СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 8067

В.А.Копцик, И.Н.Коцев

К ТЕОРИИ И КЛАССИФИКАЦИИ ГРУПП ЦВЕТНОЙ СИММЕТРИИ.

I. Р -СИММЕТРИЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 8067

В.А.Копцик, И.Н.Коцев

К ТЕОРИИ И КЛАССИФИКАЦИИ ГРУПП ЦВЕТНОЙ СИММЕТРИИ.

I. **P** -СИММЕТРИЯ

I. Теория обобщенных (составных) групп, иначе называемых цветными, тесно связанная с теориями расширении и индуцированных представлений групп, находит широкое приложение в математике и физике. Этот метод является мощным средством конструирования новых групп и новых представлений, с помощью которых производится учет свойств симметрии составных (геометро-физических) объектов (см. например, [1,2]).

По самому общему определению, составная группа PG есть множество бинарных элементов (конечное или бесконечное)

$$PG = \{ p_1 g_1, p_2 g_2, \dots, p_i g_i, \dots \}, \tag{1}$$

в котором введена групповая операция и выполняются все групповые аксиомы. Способы введения групповой операции на множестве (I) обсуждаются у А.Г.Куроша [1] (стр. 484–488). Каждый из этих способов задает специфическую конструкцию PG-групп.

Оставляя в стороне их рассмотрение, остановимся на наиболее важном для приложений случае, определив впервые цветные группы как подгруппы сплетений двух групп [3]:

$$G^{(w)} = WG \subseteq P \wr G = (P \otimes P \otimes \dots \otimes P) \otimes G \tag{2}$$

В силу теоремы Калужнина и Краснера (см. [1], стр.482) конструкция (2) охватывает все до сих пор рассматривавшиеся случаи цветной симметрии: так называемые группы Q-симметрии [4-6]

$$G^{(q)} = QG \subseteq Q \otimes G \qquad (\text{где } Q \text{ замещает } P), \tag{3}$$

группы Р-симметрии Заморзаева [7,8]

$$G^{(P)} = PG \subseteq P \otimes G \tag{4}$$

и не сводящиеся к случаям (3), (4) группы Виттке-Гарридо [9], комплексной симметрии Биненстока-Эвальда [10] и Вайнштейна-Звягина [11], а также все другие случаи, объединенные в работе[12] под общим именем цветной псевдосимметрии.

Группы PG-типа (4) по сравнению с другими наиболее полно изучены, однако лишь недавно была построена их общая теория /7,8/, и для кристаллографических цветных групп предложена их первая классификация /13/. Настоящая работа ставит себе целью построение более общей теории - теории групп W-симметрии (2), разработку принципов их классификации и, в качестве примера, подробное рассмотрение кристаллографических цветных групп P- и W-типа. Теории W-групп посвящена вторая часть статьи /3/. В настоящей первой части излагаются основы теории Р-симметрии и предлагается более разработанная классификационная схема.

2. Для каждого из указанных выше типов составных групп (2)-(4), следуя А.М.Заморзаеву /7,8/, будем считать, что все подгруппы $G^{(w)} \subseteq P \wr G$ (или $G^{(q)} \subseteq Q \circledcirc G, G^{(p)} \subseteq P \circledcirc G$) принадлежат одному "семейству групп W-симметрии" (Q- и Р-симметрии, соответственно), порождаемому группами G и Р (или G и Q). Назовем группы $\tilde{G}^{(w)} = P \wr G$, $\tilde{G}^{(q)} = Q \circledcirc G$, $\tilde{G}^{(p)} = P \circledcirc G$ "старшими группами данного семейства", а их подгруппы, выделяемые по изоморфизмам $G^{(w)} \leftrightarrow G$, $G^{(q)} \leftrightarrow G$, $G^{(p)} \leftrightarrow G$ - "младшими" группами. Остальные группы семейства (с некоторыми модификациями) будем относить к "средним" группам. Условимся называть входящие в (2)-(4) группы G группами основы, а $P, Q, W = P \otimes P \otimes \ldots \otimes P$ - группами нагрузок для основы G. (Заметим однако, что множества нагрузок $\{w_i\} \subseteq W$, $\{q_i\} \subseteq Q$, $\{p_i\} \subseteq P$ в младших и средних группах $G^{(w)} = WG$, $G^{(q)} = QG$, $G^{(p)} = PG$ могут быть не только группами, но и так называемыми группами по модулю /2/).

