

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



C 36  
K-658

4/x-74  
P4 - 8068

3977/2-74

В.А.Копцик, И.Н.Коцев

К ТЕОРИИ И КЛАССИФИКАЦИИ ГРУПП  
ЦВЕТНОЙ СИММЕТРИИ .

II. W -СИММЕТРИЯ

**1974**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8068

В.А.Копцик, И.Н.Коцев

К ТЕОРИИ И КЛАССИФИКАЦИИ ГРУПП  
ЦВЕТНОЙ СИММЕТРИИ .

II. W -СИММЕТРИЯ

1. Общая постановка задачи цветной симметрии /1/ дана в первой части работы /2/. Там же указаны главные отличия между основными типами - P /3/, Q- /4-6/, и W-симметрии, изложена теория P-симметрии и приведены таблицы точечных кристаллографических групп этого типа. В этой части излагаются теоретико-групповые основы нового, значительно более широкого класса групп цветной симметрии - W-симметрии. В конкретной интерпретации все группы W-симметрии являются подгруппами своих старших групп - сплетений /7,8/  $P_2 G$  групп  $G$  (дискретных или непрерывных, действующих в геометрических пространствах  $\mathcal{R}$ ; с некоторыми группами нагрузок P (осуществляющих преобразования "цветов"  $f_k \in \mathcal{F}$ , приписанных точкам  $\vec{r}_i \in \mathcal{R}$ ).

2. Рассмотрим правильную систему цветных точек /2/, состоящую из упорядоченных пар  $(f_k, \vec{r}_i) = \vec{r}_i^{(k)} \in \mathcal{F}\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{R}$ , где  $\vec{r}_i \in \mathcal{R} = G \vec{r}_i$  рассматриваются как координаты эквивалентных точек в трехмерном пространстве, образующие орбиту  $\mathcal{R} = G \vec{r}_i$  классической кристаллографической группы  $G$  порядка  $n$ ;  $\{f_k\} = \mathcal{F}$  есть совокупность  $p = |\mathcal{F}|$  различных значений некоторой функции  $f(\vec{r})$  в точках  $\vec{r}_i \in G \vec{r}_i$  ( $f_k$  называются условно "цветами" точек).

Наибольший практический интерес представляет случай групп  $G_{n,t}^{t,p}$  (см. американское издание /1/), когда с каждой точкой  $\vec{r}_i \in \mathcal{R}$  связан один и только один цвет  $f_k \in \mathcal{F}$ , т.е.  $p \leq n$ . Все цветные группы  $G^{(p)}$ , описывающие симметрию такой системы, относятся к младшим по классификации /3/. В общем случае число точек цвета  $f_k$  равно  $\lambda_k$ , где  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) - любые положительные целые числа, удовлетворяющие условию  $\sum_k \lambda_k = n$ . Для перечисления всех возможных "раскрасок" системы из  $n$  точек удобно воспользоваться диаграммами Юнга /9/. В  $k$ -ой строке диаграммы, состоящей из  $\lambda_k$  клеток,  $k=1, \dots, p$ , записываются индексы  $i$  координат точек  $\vec{r}_i^{(k)}$  цвета  $f_k$ . Ввиду произвола в

нумерации строк всегда выбирается  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$   
 С каждым разбиением  $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$  числа  $n$  на положительные целые числа связана одна и только одна диаграмма Юнга. Число заведомо различных раскрасок не меньше числа диаграмм Юнга, а число этих диаграмм для данного  $n$  совпадает с числом неприводимых представлений симметрической группы  $S_n$  степени  $n$ . Каждую диаграмму Юнга из  $n$  клеток можно заполнить числами  $i=1, 2, \dots, n$   $n!$  способами. Очевидно, сохраняя абстрактную структуру цветной группы, перестановки чисел в каждой строке приводят к эквивалентным раскраскам, а одновременные перестановки всех чисел любых  $m_x$  строк одинаковой длины - к цветным полиморфным модификациям /1,2/ той же группы. Следовательно, каждой  $r$ -строчной диаграмме Юнга из  $n$  клеток соответствует хотя бы одна, но не более  $N_{[\lambda]} = n! / \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r! m_1! \dots m_s!$  различных раскрасок системы из  $n$  точек  $p \leq n$  цветами. Рассматривая систему из  $n$  цветных точек как орбиту некоторой цветной группы  $G^{(w)} \rightarrow G$ , можно заключить, что для каждой  $r$ -строчной диаграммы Юнга и любого выбора  $p$  значений цветов  $r$  в наиболее общем случае существует хотя бы одна, но не более  $N_{[\lambda]}^{(w)}$  различных (младших) групп  $G^{(w)}$ , изоморфных группе  $G$ .

В соответствии с данным в /2/ определением эквивалентности составных групп, две группы  $W$ -симметрии,  $G^{(w)}$  и  $\overline{G^{(w)}}$ , данного семейства будем считать различными только если они не являются сопряженными подгруппами сплетений  $P_2 G = W \otimes G$ , т.е.  $\overline{G^{(w)}} \neq g_i^{(w_i)} G^{(w)} (g_i^{(w_i)})^{-1}$ ,  $g_i^{(w_i)} \in P_2 G$ . Для  $r$ -цветных кристаллографических групп  $G^{(w)}$  выберем  $P = S_p$  (если цвета преобразуются подстановками из  $P \subseteq S_p$ ) или  $P = \infty \infty 1'$  (если нагрузки являются обобщенными ортогональными преобразованиями);  $G = E^+$  есть подгруппа собственных движений евклидовой группы. Очевидно, что в приведенной выше оценке максимальное число  $N_{[\lambda]}^{(w)}$  групп  $G^{(w)}$  заведомо завышено, т.к. не учтена их возможная эквивалентность на уровнях  $\Gamma \subseteq P_2 G$ . Однако, в таком широком понимании цветной симметрии, даже ми-

минимальное число групп  $G^{(w)}$  порядка  $n$  равно числу различных диаграмм Юнга, т.е. возрастает экспоненциально с  $n$ . При больших  $n$  число этих диаграмм приблизительно равно  $1/3! N(n) \approx e^{\pi\sqrt{2n}/3} / 4n\sqrt{3}$ . (Для точечной группы  $O_h = m\bar{3}m, |O_h| = 48$ , например,  $N(48) \approx 1,5 \cdot 10^5$ ).

Одним из удобных критериев для классификации групп  $W$ -симметрии является тип соответствующих им диаграмм Юнга. В общем случае  $G^{(w)} = G^{(w)}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_k$ . Среди огромного массива диаграмм выделяется относительно небольшое число "прямоугольных" диаграмм, имеющих структуру  $[\lambda^p] = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda_p]$ , где  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda = \frac{n}{p}$ . Группы  $W$ -симметрии, которые могут иметь классическую подгруппу  $H^{(c)}$  порядка  $|H^{(c)}| \leq \lambda$ , отличную от тривиальной  $H^{(c)} = 1$ , соответствуют только диаграммам типа  $[\lambda^p]$ . Во всех группах  $G^{(w)}_{[\lambda_1, \dots, \lambda_p]}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_k$ , всегда  $H^{(c)} = 1$  — см. рис. 5).

