Q}_0-\sqrt{3}\,\bar{Q}_2}\right)^2 \Big/ \Big(2e_0 r^2 + e_1 + e_2\left(\bar{Q}_0 + \frac{\bar{Q}_2}{\sqrt{3}}\right) +$$

$$+ e_3\sqrt{(r^2+2\bar{Q}_0)(r^2-\bar{Q}_0-\sqrt{3}\,\bar{Q}_2)} + e_4\sqrt{r^2-\bar{Q}_0+\sqrt{3}\,\bar{Q}_2}\,\cdot$$

$$\times \left(\sqrt{r^2+2\bar{Q}_0} + \sqrt{r^2-\bar{Q}_0-\sqrt{3}\,\bar{Q}_2}\right);$$

$$\mathcal{J}_1^{(4)} = e_5\left(\sqrt{r^2+2\bar{Q}_0} - \sqrt{r^2-\bar{Q}_0-\sqrt{3}\,\bar{Q}_2}\right)^4$$

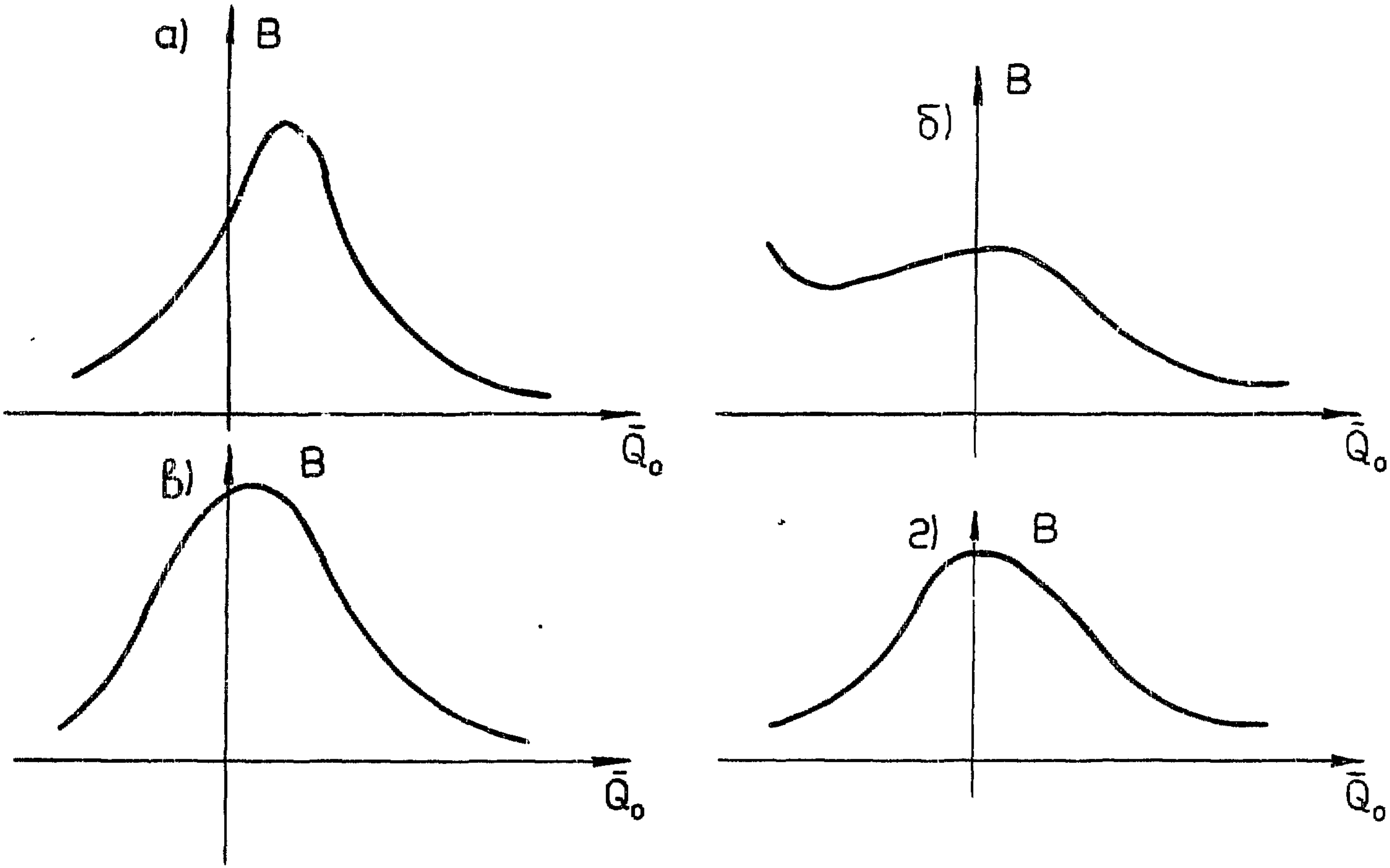

Рис. 2. Зависимость массового коэффициента аксиально-симметричных колебаний от Q_0 *для различных наборов параметров гамильтониана.*