До сих пор не делалось никаких предположений о конкретной природе элементов групп G, P и Q, т.е. они рассматривались как абстрактные группы. Соответствующие им составные группы, абстрактные по обоим сомножителям в (2)-(4), можно назвать "абстрактно-абстрактными" группами W-, Q- или Р-симметрии. В случае конкретизации одного или обоих сомножителей в (2)-(4), можно различать "абстрактно-конкретные", "конкретно-абстрактные" и "конкретно-конкретные" составные группы. Более детальную классификацию составных групп целесообразно проводить на том или ином конкретном уровне, определяя их эквивалентность в рамках преобразований автоморфизмов - как внутренних, так и внешних для данного семейства, но ограниченных фиксированной надгруппой $\Gamma=\{\gamma_i\}$.

Будем считать (по определению) две группы $G^{(a)}$ и $\overline{G^{(a)}}$ эквивалентными (точнее, Г-эквивалентными, эквивалентными на уровне Г), если они являются сопряженными подгруппами некоторой старшей группы $\Gamma=\{\gamma_i\}$ данного типа P, Q-, W-симметрии, т.е. если

$$\overline{G^{(a)}} = \gamma\, G^{(a)} \gamma^{-1} \quad , \ \gamma \in \Gamma \, , \ a = p, q, w \, . \tag{5}$$

Например, среди федоровских групп, являющихся дискретными подгруппами евклидовой группы $\mathcal{E}$, неэквивалентны 219 на уровне $\Gamma=\mathcal{E}$ и 230 - - на уровне $\Gamma=\mathcal{E}^+$ ($\mathcal{E}^+$ - подгруппа собственных движений в $\mathcal{E}$).

В дальнейшем, в качестве групп основы G в (2)-(4) всегда берутся конкретные кристаллографические группы - 32 точечных и 230 пространственных, а "Г-эквивалентность" составных групп (если особо не оговорено) определяется на уровне

$$\Gamma^{(w)} = P \,\tilde{\circ}\, \mathcal{E}^+ \, , \ \Gamma^{(q)} = Q \circledS \mathcal{E}^+ , \ \Gamma^{(p)} = P \otimes \mathcal{E}^+ , \tag{6}$$

где Р и Q - абстрактные или конкретные группы. (В последнем случае возможна некоторая детализация уровней эквивалентности - например, выделение диморфных и полиморфных модификаций цветных групп, и т.д. /2,I4/).

3. Группы цветной Р- и W-симметрии являются группами автоморфизмов правильных систем цветных точек, определяемых следующим образом. В трехмерном геометрическом пространстве задана система из n

симметрически эквивалентных точек (звезда векторов $\{\vec{r}_i\}$), образующих полную орбиту $\mathcal{R}=G\vec{r}_1$, группы G порядка $|G|=n$ (n - конечное или бесконечное):

$$\mathcal{R}=G\vec{r}_1=\{\vec{r}_i \mid \vec{r}_i=g_i\vec{r}_1,\ g_i\in G\}. \qquad (7)$$

Каждое значение $f(\vec{r})$ некоторой заданной на орбите $\mathcal{R}$ функции (включая $f(\vec{r})=0$) назовем "цветом" точки $\vec{r}_i$, а упорядоченные пары $[f(\vec{r}_i),\vec{r}_i]=\vec{r}_i^{(f_k)}$ - цветными точками в "геометрофизическом" (или цветном) пространстве. Пусть

$$\mathcal{F}=\{f_k \mid f_k=f(\vec{r}_i),\ \vec{r}_i\in G\vec{r}_1\} \qquad (8)$$