Группы  $G^{(w)}$ , соответствующие прямоугольным диаграммам  $[\lambda^p]$ , можно подразделить на три вида:

а) Группы с инвариантной классической подгруппой  $H^{(c)} \triangleleft G^{(w)}$ , которые естественно отнести к группам  $P$ -симметрии [2].

б) Группы  $G^{(w)}$  с тривиальной классической подгруппой  $H^{(c)} = 1$  или с  $H^{(c)} \triangleleft G^{(w)}$ , несводимые к  $P$ -симметрии. Возможность существования таких групп была указана впервые одним из авторов данной статьи (это группы  $G^{(w)}$  цветной псевдосимметрии в работах [1, 10]).

в) Группы  $W$ -симметрии с неинвариантной классической подгруппой  $H' \equiv H^{(c)} \subset G^{(w)}$ . В цветной  $W$ -симметрии эти группы пока наиболее изучены. В данной работе им посвящены пп. 4, 5.

3. Элементы  $g_i^{(w_i)} \in G^{(w)}$  цветных групп  $W$ -симметрии являются комбинированными преобразованиями  $g_i^{(w_i)} = w_i \cdot g_i = (w_i | g_i)$ , где  $g_i \in G \leftarrow G^{(w)}$  действует только на координаты  $\vec{r}_i$  цветных точек  $\vec{r}_i^{(f_k)} = (f_k, \vec{r}_i)$ , а нагрузки  $w_i \in W$  — только на цвет  $f_k \in \mathcal{F}$ . Однако, в отличие от

$P$ -симметрии, преобразования цвета  $f_x$  точки  $\vec{r}_i^{(f_x)}$  существенно зависят от того, в какой точке локализован этот цвет<sup>ж)</sup>. Один и тот же цвет  $f_x$  в двух разных точках,  $\vec{r}_i^{(f_x)}$  и  $\vec{r}_i^{(f_x)}$ , может по-разному преобразовываться нагрузкой  $w_j$  данного элемента  $g_j^{(w_j)} \in G^{(w)}$ . Нагрузки такого типа, очевидно, имеют более сложную структуру по сравнению с  $p_i \in P$  в  $P$ -симметрии /2/. Для описания этих нагрузок в /1,10/ были применены предложенные одним из авторов данной работы "позиционные подстановки". В общей теории  $W$ -симметрии нагрузки  $w_j$  элементов  $g_j^{(w_j)} \in G^{(w)}$  могут быть получены из "элементарных" нагрузок  $p_i \in P$  с помощью сплетений групп  $P$  и  $G$  /2,7/, где  $p_i$  - выбранные преобразования цветов (подстановки, ортогональные, аффинные и т.д.). Для конкретности выберем  $p_i \in P \subseteq S_p$ .

Напомним определение понятия сплетения (wreath product) групп  $P$  и  $G$  /7,8/. Пусть  $W = P^{g_1} \otimes \dots \otimes P^{g_n}$  - прямое произведение  $n$  изоморфных копий групп  $P$ , индексированных элементами группы  $G$  порядка  $n$  (или декартово произведение для бесконечных  $n$ ).  $W$  есть группа относительно покомпонентного умножения

$$\begin{aligned} w_i \otimes w_j &= (p_i^{g_1}, p_i^{g_2}, \dots, p_i^{g_n}) \otimes (p_j^{g_1}, p_j^{g_2}, \dots, p_j^{g_n}) = \\ &= (p_i^{g_1} p_j^{g_1}, p_i^{g_2} p_j^{g_2}, \dots, p_i^{g_n} p_j^{g_n}) = \\ &= (p_i^{g_1} p_j^{g_1}, p_i^{g_2} p_j^{g_2}, \dots, p_i^{g_n} p_j^{g_n}) = w_c \in W, \quad p_i^{g_n} p_j^{g_n} = p_c^{g_n} \in P. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все  $P^{g_i} = \{(e, e, \dots, p_i^{g_i}, \dots, e)\}$  изоморфны  $P = \{p_i\}$ ,  $p_i^{g_i} \in P$  и умножение компонент осуществляется по действующей в  $P$  групповой операции. Верхний индекс в  $p_i^{g_i}$  фиксирует позицию  $p_i \in P$  в  $w_i \in W$ , нижний - только принадлежность  $p_i^{g_i}$  к  $w_i$ , т.е.  $p_i^{g_i}$  и  $p_i^{g_j}$  могут быть различными  $p_i \in P$ .

<sup>ж)</sup> Это позволяет включить в  $W$ -симметрию неохватываемые теорией  $P$ -симметрии группы "комплексной симметрии" Биненстока-Эвальда /11/ и Вайнштейна-Звягина /12/, группы Витке-Гарридо /13/ и др.

Полупрямое произведение  $W \otimes G$  называется прямым сплетением групп  $P$  и  $G$  (обозначается  $P \otimes G$ ), если  $W = P \otimes P \otimes \dots \otimes P$  — прямое произведение групп  $P$ , или декартовым сплетением  $P \bar{\otimes} G$ , если  $W$  — декартово произведение. Конечные группы  $W$ -симметрии  $G^{(W)}$  являются подгруппами прямого сплетения

$$G^{(W)} \subseteq P \otimes G = (P^{\otimes 1} \otimes P^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes P^{\otimes n}) \otimes G = W \otimes G. \quad (2)$$

Элементы сплетения  $P \otimes G = W \otimes G$  записываются в виде

$$g_i^{(w_i)} = w_i g_i = \langle w_i | g_i \rangle = \langle p_i^{\otimes 1}, p_i^{\otimes 2}, \dots, p_i^{\otimes n}, \dots, p_i^{\otimes n} | g_i \rangle \quad (3)$$

и умножаются по закону (в разных обозначениях (3)):

$$g_i^{(w_i)} g_j^{(w_j)} = g_i g_j^{(w_i^{\otimes j} w_j)}, \quad (4a)$$

$$\langle w_i | g_i \rangle \langle w_j | g_j \rangle = \langle w_i^{\otimes j} w_j | g_i g_j \rangle, \quad (4b)$$

$$\langle p_i^{\otimes 1}, \dots, p_i^{\otimes n} | g_i \rangle \langle p_j^{\otimes 1}, \dots, p_j^{\otimes n} | g_j \rangle = \langle p_i^{\otimes 1} p_j^{\otimes 1}, \dots, p_i^{\otimes n} p_j^{\otimes n} | g_i g_j \rangle. \quad (4c)$$