$$\mathcal{J}_{12}^{(2,2)} = e_6 \left(\sqrt{r^2 + 2\bar{Q}_0} - \sqrt{r^2 - \bar{Q}_0 - \sqrt{3}\,\bar{Q}_2} \right)^2 \times$$

$$\times \left(\sqrt{r^2 + 2\bar{Q}_0} - \sqrt{r^2 - \bar{Q}_0 + \sqrt{3}\,\bar{Q}_2} \right)^2,$$

e_i ($i = 0, 1 - 6$) - линейные комбинации констант, входящих в гамильтониан /1/. Остальные моменты инерции могут быть получены с помощью соотношений симметрии /15/.

Для малых значений переменных $\bar{Q}_0$, $\bar{Q}_2$ получаем следующие приближенные выражения:

$$\mathcal{J}_1^{(2)} \approx \left(\bar{Q}_0 + \frac{\bar{Q}_2}{\sqrt{3}}\right)^2, \quad \mathcal{J}_1^{(4)} \approx \left(\bar{Q}_0 + \frac{\bar{Q}_2}{\sqrt{3}}\right)^4, \quad \mathcal{J}_{12}^{(2,2)} \approx \left(\bar{Q}_0 + \frac{\bar{Q}_2}{\sqrt{3}}\right)^4,$$

которые совпадают с результатами, полученными в рамках модели жидкой капли.

III.

Общая картина зависимости потенциальной энергии, массовых коэффициентов и моментов инерции от параметров деформации полученная в предыдущем разделе, находится в соответствии с обычными представлениями, хотя и имеет ряд особенностей. Для более детального сравнения требуется большой объем конкретных расчетов. В этом же разделе мы рассмотрим простую модель, чтобы на этом примере выяснить, каковы возможные источники расхождения результатов нашего и более традиционных подходов.

Гамильтониан модели возьмем в следующем виде:

$$\hat{H} = \hat{N} - \kappa \hat{Q}^2,$$

$$\hat{N} = \sum_{s=1}^{\Omega} \left(a_s^+ a_s + a_{\bar{s}}^+ a_{\bar{s}} \right), \quad \hat{Q} = \sum_{s=1}^{\Omega} \left(a_s^+ a_{\bar{s}}^+ + a_{\bar{s}} a_s \right);$$

(a_s^+ (a_s)) - операторы рождения /уничтожения/ фермионов в состоянии s ; состояние $\bar{s}$ является сопряженным по времени относительно s . Предполагаем, что $\Omega \gg 1$. Этот гамильтониан описывает только один тип колебаний и не содержит вращательных степеней свободы, что позволяет получить выражение для потенциальной энергии непосредственно после введения коллективных переменных, без последующего перехода во внутреннюю систему координат.

Операторы $\hat{N}$, $\hat{Q}$ и $\hat{P} = \sum_{s=1}^{\Omega} (a_s^+ a_{\bar{s}}^+ - a_{\bar{s}} a_s)$ образуют замкнутую алгебру:

$$[\hat{N}, \hat{Q}] = 2\hat{P}, \quad [\hat{N}, \hat{P}] = 2\hat{Q}, \quad [\hat{Q}, \hat{P}] = 2(\Omega - \hat{N}),$$

эквивалентную $SU(2)$:

$$\hat{Q} \to 2I_z, \quad \hat{P} \to 2iI_y, \quad \Omega - \hat{N} \to 2I_x, \quad -\frac{\Omega}{2} \le I_z \le \frac{\Omega}{2}.$$

Поэтому мы можем написать

$$\hat{H} = \Omega - 2\hat{I}_x - 4\kappa \hat{I}_z^2 .$$

Этот гамильтониан можно диагонализовать в пространстве собственных функций оператора $\hat{I}_z \left(= \frac{1}{2}\hat{Q} \right) : |jm>$ с $j = \frac{\Omega}{2}$. Такой базис удобен для нахождения потенциальной энергии как функции Q, так как

$$\hat{Q} \, | jm> = 2m \, | jm> \equiv Q \, | jm> .$$

Как известно,

$$2\hat{I}_x | jm> = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \, | j, m+1> + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \, | j, m-1> =$$

$$= \left(\sqrt{(j-m)(j+m+1)} \, e^{\frac{d}{dm}} + e^{-\frac{d}{dm}} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \right) | j, m> .$$

Переходя от m к собственным значениям оператора $\hat{Q}$ и полагая $j = \Omega/2$, получаем

$$2I_x | jm> = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)} \, e^{2\frac{d}{dQ}} + e^{-2\frac{d}{dQ}} \sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)} \right) | jm>,$$