есть множество всех различных значений f_k функции $f(\vec{r})$ мощности $|\mathcal{F}|=p$, а $P=\{p_k\}$ - некоторая транзитивная на этом множестве группа (т.е. $p_i f_k=f_j\in\mathcal{F}$ для каждого $p_i\in P$ и $f_k\in\mathcal{F}$; к тому же для любой пары $f_k,f_j\in\mathcal{F}$ существует такое преобразование $p_i\in P$, что $f_j=p_i f_k$). Всегда существует хотя бы одна такая группа - симметрическая группа S_p степени p порядка $p!$, состоящая из всех возможных подстановок $p_i=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k & \dots & p\\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_p\end{pmatrix}$ индексов "цветов" $f_k\in\mathcal{F}$. В различных конкретных случаях P может быть группой соответствующим образом выбранных операторов, например ортогональных или аффинных преобразований, и т.д., для которых $\mathcal{F}$ есть одна из орбит. В общем случае P - абстрактная группа. Для определенности (исходя из теоремы Кэли) здесь будем пользоваться группами подстановок индексов цветов $f_k\in\mathcal{F}$.

Комбинированные элементы $g_j^{(p_\ell)}=p_\ell g_j=(p_\ell,g_j)$ групп P- и W-симметрии, в отличие от Q-симметрии /4-6/, осуществляют преобразования цветных точек $(f_k,\vec{r}_i)$, где элементы основы $g_j\in G$ действуют только на $\vec{r}_i\in G\vec{r}_1$, а нагрузки $p_\ell\in P$ - только на $f_k\in\mathcal{F}$. При этом, в P-симметрии преобразования цветов нагрузками $p_\ell\in P$ одинаковы для всех точек $\vec{r}_i$, которым приписан цвет f_k, а в W-симметрии /3/ они существенно зависят от локализации данного цвета в системе $\{\vec{r}_i^{(f_k)}\}$.

В структуре групп $G^{(P)}$ это отличие проявляется в том, что их максимальная классическая подгруппа

$$H^{(1)} = G^{(P)} \cap G = \{ h_j^{(1)} \mid h_j^{(1)} = h_j^{(P)}, h_j \in H, p_1 = e \in P \} \qquad (9)$$

(т.е. совокупность всех элементов группы $G^{(P)}$, сохраняющих неизменными все цвета $f_K \in \mathcal{F}$) в группах Р-симметрии всегда инвариантна, $H^{(1)} \triangleleft G^{(P)}$, а в W-симметрии – неинвариантна, $H' \subset G^{(W)}$ (за исключением тривиальной $H^{(1)} = 1$).

4. Рассмотрим сначала группы $G^{(P)}$ цветной Р-симметрии. Групповое умножение в $G^{(P)} \subseteq P \otimes G$ производится по закону прямого произведения групп

$$g_j^{(p_\ell)} g_i^{(p_k)} = (p_\ell, g_j) \otimes (p_k, g_i) = (p_\ell p_k, g_j g_i) = g_j g_i^{(p_\ell p_k)} = g_m^{(p_s)} \qquad (10)$$

Элементы $g_j^{(p_\ell)} \in G^{(P)}$ действуют на $\vec{r}_i^{(f_k)}$ следующим образом:

$$g_j^{(p_\ell)} \vec{r}_i^{(f_k)} = (p_\ell, g_j)(f_k, \vec{r}_i) = (p_\ell f_k, g_j \vec{r}_i) = g_j \vec{r}_i^{(p_\ell f_k)} \qquad (11)$$

Если функция $f(\vec{r})$ в любой точке $\vec{r}_i \in \mathcal{R}$ принимает все p различных значений $f_k \in \mathcal{F}$, то система цветных точек $\{\vec{r}_i^{(f_k)}\}$ принадлежит декартовому произведению $\mathcal{F} \times \mathcal{R}$ и ее симметрия задается старшей p-цветной группой $\widetilde{G^{(P)}} = S_p \otimes G$.