Здесь автоморфизмы  $w_i^{\otimes j} = (\dots, p_i^{\otimes j}, \dots)$  определяется как левый сдвиг компонент  $p_i^{\otimes k}$  в  $w_i$ , т.е. в  $j$ -ой позиции преобразованного элемента  $w_i^{\otimes j}$  записывается компонента  $p_i^{\otimes j}$ , занимающая  $j$ -ую позицию в исходном  $w_i$ :

$$w_i^{\otimes j} = (p_i^{\otimes 1}, \dots, p_i^{\otimes j}, \dots, p_i^{\otimes n})^{\otimes j} = (p_i^{\otimes j}, \dots, p_i^{\otimes j}, \dots, p_i^{\otimes j}). \quad (5)$$

В группах  $P \otimes G$  элемент, обратный  $g_i^{(w_i)}$ , имеет вид

$$\{g_i^{(w_i)}\}^{-1} = g_i^{-1} \{ [w_i^{\otimes j}]^{-1} \}, \quad (6a)$$

$$\langle w_i | g_i \rangle^{-1} = \langle [w_i^{\otimes j}]^{-1} | g_i^{-1} \rangle. \quad (6b)$$

$$\langle p_i^{\otimes 1}, \dots, p_i^{\otimes n} | g_i \rangle^{-1} = \langle (p_i^{\otimes 1})^{-1}, \dots, (p_i^{\otimes n})^{-1} | g_i^{-1} \rangle, \quad (6c)$$

т.е. в  $(g_i^{(w_i)})^{-1}$  в  $j$ -ой позиции находится элемент  $(p_i^{\otimes j})^{-1}$ , обратный элементу  $p_i^{\otimes j}$ , занимающему в исходном  $g_i^{(w_i)}$   $j$ -ую позицию.

Действие элементов  $g_j^{(w_j)}$  цветной группы  $G^{(W)}$  на цветные точки  $\vec{r}_k^{(f_k)}$ , где  $\vec{r}_k = g_k \vec{r}_i \in \mathcal{R}$ , определяется равенством

$$g_j^{(w_j)} \vec{r}_k^{(f_k)} \equiv \langle p_j^{\otimes 1}, \dots, p_j^{\otimes n} | g_j \rangle (f_k, \vec{r}_i) = (p_j^{\otimes 1} f_k, g_j \vec{r}_i), \quad (7)$$

т.е. цветная нагрузка  $w_j$  действует на цвет  $f_k$  точки  $\vec{r}_k^{(f_k)}$ ,  $\vec{r}_k = g_k \vec{r}_i$ , компонентой  $p_j^{\otimes k}$  из  $j$ -ой позиции. На тот же цвет  $f_k$ , локализованный в точке  $\vec{r}_s = g_s \vec{r}_i \in \mathcal{R}$ , та же нагрузка  $w_j$  действует  $j$ -ой компонентой  $p_j^{\otimes s}$ , в общем случае отличной от  $p_j^{\otimes k}$ .

Сплетение  $P_2 G = W \otimes G$  содержит инвариантную подгруппу  $\overline{W} = \{ \langle w_i | i \rangle \} \rightarrow W$ . Разложение по подгруппе  $\overline{W}$  записывается в виде

$$P_2 G = \bigcup_{i=1}^n \langle p_i^{g_1}, \dots, p_i^{g_k}, \dots, p_i^{g_n} | g_i \rangle \overline{W}; \quad (8)$$

фактор-группа  $P_2 G$  по  $\overline{W}$  изоморфна  $G$ :

$$(P_2 G) / \overline{W} \leftrightarrow G. \quad (9)$$

Система представителей смежных классов в разложении (8) образует группу или группу по модулю  $/I/$ , изоморфную группе  $G$  (9). В первом случае это будет младшая группа  $W$ -симметрии  $G \xleftrightarrow{W} G$ , во втором - "цветная группа по модулю". Если в полученной таким образом группе во всех элементах  $p_i^{g_1} = p_i^{g_2} = \dots = p_i^{g_n} = p_i \in P$ , то закон умножения (4) сводится к закону группового умножения в  $P$ -симметрии  $/2/$ , т.е.  $P$ -симметрия может рассматриваться как частный случай  $W$ -симметрии.

4. Группы  $G^{(W)}$  с инвариантной классической подгруппой  $H' \subset G^{(W)}$ ,  $G \cap G^{(W)} = H'$ , порождаются только неабелевыми группами  $G \leftrightarrow G^{(W)}$ .

Для вывода групп этого типа и выяснения их структуры удобно для каждой  $G$  и  $H' \subset G$  составить "четырёхчленный символ"

$$G/N/H'/H, \quad G \supset N \supseteq H' \supset H. \quad (10)$$

Здесь  $H'$  - инвариантная в  $G$  подгруппа индекса  $\gamma = [G:H']$ ;  $N_G(H')$  - нормализатор подгруппы  $H'$  в  $G$ , т.е. максимальная подгруппа группы  $G$ , в которой  $H'$  инвариантна  $/7-9/$

$$H' \trianglelefteq N = \{ g_i | g_i \in G, g_i H' g_i^{-1} = H' \} \subset G. \quad (11)$$

Пересечение всех  $\gamma = [G:N]$  подгрупп  $H'_i = g_i H' g_i^{-1}$ , сопряженных с  $H'$  в  $G$  есть максимальная инвариантная подгруппа группы  $H'$  (и всех  $H'_i$ ), которая инвариантна также в  $G$ , т.е.

$$H = \bigcap_{g_i \in G} g_i H' g_i^{-1}, \quad H \triangleleft G, \quad H \triangleleft H', \quad H \triangleleft H'_i. \quad (12)$$

Из (8), (9) видно, что все младшие группы  $W$ -симметрии  $G \xleftrightarrow{W} G$  могут быть получены как системы представителей смежных классов в



разложения (8). При этом каждый 4-членный символ  $G/N/H/H$  определяет (абстрактную) структуру элементов  $g_i^{(w_i)} \in G^{(w)}$  (3) (независимо от конкретного вида преобразований  $p_i \in P$  в  $g_i^{(w_i)}$ ), а именно:

а) Все элементы  $g_j \in H' \subset G$  комбинируются только с единицей группы  $W$  и образуют максимальную классическую подгруппу  $H'$  группы  $G^{(w)}$  (обозначим ее тем же символом  $H' = G^{(w)} \cap G$ ):

$$H' \equiv H^{(1)} = \{ e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n} | g_j \in H' \subset G, e^{\beta_k} = e \in P \}. \quad (13)$$

б) Из инвариантности  $H'$  в  $N^{(w)} \leftrightarrow N = N_G(H')$  и  $H = \bigcap g_i H_i g_i^{-1}$  в  $G^{(w)}$ , т.е.