и, следовательно,

$$\hat{H} = \Omega - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)} \, e^{2\frac{d}{dQ}} + e^{-2\frac{d}{dQ}} \sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)} \right) - \kappa Q^2 .$$

Чтобы отделить потенциальную энергию колебаний от кинетической, перепишем /16/ следующим образом:

$$\hat{H} = \Omega - \frac{1}{8} \left[\sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)} + \sqrt{(\Omega+Q)(\Omega-Q+2)} , e^{2\frac{d}{dQ}} + e^{-2\frac{d}{dQ}} \right]_+ -$$

$$-\frac{1}{8}\left[\sqrt{(\Omega-Q)(\Omega+Q+2)}+\sqrt{(\Omega+Q)(\Omega-Q+2)}\right]\left(e^{2\frac{d}{dQ}}-e^{-2\frac{d}{dQ}}\right)- \qquad /17/$$

$$-\kappa Q^2 .$$

Если ограничиться главными членами в разложении /17/ по $1/\Omega$ и сохранить степени d/dQ не выше второй, то

$$\hat{H} = \Omega - \sqrt{\Omega^2 - Q^2} - \left[\sqrt{\Omega^2 - Q^2}\,\frac{d^2}{dQ^2}\right] - \kappa Q^2 .$$

Таким образом, потенциальная энергия колебаний равна

$$V_Б(Q) = \Omega - \sqrt{\Omega^2 - Q^2} - \kappa Q^2 \equiv V_Б(Q) .$$

Получим теперь потенциальную энергию колебаний в приближении Хартри, что соответствует традиционному рассмотрению. В этом случае

$$\hat{H}_x = \hat{N} - 2\kappa\, Q\, \hat{Q} + \kappa\, Q^2 \equiv \hat{H}_x \qquad /18/$$

где Q - среднее значение оператора $\hat{Q}$ в основном состоянии системы. Мы пренебрегли членами $\sim(\hat{Q}-Q)^2$. Гамильтониан /18/ легко диагонализуется с помощью унитарного преобразования:

$$e^{a\hat{P}}\,\hat{N}\,e^{-a\hat{P}} = \Omega + \cos 2a\,(\hat{N}-\Omega) - \sin 2a\,\hat{Q}$$

$$e^{a\hat{P}}\,\hat{Q}\,e^{-a\hat{P}} = \cos 2a\,\hat{Q} + \sin 2a\,(\hat{N}-\Omega) .$$

При $\sin 2a = -\dfrac{2\kappa Q}{\sqrt{1+4\kappa^2 Q^2}}$ мы получаем:

$$\hat{H}_x = \Omega + \sqrt{1+4\kappa^2 Q^2}\,(\hat{N}-\Omega) + \kappa\,\hat{Q}^2 .$$

Для нижайшего по энергии состояния системы:

$$\langle \hat{H}_x \rangle = \Omega\left(1-\sqrt{1+4\kappa^2 Q^2}\right) + \kappa\, Q^2 \equiv V_x(Q) .$$

Сравним выражения $V_Б(Q)$ и $V_x(Q)$:

а/

$$\frac{dV_Б(Q)}{dQ} = 0 \quad \text{при} \quad Q = 0,\ \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}} ,$$

$$\frac{dV_x(Q)}{dQ} = 0 \quad \text{при} \quad Q = 0, \ \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}} \ ;$$

б/ $V_Б(0) = V_x(0) = 0$,

$$V_Б\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}}\right) = V_x\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}}\right) = \Omega - \kappa\left(\Omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2}\right) \ ;$$

в/

$$\left.\frac{d^2V_Б(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=0} = \frac{1}{\Omega} - 2\kappa \ , \qquad \left.\frac{d^2V_x(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=0} = 2\kappa\,\Omega\left(\frac{1}{\Omega} - 2\kappa\right) ,$$

$$\left.\frac{d^2V_Б(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}}} = 2\kappa\,(4\kappa^2\Omega^2 - 1) \ ,$$

$$\left.\frac{d^2V_x(Q)}{dQ^2}\right|_{Q=\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\kappa^2}}} = 2\frac{2\kappa\,(4\kappa^2\Omega^2 - 1)}{4\kappa^2\Omega^2} \ .$$

Таким образом, если положения стационарных точек и значения потенциальной энергии в этих точках для V и V_x совпадают, то величины $\frac{d^2V}{dQ^2}$ и $\frac{d^2V_x}{dQ^2}$ в стационарных точках различаются. Следовательно, при удалении от стационарных точек разность ($V\ (Q) - V_x(Q)$) возрастает, что и видно из *рис. 3*.