В большинстве практически интересных случаев $f(\vec{r})$ - однозначная функция на $\mathcal{R}$, т.е. с каждой точкой $\vec{r}_i \in \mathcal{R}$ связан один и только один цвет $f_k \in \mathcal{F}$. В этом случае $p \leq n$, а совокупность n цветных точек $r_i^{(f_k)}$ принадлежит некоторому подмножеству $\mathcal{F}\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{R}$. Ее симметрия задается младшими группами $G^{(P)}$, изоморфными G , т.е. $G^{(P)} \leftrightarrow G$. Общий случай произвольной системы $\mathcal{F}\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{R}$ описывается группами W-симметрии /3/. Рассматриваемые здесь группы Р-симметрии накладывают жесткие ограничения на способы "раскраски" точек $\vec{r}_i^{(f_k)} \in \mathcal{F}\mathcal{R}$, т.е. на возможные значения любой функции $f(\vec{r})$, заданной на симметрически эквивалентной системе точек $G\vec{r}_1 = \mathcal{R}$. Во-первых, число точек $\vec{r}_i^{(f_k)}$ каждого цвета $f_k \in \mathcal{F}$ одинаково и равно порядку максимальной классической подгруппы $H^{(1)} \lhd G^{(P)}$, инвариантной в $G^{(P)}$. Во-вторых, одинаковый "цвет" $f_k \in \mathcal{F}$ имеют все те и только те точки $\vec{r}_k \in \mathcal{R}$, которые составляют подмножество орбиты $\mathcal{R}$, порожденное некоторым смежным классом $g_k H$ группы G по инвариантной подгруппе $H \lhd G$, совпадающей с максимальной классической подгруппой $H^{(1)} \lhd G^{(P)}$. Инвариантность классической подгруппы $H^{(1)}$ в $G^{(P)}$ следует с необходимостью из определений группового умножения (10), действия (11) элементов $g_i^{(p_i)}$ групп Р-симметрии на точки $\vec{r}_i^{(l_\alpha)}$ и требования однозначности "раскраски" цветной системы точек $\mathcal{F}\mathcal{R}$.

Из основной теоремы Р-симметрии /7/ следует, что совокупность нагрузок Р в младших группах $G^{(P)}$ образует группу, изоморфную фактор-группе $G^{(P)}/H^{(1)} \leftrightarrow G/H$. Нагрузки присоединены к элементам основы $g_i \in G$ по гомоморфизму $G \to G/H \leftrightarrow P$. Таким образом, задача вывода всех младших групп $G^{(P)}$, изоморфных заданной классической группе G, может быть разбита на два этапа: а) разыскание всех неэквивалентных инвариантных подгрупп $H \lhd G$, перечисление соответствующих фактор-групп, G/H, установление естественных гомоморфизмов $\varepsilon: G \to G/H$ и изоморфизмов $G/H \leftrightarrow P$, где Р - абстрактная группа; б) реализация всех неэквивалентных точных представлений фактор-группы G/H или абстрактной группы $P \leftrightarrow G/H$ группами заданного типа преобразований. На первом этапе получаются конкретно-абстрактные, на втором - конкретно-конкретные составные группы (см. п.2).

Всем элементам $g_{k\alpha} = g_k h_\alpha \in g_k H$ смежных классов $g_k H$ в разложении $\bigcup g_k H \leftrightarrow G^{(P)}$ приписывается нагрузка $p_k = \mu(g_k H)$, где

$$\varphi: G \to P,\ \varphi = \mu \cdot \varepsilon,\ \varepsilon: G \to G/H,\ \mu: G/H \leftrightarrow P,\ \dots G^{(P)} = H \lhd G,\ G \leftrightarrow G^{(P)} \quad (12)$$

Для 32 кристаллографических точечных групп первый этап осуществлялся разными методами (см.). В этом случае все G и G/H изоморфны 18 абстрактным группам порядка $n = 1, [illegible], 3, 4, [illegible], 8, 12, 16, 24, 48$

(табл. I). Установлением изоморфизмов μ фактор-группы G/H на соответствующие абстрактные группы P, получается I7I кристаллографическая (конкретно-абстрактная) точечная группа P-симметрии $G_{3,0}^{1,P}$ /2/. Из них 32 одноцветные совпадают с классическими, 58 двуцветных соответствуют шубниковским. Остальные – 8I группа $G^{(P)}$ для числа цветов p=3, ..., 48 (см. табл. I8 в /2/) – приведены в табл. 2. Эти группы играют роль базисных для младших точечных групп P-симметрии, т.к. из них, могут быть получены все возможные интерпретации точечных групп P-симметрии путем установки изоморфизмов абстрактной группы P с различными конкретными группами преобразований цветов. Так как любое преобразование цветов $f_k \in \mathcal{F}$ может быть интерпретировано как подстановка их индексов, целесообразно найти все неэквивалентные точные представления I8 абстрактных групп P транзитивными группами подстановок степени p (Подобная задача решалась в работе /I3/ с целью классификации групп P-симметрии).