$$g_j^{(w_j)} H' = H' g_j^{(w_j)}, \quad \forall g_j^{(w_j)} \in N^{(w)} \leftrightarrow N, \quad H' \subset G^{(w)}, \quad N^{(w)} \subset G^{(w)}, \quad (14)$$

$$g_k^{(w_k)} H = H g_k^{(w_k)}, \quad \forall g_k^{(w_k)} \in G^{(w)}, \quad H \triangleleft G^{(w)}, \quad (15)$$

вытекает

$$\langle \dots, p_j^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = p_j^{\beta_k}, \dots | g_j \rangle, \quad \forall g_j \in N, \quad \forall p_j^{\beta_k} \in H' \triangleleft N, \quad \forall g_k \in G \quad (16)$$

$$\langle \dots, p_i^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = p_i^{\beta_k}, \dots | g_i \rangle, \quad \forall g_i \in G, \quad \forall p_i^{\beta_k} \in H \triangleleft G, \quad \forall g_k \in G \quad (17)$$

Следовательно, в любом элементе  $\langle p_i^{\beta_1}, \dots, p_i^{\beta_k}, \dots, p_i^{\beta_n} | g_i \rangle \in G^{(w)}$

число различных компонент  $p_i^{\beta_k} \in P$  не более  $[G:H]$ , а в элементах

$\langle \dots, p_i^{\beta_1}, \dots, p_i^{\beta_k}, \dots | g_i \rangle \in N^{(w)} \subset G^{(w)}$  - не более  $p = [G:H']$ . Более детальное рассмотрение,

с учетом транзитивности группы  $P$  на множестве  $p$  цветов  $\{z \in F$ , показывает, что множество всех  $p_i^{\beta_k} \in P$  в любом из элементов  $\langle \dots, p_i^{\beta_1}, \dots, p_i^{\beta_k}, \dots | g_i \rangle \in G^{(w)}$

разбивается на  $s = [H':H]$  различных совокупностей, по  $n/s$  одинаковых  $p_i$

в каждой из них. Исключение составляют элементы (16), принадлежавшие нормализатору  $N^{(w)}$  подгруппы  $H'$  и элементы подгруппы  $H_i = g_i^{(w_i)} H' (g_i^{(w_i)})^{-1}$ ,

где в каждом из них все  $p_j^{\beta_k}$  одинаковы, т.е.  $p_j^{\beta_1} = \dots = p_j^{\beta_n} = p_j^{\beta_k}$ . Таким образом, по своей структуре и типу групповой операции  $N^{(w)}$  и  $H_i^{(w)}$  относятся к группам  $P$ -симметрии. Нагрузки  $p_j^{\beta_k}$  в  $\langle \dots, p_i^{\beta_1}, \dots, p_i^{\beta_k}, \dots | g_i \rangle \in N^{(w)}$  и  $H_i^{(w)}$  изоморфны нагрузкам группы  $P$ -симметрии, рассмотренных в /2/, однако имеют

в  $k$  раз более высокую степень,  $k = p/[N:H']$  и  $k = p/[H':H]$ .

Полученный выше результат позволяет рассматривать группы

$G^{(w)} \leftrightarrow G$  как последовательные расширения /1/ классической группы  $H' = H^{(1)}$

до группы P-симметрии  $N_I^{(P)}$ , а  $N_I^{(P)} \cong N_I^{(w)}$  до  $G^{(w)}$ . В данной работе (для определенности) применяются нагрузки  $p_i \in P \subseteq S_P$ . В этом случае (см. /2/) возможны два типа групп P-симметрии - с регулярными,  $G_R^{(P)}$ , и нерегулярными,  $G_I^{(P)}$ , подстановками  $p_i \in P$ . Следовательно, возможны два типа расширения  $H' \trianglelefteq N_I^{(w)} \subset G^{(w)}$  и два типа групп  $G^{(w)} \leftrightarrow G$ :

$$G_R^{(w)} \supset N_R^{(w)} \supseteq H', \quad (N_R^{(w)} \cong N_R^{(P)}), \quad (18)$$

$$G_I^{(w)} \supset N_I^{(w)} \supseteq H', \quad (N_I^{(w)} \cong N_I^{(P)}). \quad (19)$$

В первом случае (18) максимальная классическая подгруппа  $H' \subset G^{(w)}$  инвариантна в регулярной  $N_R^{(w)}$ , а во втором (19) - в нерегулярной  $N_I^{(w)}$  подгруппе P-симметрии. Группа  $N_R^{(w)}$  однозначно задается двучленным символом  $N/H'$ ,  $H' \triangleleft N$ ,  $N_I^{(w)}$  - 3-членным символом  $N/H''/H'$ , где  $H'' \subset N$ ,  $H' \triangleleft N$ ,  $H' \cap H'' = H''^{-1}$  (см. /2/). Соответственно  $G_R^{(w)}$  задается 4-членным символом  $G/N/H'/H$ , а группы  $G_I^{(w)}$  - 5-членным символом  $G/N/H''/H'/H$ , где  $G \supset N \supset H'' \supset H' \supset H$ ,  $H \triangleleft G$ ,  $H' \triangleleft N$ .

5. В качестве примера рассмотрим группы  $G^{(w)} \leftrightarrow G$  с неизвариантной классической подгруппой (13), изоморфные кристаллографическим точечным группам  $G$ . Из 32 групп  $G$  неабелевы 16, а именно: 422, 4mm,  $\bar{4}2m$ , 4/mmm, 32, 3m,  $\bar{3}m$ , 622, 6mm,  $\bar{6}m2$ , 6/mmm, 23,  $m\bar{3}$ , 432,  $\bar{4}3m$ ,  $m\bar{3}m$ . Для каждой из них разбиваются все неизвариантные подгруппы  $H' \subset G$ , (по одной из класса неэквивалентных сопряженных подгрупп), их нормализаторы  $N$  (11), пересечения  $H$  (12), и составляются 4-членные (10) и 5-членные символы. Каждому такому символу, как было указано в п.4, соответствует определенная группа  $G_R^{(w)}$  или  $G_I^{(w)}$ ; их список сведен в таблицу на стр. 12-13.

Возможность существования цветных групп с неизвариантной классической подгруппой была указана в /13/, где для точечных групп  $G$  были перечислены 72 пары  $G, H'$ ,  $H' \subset G$ , соответствующие цветным группам. Полный вывод всех 73 групп типа  $G_R^{(w)}$  (18) был осуществ-

лен в /10/, где они были названы "группами Виттне-Гарридо",  $G_{WG}^{(P)}$ . Там же приведены стереографические проекции и список этих групп в "интернациональных" обозначениях (см. также американское издание /1/). В данной работе впервые показано, что группы  $G_{WG}^{(P)}$  относятся к  $W$ -симметрии, т.е. являются подгруппами сплетения  $P_2G$  и групповое умножение в них определяется законом (4). В результате проведенного нами теоретико-группового анализа, проверен и подтвержден список /10/ 73 групп типа  $G_R^{(w)} = G_{WG}^{(P)}$  (18) и показано, что существует еще один класс групп  $W$ -симметрии с неизменяющей классической подгруппой -  $G_I^{(w)}$  (19). Среди групп  $G^{(w)}$ , изоморфных кристаллографическим точечным группам, имеется только один представитель класса  $G_I^{(w)}$  - "12-цветная" кубическая группа с  $H' = m_2$  (см. в конце табл. I).