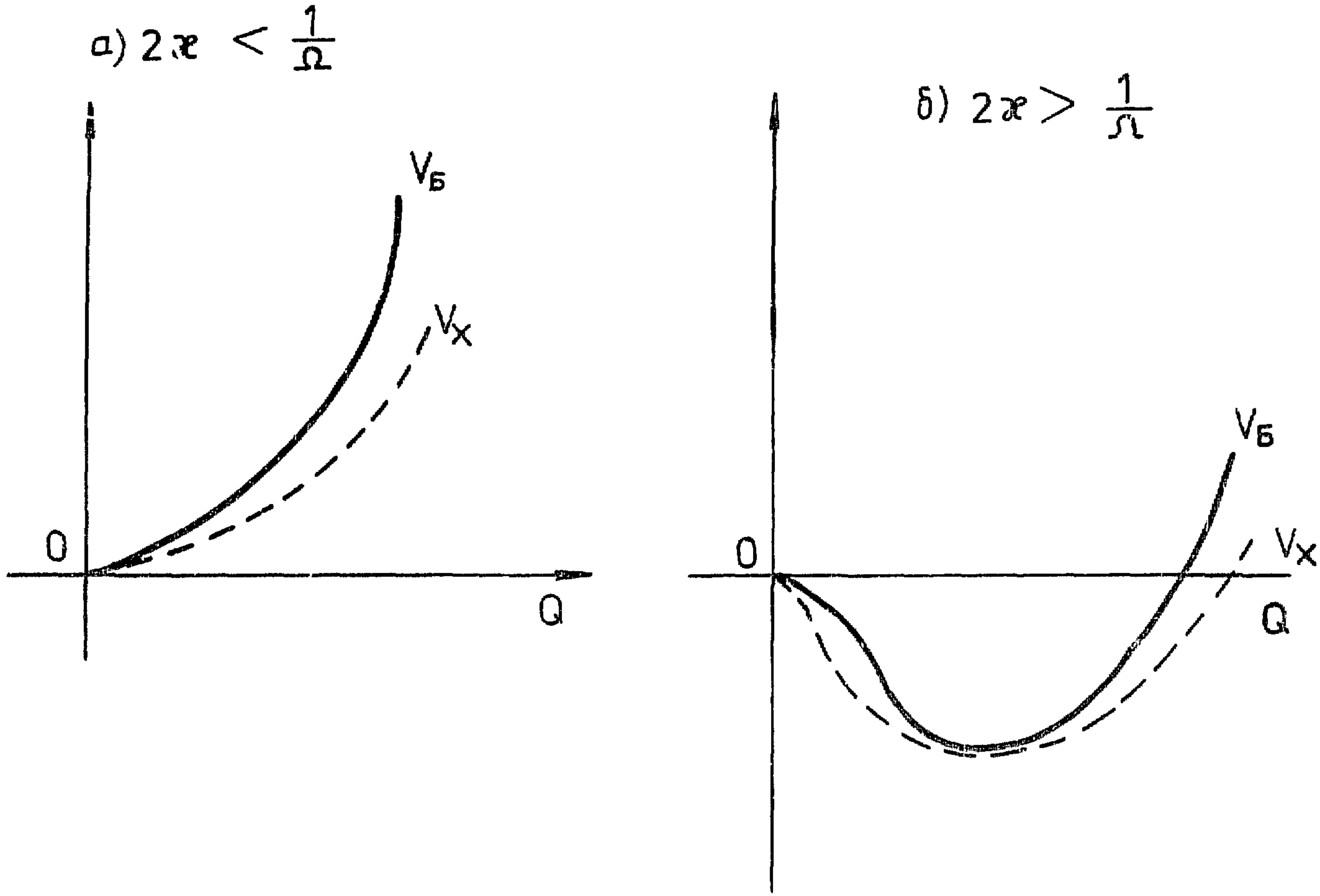

Рис. 3. Зависимость $V_Б$ *и* V_x *от* Q *а/* $2\kappa < 1/\Omega$, *б/* $2\kappa > 1/\Omega$.

Литература

1. Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янссен.Препринт ОИЯИ, Р4-7144, Дубна, 1973; ТМФ 20, 112, 1974.
2. T.Holstein, H.Primakoff. Phys.Rev., 58, 1098, 1940.
3. G.Baird and L.C.Biedenharn. J.Math.Phys., 4, 1449, 1963.
4. Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, В.Г.Картавенко, Д.Янсен. Препринт ОИЯИ, Р4-7223, Дубна, 1973; Препринт ОИЯИ, Р4-7533, Дубна, 1973.
5. A.Bohr. Kgl. Danske Vodensk. Selsk. Math. Fys. Medd., 26, nr. 14, 1952.
6. M.Harvey. In "Advances in Nuclear Physics", vol. I, Plenum Press, New York, 1968.
7. J.N.Eisenberg and W.Greiner. Nuclear Models, vol. I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел 8 июля 1974 года.