По теореме Кэли /I/ любая группа P порядка $|P|=p$ изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_p степени p. Таких подгрупп в S_p может быть несколько, но среди них всегда имеется одна регулярная группа подстановок степени $p=|P|$, которую обозначим символом $(P)_p \subseteq S_p$, $(P)_p \leftrightarrow P$. Регулярные группы являются единственными точными представлениями абелевых групп транзитивными группами подстановок. Для неабелевых групп P, однако, кроме регулярных $(P)_p \subseteq S_p$, существуют и нерегулярные изоморфные им транзитивные группы подстановок степени $p' < p = |P|$. Точные представления группы P (нерегулярными) транзитивными группами подстановок степени p' моделируются подстановками

$$(p_j) = \begin{pmatrix} \cdots & p_k P' & \cdots \\ \cdots & p_j p_k P' & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & k & \cdots \\ \cdots & j_k & \cdots \end{pmatrix} \in (P, P')_{p',m} \leftrightarrow P \qquad (I3)$$

левых смежных классов $p_k P'$ группы P по неинвариантной подгруппе $P' \subset P$

индекса $p'=[P:P']$ при левом сдвиге, если, и только если, единственный общий элемент для всех сопряженных с P' в P подгрупп $P'_i = p_i P' p_i^{-1} \subset P$ есть единица группы P, т.е. $\bigcap_{p_i \in P} p_i P' p_i^{-1} = e$ (см. /15/ §5 и /16/). Для $P' = e$, подстановки (13) образуют регулярное представление $(P)_p \equiv (P,e)_p$ степени $p = |P|$. Рассмотрим структуру этих групп подстановок. В регулярной группе $(P)_p \leftrightarrow P$ степень p всегда равна порядку группы $|P|$ и все ее элементы $p_i \in (P)_p$ состоят из подстановок p чисел, разбиваемых на независимые циклы одинаковой длины, равной порядку $|p_i|$ элемента p_i, $p_i^{|p_i|} = e$.
В группах $(P,P')_{p',m}$ подстановки, соответствующие элементам неинвариантной подгруппы $P' \subset P$ и сопряженных с ней подгрупп $P'_i = p_i P' p_i^{-1}$ нерегулярны: состоят из независимых циклов разной длины и содержат, по крайней мере, $m \geqslant 1$ единичных циклов (т.е. сохраняют неизменными хотя бы $m \geqslant 1$ из всех p чисел). Число $m = [N_P(P'):P']$ равно индексу (неинвариантной в P) подгруппы P' в ее нормализаторе $N_P(P')$, $P' \trianglelefteq N_P(P') \subset P$. Единичным циклам в подстановках $p_i \in P' \subset P$ отвечают номера тех m смежных классов $p_k P'$ в (13), которые составляют нормализатор $N_P(P') = \bigcup_{k=1}^{m} p_k P' \subset P$. Номера m смежных классов $p_k P' \in N_P(P')$ в группе $(P,P')_{p',m}$ выделяются еще тем, что они преобразуются одинаковым образом во всех элементах p_ℓ данного смежного класса $p_\ell P' \in P$. В любом элементе каждой из $r = [P:N_P(P')]$ сопряженных с P' подгрупп $P'_i = p_i P' p_i^{-1}$ также имеются хотя бы $m \geqslant 1$ единичных циклов. Один из них в каждом $p_\ell \in P'_i = p_i P' p_i^{-1}$ есть цикл (i), где i соответствует номеру смежного класса $p_i P' \notin N_P(P')$, содержащего сопрягающий элемент $p_i \in p_i P'$. Поэтому целесообразно указать в обозначении нерегулярной транзитивной группы подстановок $(P,P')_{p',m}$ символы изоморфной ей абстрактной группы P и неинвариантной подгруппы P', степень $p' = [P:P']$ группы, и число $m = [N_P(P'):P']$ "особых" индексов.