В таблице приведены полученные нами 4- и 5-членные символы групп  $G^{(w)} \leftrightarrow G$ . Штрихами различаются изоморфные, но неэквивалентные подгруппы  $H' \subset G$ . Взаимная ориентация  $H'$  и  $G$  легко определяется из приведенных рядом "интернациональных" символов групп  $G^{(w)}$ , заимствованных из /1, 10/. В последних генераторы без верхнего индекса выделяют классическую подгруппу  $H'$  (13), у генераторов подгруппы  $P$ -симметрии  $N^{(w)} \subset G^{(w)}$  и  $H'_i \leftrightarrow H'_i = g_i H'_i g_i^{-1}$  верхний индекс ( $n_j$ ) состоит из одной цифры, указывающей порядок нагрузки  $w_j$  элемента  $g_i^{(w_j)}$ . Специфические для групп  $W$ -симметрии генераторы (17) отличаются верхним индексом типа  $(n_j \pm)$  или  $(n_j \times m_j)$ , где  $n_j$  также задает порядок элемента  $w_j$ , (знаки  $\pm$  соответствуют  $\langle \dots, p_j, p_j^{-1}, \dots, 1g_j \rangle$ , а  $m_j$  - числу цветных подсистем в  $\mathcal{GR}$ ).

Удобный алгоритм построения всех  $\langle \dots, p_j^{q_k}, \dots, 1g_j \rangle \in G_R^{(w)}$ , где  $p_j^{q_k}$  - подстановка степени  $p$ , состоит в следующем. Пусть  $G_R^{(w)} = G/N/H'/H$  -  $p$ -цветная группа  $W$ -симметрии с неизменяющей классической подгруппой  $H'$  индекса  $p = [G:H']$  и подгруппой  $P$ -симметрии  $N_R^{(w)} \leftrightarrow N$  регулярного типа (18). Запишем разложение (по правым смежным классам) группы  $G$

Табл. I. Символы групп  $G_R^{(W)} = G_{WB}^{(P)}$  и  $G_{\Gamma}^{(W)}$  типа  $G_{3,0}^{1P}$

$N_{\Sigma}$	$G/N/H'/H$	$G_R^{(W)} \leftrightarrow G$	$N_{\Sigma}$	$G/N/H'/H$	$G_R^{(W)} \leftrightarrow G$
1	$D_4/D_2/C_2'/C_1$	$(4^{(4\pm)} 2 2^{(2\pm 2)})^{(4)}$	19	$D_{3h}/C_{2v}/C_2/C_1$	$(\bar{6}^{(6\pm)} m^{(2\pm 2)} 2)^{(6)}$
-	$C_{4v}/C_{2v}/C_2/C_1$	$(4^{(4\pm)} m m^{(2\pm 2)})^{(4)}$	20	$D_{3h}/C_{2v}/C_3/C_1$	$(6^{(6\pm)} m 2^{(2\pm 2)})^{(6)}$
3	$D_{3d}/D_2/C_2'/C_1$	$(\bar{4}^{(4\pm)} 2 m^{(2\pm 2)})^{(4)}$	21	$D_{6h}/D_{2h}/D_{2h}/C_{2h}$	$(\frac{6^{(3\pm)}}{m} \frac{2}{m} \frac{2^{(2\pm 3)}}{m^{(2\pm 3)}})^{(3)}$
4	$D_{2d}/C_{2v}/C_2/C_1$	$(\bar{4}^{(4\pm)} 2^{(2\pm 2)} m)^{(4)}$	22	$D_{6h}/D_{2h}/D_2/C_2$	$(\frac{6^{(3\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2}{m^{(2)}} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(6)}$
5	$D_{4h}/D_{2h}/C_{2v}'/C_2$	$(\frac{4^{(4\pm)}}{1\pm 2} \frac{2^{(2)}}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(4)}$	23	$D_{6h}/D_{2h}/C_{2v}'/C_2$	$(\frac{6^{(3\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2^{(2)}}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(6)}$
6	$D_{4h}/D_{2h}/C_2'/C_2$	$(\frac{4^{(4\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(4)}$	24	$D_{6h}/D_{2h}/C_{2v}'/C_3$	$(\frac{6^{(6\pm)}}{m} \frac{2^{(2)}}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(6)}$
7	$D_{4h}/D_{2h}/C_2'/C_1$	$(\frac{4^{(4\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2}{m^{(2)}} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(8)}$	25	$D_{6h}/D_{2h}/C_2'/C_2$	$(\frac{6^{(6\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(6)}$
8	$D_{4h}/D_{2h}/C_2'/C_1$	$(\frac{4^{(4\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2^{(2)}}{1\pm 2} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(8)}$	26	$D_{6h}/D_{2h}/C_2'/C_1$	$(\frac{6^{(6\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2}{m^{(2)}} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(12)}$
9	$D_3/C_2'/C_2'/C_1$	$(3^{(3\pm)} 2)^{(3)}$	27	$D_{6h}/D_{2h}/C_2'/C_1$	$(\frac{6^{(6\pm)}}{m^{(2)}} \frac{2^{(2)}}{m} \frac{2^{(2\pm 2)}}{m^{(2\pm 2)}})^{(12)}$
10	$C_{3v}/C_3/C_3/C_1$	$(3^{(3\pm)} m)^{(3)}$	28	$T/C_3/C_3/C_1$	$(2^{(2\pm 3)} 3)^{(4)}$
11	$D_{3d}/C_{2h}/C_{2h}/C_2$	$(\bar{3}^{(3\pm)} \frac{2}{m})^{(3)}$	29	$T/D_2/C_2/C_1$	$(2 3^{(3\pm 4)})^{(6)}$
12	$D_{3d}/C_{2h}/C_2/C_1$	$(\bar{3}^{(6\pm)} \frac{2}{m^{(2)}})^{(6)}$	30	$T_h/C_{3i}/C_{3i}/C_2$	$(\frac{2^{(2\pm 3)}}{m^{(2\pm 3)}} \bar{3})^{(4)}$
13	$D_{3d}/C_{2h}/C_3/C_1$	$(\bar{3}^{(6\pm)} \frac{2^{(2)}}{m})^{(6)}$	31	$T_h/D_{2h}/C_{2h}/C_2$	$(\frac{2}{m} \bar{3}^{(3\pm 4)})^{(6)}$
14	$C_{6v}/C_{2v}/C_{2v}'/C_2$	$(6^{(3\pm)} m m^{(2\pm 3)})^{(3)}$	32	$T_h/D_{2h}/C_{2v}'/C_1$	$(\frac{2}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6\pm 4)})^{(6)}$
15	$C_{6v}/C_{2v}/C_3/C_1$	$(6^{(6\pm)} m m^{(2\pm 2)})^{(6)}$	33	$T_h/C_{3i}/C_3/C_1$	$(\frac{2^{(2\pm 3)}}{m^{(2\pm 3)}} \bar{3}^{(2)})^{(8)}$
16	$D_6/D_2/D_2/C_2$	$(6^{(3\pm)} 2 2^{(2\pm 3)})^{(3)}$	34	$T_h/D_{2h}/C_2/C_1$	$(\frac{2}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6\pm 4)})^{(12)}$
17	$D_6/D_2/C_2'/C_1$	$(6^{(6\pm)} 2 2^{(2\pm 2)})^{(6)}$	35	$T_h/D_{2h}/C/C_1$	$(\frac{2^{(2)}}{m} \bar{3}^{(6\pm 4)})^{(12)}$
18	$D_{3h}/C_{2v}/C_{2v}'/C_3$	$(\bar{6}^{(3\pm)} m 2^{(2\pm 3)})^{(3)}$	36	$O/D_4/D_4/D_2$	$(4 3^{(3\pm)} 2)^{(3)}$

Табл. 1 (продолжение)

№	G/N <sub>1</sub> N <sub>1</sub> 'H	G <sub>R</sub> <sup>(W)</sup> ↔ G	№	G/N <sub>1</sub> N <sub>1</sub> 'H	G <sub>R</sub> <sup>(W)</sup> ↔ G
37	O/D <sub>3</sub> D <sub>3</sub> /C <sub>1</sub>	(4 <sup>(4+6)</sup> 32) <sup>(4)</sup>	56	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> D <sub>2k</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(3+8)} \frac{2}{m}$ ) <sup>(4)</sup>
38	O/D <sub>4</sub> /C <sub>4</sub> /C <sub>1</sub>	(43 <sup>(3+4)</sup> 2 <sup>(2)</sup> ) <sup>(6)</sup>	57	3 <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> D <sub>2k</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2}{m^{(2)}}$ ) <sup>(6)</sup>
39	O/D <sub>2</sub> '/D <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	(4 <sup>(2)</sup> 3 <sup>(3+8)</sup> 2) <sup>(6)</sup>	58	O <sub>k</sub> /D <sub>3k</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(4+3)}}{m^{(2+3)}} \bar{3} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(8)</sup>
40	O/D <sub>3</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>1</sub>	(4 <sup>(4+3)</sup> 32 <sup>(2)</sup> ) <sup>(8)</sup>	59	O <sub>k</sub> /D <sub>3k</sub> /D <sub>3</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(4+6)}}{m^{(2+3)}} \bar{3}^{(2)} \frac{2}{m^{(2)}}$ ) <sup>(8)</sup>
41	O/D <sub>4</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	(4 <sup>(2)</sup> 3 <sup>(3+4)</sup> 2 <sup>(2)</sup> ) <sup>(12)</sup>	60	O <sub>k</sub> /D <sub>3k</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(4+6)}}{m^{(2+3)}} \bar{3}^{(2)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(8)</sup>
42	O/D <sub>2</sub> '/C <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	(4 <sup>(4+3)</sup> 3 <sup>(3+2)</sup> 2) <sup>(12)</sup>	61	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>4</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>
43	T <sub>d</sub> /D <sub>2d</sub> /D <sub>2d</sub> /D <sub>2</sub>	( $\bar{4} 3^{(3+2)} 2$ ) <sup>(3)</sup>	62	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /S <sub>4</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>
44	T <sub>d</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4}^{(4+6)} 3 m$ ) <sup>(4)</sup>	63	O <sub>k</sub> /D <sub>2k</sub> /D <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>
45	T <sub>d</sub> /D <sub>2d</sub> /S <sub>4</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4} 3^{(3+4)} m^{(2)}$ ) <sup>(6)</sup>	64	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>
46	T <sub>d</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4}^{(2)} 3^{(3+4)} m$ ) <sup>(6)</sup>	65	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+8)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(12)</sup>
47	T <sub>d</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4}^{(4+3)} 3 m^{(2)}$ ) <sup>(8)</sup>	66	O <sub>k</sub> /D <sub>2k</sub> '/C <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4+1)}}{m} \bar{3}^{(6+8)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(12)</sup>
48	T <sub>d</sub> /D <sub>2d</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4}^{(2)} 3^{(3+4)} m^{(2)}$ ) <sup>(12)</sup>	67	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>2k</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m} \bar{3}^{(3+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>
49	T <sub>d</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>5</sub> /C <sub>1</sub>	( $\bar{4}^{(4+1)} 3^{(3+1)} m$ ) <sup>(12)</sup>	68	O <sub>k</sub> /D <sub>2k</sub> '/C <sub>2k</sub> '/C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(4+1)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(3+1)} \frac{2}{m}$ ) <sup>(12)</sup>
50	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> D <sub>4k</sub> /D <sub>2k</sub>	( $\frac{4}{m} \bar{3}^{(3+1)} \frac{2}{m}$ ) <sup>(3)</sup>	69	O <sub>k</sub> /D <sub>3k</sub> /C <sub>3</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4+3)}}{m^{(2+3)}} \bar{3}^{(2)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(16)</sup>
51	O <sub>k</sub> /D <sub>3k</sub> /D <sub>3k</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4^{(4+6)}}{m^{(2+3)}} \bar{3} \frac{2}{m}$ ) <sup>(4)</sup>	70	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(24)</sup>
52	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>4k</sub> /C <sub>k</sub>	( $\frac{4}{m} \bar{3}^{(3+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(6)</sup>	71	O <sub>k</sub> /D <sub>2k</sub> '/C <sub>2</sub> '/C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4+1)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+1)} \frac{2}{m^{(2)}}$ ) <sup>(24)</sup>
53	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>4</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(6)</sup>	72	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>5</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4+1)}}{m} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(24)</sup>
54	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /D <sub>4</sub> /D <sub>2</sub>	( $\frac{4}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2}{m^{(2)}}$ ) <sup>(6)</sup>	73	O <sub>k</sub> /D <sub>2k</sub> '/C <sub>5</sub> '/C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4+1)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+1)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(24)</sup>
55	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /D <sub>2d</sub> /D <sub>2</sub>	( $\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}} \bar{3}^{(6+4)} \frac{2^{(2)}}{m}$ ) <sup>(6)</sup>	74	O <sub>k</sub> /D <sub>4k</sub> /C <sub>2</sub> /C <sub>1</sub>	( $\frac{4^{(4)}}{m} \bar{3}^{(3+4)} \frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}$ ) <sup>(12)</sup>

по  $H$ , а затем  $H'$  по  $H$ :

$$G = \bigcup_{k=1}^p H' g_k = \bigcup_{k=1}^p \bigcup_{\alpha=1}^s H h_{\alpha} g_k = \bigcup_{\alpha \alpha' k} h_{\alpha} h_{\alpha'} g_k = \bigcup_{\alpha \alpha' k} g_{\alpha \alpha' k}. \quad (20)$$

Построим регулярное представление группы  $G$  подстановками тройных индексов элементов  $g_{\alpha \alpha' k} = h_{\alpha} h_{\alpha'} g_k \in G$ :

$$g_{\beta \beta' j} \leftrightarrow \pi(g_{\beta \beta' j}) = \begin{pmatrix} & g_{\alpha \alpha' k} & \\ g_{\beta \beta' j} & g_{\alpha \alpha' k} & \\ & & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \alpha \alpha' k & \dots \\ \dots & \beta \beta' j & \dots \end{pmatrix} \in \Pi \leftrightarrow G. \quad (21)$$

В первой строке подстановки (21) сгруппируем элементы  $g_{\alpha \alpha' k}, \dots, g_{\alpha \alpha' p}$  для каждой пары индексов  $\alpha \alpha'$  и выпишем отдельно подстановки их третьих индексов (представителей смежных классов  $g_k \in H'_k$  в (20)):

$$P_{\beta \beta' j}^{\alpha \alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & k & \\ & & & p \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad s = [H':H]. \quad (22)$$

Эти подстановки (степени  $p$ ) не зависят от  $\alpha = 1, 2, \dots, |H'|$  и совпадают со всеми  $n/s$  компонентами  $P_{\beta \beta' j}^{g_{\alpha \alpha' k}}$  в  $\langle \dots, P_{\beta \beta' j}^{g_{\alpha \alpha' k}}, \dots | g_{\beta \beta' j} \rangle \in G_R^{(w)}$ , т.е.

$$P_{\beta \beta' j}^{\alpha'} = P_{\beta \beta' j}^{g_{1 \alpha' 1}} = P_{\beta \beta' j}^{g_{1 \alpha' 2}} = \dots = P_{\beta \beta' j}^{g_{1 \alpha' p}} = P_{\beta \beta' j}^{g_{2 \alpha' 1}} = \dots = P_{\beta \beta' j}^{g_{\alpha \alpha' k}} = \dots = P_{\beta \beta' j}^{g_{\alpha \alpha' p}}, \quad \alpha' = 1, \dots, s.$$

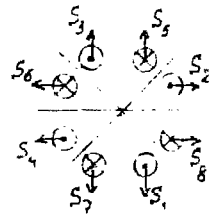
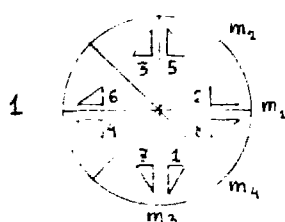
Если в (21)  $g_{\beta \beta' j} \notin N, H'_i$ , все  $P_{\beta \beta' j}^{\alpha \alpha' k}, \alpha \alpha' k$  различны. Для  $g_{\beta \beta' j} \in N$  подстановки (22) одинаковы для всех  $\alpha \alpha'$  (см. пункт 4).

Группы типа  $G_I^{(w)} = G/N/H'/H'/H$  (19) строятся подобным же образом, однако "цветность" группы  $P' = [G:H']$  и вместо (20) применяется разложение

$$G = \bigcup_{t=1}^l N g_t = \bigcup_{t=1}^l \bigcup_{\ell=1}^m n_{\ell} H'' g_t = \bigcup_{\ell \alpha \alpha' t} H' n_{\ell} h_{\alpha} g_t = \bigcup_{\alpha \alpha' \ell \alpha' t} g_{\alpha \alpha' \ell \alpha' t}, \quad (23)$$

где подстановкам "цветов" типа (22) соответствуют пары индексов  $\ell t$ .

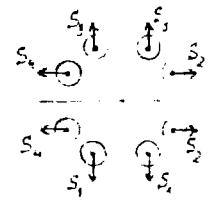
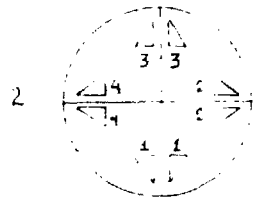
6. Выходящие за рамки  $P$ -симметрии "комплексные группы пространства Фурье" /II, I2/ являются конкретным примером применения групп  $W$ -симметрии в физике. Система "цветных точек" состоит из узлов  $\vec{K}_i = (k_i, k_i, l_i)$  "обратной" решетки, нагруженных комплексными значениями Фурье-компонент  $F(\vec{K}_i)$  функции  $F(\vec{r})$ , заданной на "прямой" решетке кристалла. При  $|F(\vec{K}_i)| = \text{const}$  "цветам" точек соответствуют фазовые множители  $\exp i\varphi(\vec{K}_i)$  комплексных величин  $F(\vec{K}_i) = |F(\vec{K}_i)| \exp i\varphi(\vec{K}_i)$ . В этом случае  $g_j^{(w)} = \langle \dots, P_j^{g_{\ell}} | g_j \rangle \in G^{(w)}$ , где  $g_j$  действуют только на коор-



$$G_R^{(P)} = C_{4v}/C_1(D_4)_8, H^{(1)} = 1$$

$$G_N^{(P)} = (4^{(4)} m^{(2)} m^{(2)} m^{(2)}) \subset (D_4)_8 \text{ @ } 4 \text{ mm}$$

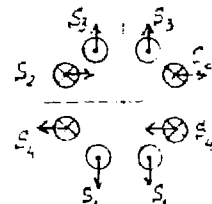
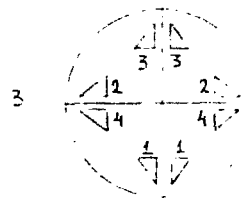
$$G = 4 \text{ mm}, P = (I_4)_8 = S_8$$



$$G_I^{(P)} = C_{4v}/C_2(C_2(D_4)_2)_{12}, H^{(1)} = 1$$

$$G_{WB}^{(P)} = (4^{(4)} m^{(2)} m^{(2)} m^{(2)}) \subset (D_4)_2 \text{ @ } 4 \text{ mm}$$

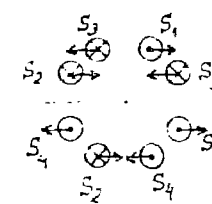
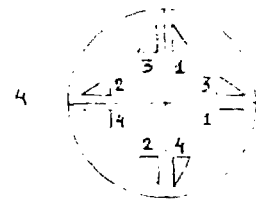
$$G = 4 \text{ mm}, P = (D_4)_2 = S_4$$



$$G_R^{(W)} = C_{4v}/C_{2v}/C_2/C_1, H^{(1)} = m_2$$

$$G_{WB}^{(W)} = (4^{(4)} m^{(2)} m^{(2)} m^{(2)}) \subset (C_4)_4 \text{ @ } 4 \text{ mm}$$

$$G = 4 \text{ mm}, P = (C_4)_4 = S_4$$

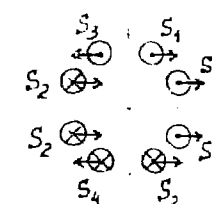
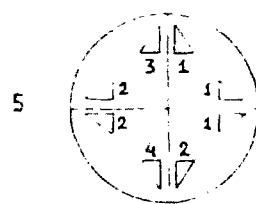


$$G \leftrightarrow G_{[LAP]}^{(W)} = P_2 G, H^{(1)} = 1$$

$$G_{[24]}^{(4)} = G_{q5}^{(4)} = (4 \text{ mm})_{[24]}^{(4)} \subset (D_2)_4 \text{ @ } 2 \text{ mm}$$

$$\{P_1 = (1)(2)(3)(4), P_2 = (2)(34)\} = (C_2)_4 = S_4$$

$$\{P_3 = (13)(24), P_4 = (14)(23)\}$$



$$G \leftrightarrow G_{[2]}^{(W)} \subset P_2 G, H^{(1)} = 1$$

$$G_{[3^2 1^2]}^{(4)} = G_{q5}^{(4)} = (4 \text{ mm})_{[3^2 1^2]}^{(4)} \subset (D_2)_4 \text{ @ } 2 \text{ mm}$$

$$\{P_1 = (1)(2)(3)(4), P_2 = (12)(34)\} = (D_2)_4 = S_4$$

$$\{P_3 = (13)(24), P_4 = (14)(23)\}$$

а б

Рис. I-5. "Цветная" (а) и "магнитная" (б) интерпретации групп  $W$ -симметрии различных типов. Цифры у треугольников обозначают "цвета", стрелки - аксиальные векторы  $S_i$  с компонентами  $S_z > 0$  ( $\odot$ ) и  $S_z < 0$  ( $\otimes$ ).

гати  $\vec{K}_p$  точек обратной решетки, а зависящее от  $\vec{K}_p$  изменение  $\xi(\vec{K}_p)$  фазы  $\varphi(\vec{K}_p)$  в каждой точке  $\vec{K}_p = g_p \vec{K}$ , осуществляется соответствующей  $g_p$ -ой компонентой  $p$ -ой нагрузки  $w_j$  элемента  $g_j, j \in G^{(w)}$ .

7. Для описания симметрии стационарных магнитных ("спиновых") конфигураций в магнитоупорядоченных кристаллах /14/, наряду с шубниковскими /1/ применялись группы так называемой "конфигурационной симметрии" /14-16/, а также "спиновые" или "обобщенные магнитные" группы /17-20/. Все эти группы являются лишь различными конкретными интерпретациями групп P-симметрии /2/, причем группы "конфигурационной" симметрии соответствуют классическим подгруппам (типа (13)) цветных групп. Как было показано в /4-6/, для описания магнитной симметрии наиболее удобны группы Q-симметрии, однако адекватное описание "спиновых структур" возможно также в рамках W-симметрии. В этом случае  $f(\vec{r}) = \vec{S}(\vec{r})$ ,  $\vec{S} = \{\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_p\}$ ,  $p \leq n$ , где  $f_j = \vec{S}_j$  - различные значения векторной функции  $\vec{S}(\vec{r})$ , определенной в точках равновесных положений магнитных атомов. На рисунках 1+5 показана часть элементарной ячейки кристалла с симметрией  $P4mm = C_{4v}^1$ . Начало координат выбрано в узле с точечной симметрией  $G = 4mm$ , а магнитные атомы занимают точки "общего" положения, т.е.  $R = G\vec{r} = \{\vec{r}, \frac{1}{2}\vec{r}, \frac{1}{2}\vec{r}, \frac{1}{2}\vec{r}, m_1\vec{r}, m_2\vec{r}, m_3\vec{r}, m_4\vec{r}\}$ . Различным спиновым структурам (рис. 1б-5б) соответствует различные системы "цветных точек"  $\{\vec{S}_i, \vec{r}_i\}$  (рис. 1а-5а, цифры у треугольников обозначают "номера цветов"), которые могут быть описаны цветными группами P- и W-симметрии. Символы этих групп приведены рядом. Для сравнения отдельно выписаны символы "одноцветных" (или "классических") подгрупп, соответствующие группам "конфигурационной симметрии" этих структур.



## ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Шубников, В.А.Копцик. Симметрия в науке и искусстве. "Наука", М., 1972. A.V.Shubnikov, V.A.Kopchik. Symmetry in Science, Art and Nature. Plenum-Press, N.Y., 1974.
2. В.А.Копцик, И.Н.Коцев. Сообщения ОИЯИ, Р4-7513, Кюна, 1974.
3. А.М.Баморзаев. Кристаллография, 12, 819 (1967).
4. В.А.Копцик, И.Н.Коцев, Э.-Н.М.Кужукеев. Сообщения ОИЯИ, Р4-7513 и Р4-7514, Дубна, 1973.
5. В.А.Копцик, И.Н.Коцев, Э.-Н.М.Кужукеев. Труды Международной конференции по магнетизму МКМ-73 (август 1973 г.). "Наука", М., 1974, том III, стр. 474.
6. И.Н.Коцев, В.А.Копцик. Вторая национальная конференция молодых физиков, апрель 1974, София. Тезисы, стр. 56.
7. А.Г.Куров. Теория групп. "Наука", М., 1967.
8. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков. Основы теории групп. "Наука", М., 1972.
9. I.S.Lomont. Applications of Finite Groups. N.Y., 1959.
10. В.А.Копцик, Э.-Н.М.Кужукеев. Кристаллография, 17, 705 (1972).
11. A. Bienenstock, P. Ewald. Acta Cryst., 15, 1253 (1962).
12. Б.К.Вайнштейн, Б.Б.Звягин. Кристаллография, 8, 147 (1963).
13. O.Wittke, J.Garrido. Bul. Soc. franç. Min. Cryst., 82, 223 (1959).
14. Ю.А.Изюмов, Р.П.Озеров. Магнитная нейтронография, "Наука", М., 1966.
15. G. Shirane. Acta Cryst., 12, 262 (1959).
16. C.Wilkinson, E.J.Lisher. Acta Cryst., A29, 453 (1973).
17. В.Е.Найп. ФММ, 14, 315 (1962); Изв. АН СССР, с.физ., 27, 1496 (1963).
18. A.Kitz. Phys.status solidi, 10, 455 (1965).
19. W.Brinkman, R.J.Elliott. Proc.Roy.Soc., A294, 343 (1966).
20. D.V.L'vvin. Acta Cryst., A29, 651 (1973).

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 июля 1974 года.