Все транзитивные группы подстановок для 18 абстрактных точечных групп, изоморфных 32 кристаллографическим группам, приведены в табл. I (см. также /13/). С помощью (12) и изоморфизма $\mu: P \leftrightarrow (P)_p$ из 81 базисной (конкретно-абстрактной) точечной группы Р-симметрии ($p \geq 3$) получается 81 регулярная цветная группа $G_R^{(p)}$ (эти группы названы в /2/ "нормальными", $G_N^{(p)}$). Изоморфизм $\mu: P \leftrightarrow (P,P')_{p',m}$ (табл. I) приводит к 73 нерегулярным точечным группам Р-симметрии $G_I^{(p')}$. (В /2,12/ они названы группами Ван-дер-Вардена-Буркхарта, $G_{WB}^{(p)}$, т.к. были получены методом, указанным этими авторами /16/).

Изоморфизм $P \leftrightarrow G'$ 18 абстрактных групп с 115 (из 122) точечными группами Хееша-Шубникова $G_{3,0}^{1,2}$, установленный в /20, табл. 7/, позволяет с помощью (12) вывести все "обобщенные магнитные" /17/ или "спиновые" /18-19/ точечные группы Р-симметрии из 58 G' и 81 $G^{(p)}$ базисных групп, приведенных в таблицах 15 и 18 в работе /2/.

Каждому гомоморфизму $G \to P$ соответствует только одна регулярная группа Р-симметрии. Для обозначения групп типа $G_R^{(p)}$ можно использовать "двучленные символы" – краткие или полные: G/H; G/H (P) (табл. 2). Число групп $(P,P')_{p',m}$, изоморфных G/H, может быть больше единицы (см. табл.I), а некоторые $(P,P')_{p',m}$ могут быть по-разному "ориентированы" относительно G. Для однозначного задания нерегулярных групп $G_I^{(p')}$ Р-симметрии удобно использовать "трехчленные символы" /2,12/ краткие $G/H'/H$ или полные $G/H'/H$ $(P,P')_{p',m}$. Символы $G/H'/H$ для 50 из 73 групп $G_I^{(p')}$ приведены в /13/. В табл. 3 приводятся полные трехчленные символы для всех 73 $G_I^{(p')}$-групп, вместе с интернациональными символами этих групп /2,12/

Трехчленный символ $G/H'/H$ однозначно задает нерегулярную группу $G_I^{(p')}$ и содержит следующую информацию о структуре цветной группы:

а) $G \longleftrightarrow G_I^{(p')}$; (I от слова Irregular))

б) $H \leftrightarrow H^{(1)} \triangleleft G_I^{(p')}$, $H \triangleleft G$, $H \triangleleft H'$;

в) $H = Ker\, \varphi$, ($\varphi: G \to P$, $\varphi: H' \to P'$, $P' \subset P \leftrightarrow (P,P')_{p',m}$);

г) $H' \longleftrightarrow H_i^{(p')} \subset G_I^{(p')}$, $H' \subset G$, $[G:H'] = p'$;

д) $G/H \leftrightarrow P$, $H'/H \leftrightarrow P'$, $G/H \leftrightarrow (P,P')_{p',m}$.

В полном символе добавлена информация о структуре нерегулярной транзитивной группы подстановок $(P,P')_{p',m} \leftrightarrow G/H$; $p' = [P \cdot P'] = [G \cdot H']$, $m = [N_G(H') \cdot H']$.

В интернациональных символах /2,12/ регулярных групп $G_R^{(p)} = G_N^{(p)}$ (табл.2) верхним индексом у каждого из генераторов $g_i^{(p_i)} \in G_R^{(p)}$ группы указан порядок нагрузки p_i, совпадающий для регулярных подстановок с длиной составляющих ее циклов. Индекс над скобками указывает степень группы подстановок $(P)_p$ –"цветность" группы $G_R^{(p)}$, совпадающую в данном случае с индексом максимальной классической подгруппы $H^{(1)} \triangleleft G_R^{(p)}$. Так как все 73 $G_I^{(p')}$ могут быть получены из 32 регулярных групп $G_R^{(p)}$, номера которых подчеркнуты в табл.2, заменой $(P)_p$ на $(P,P')_{p',m}$, их интернациональные символы / 2/ (табл.3) отличаются от символов групп $G_R^{(p)}$ с той же классической подгруппой, $G_I^{(p')} \triangleright H^{(1)} \triangleleft G_R^{(p)}$, только следующим: а) общая "цветность" $p' < p$, где $p' = [G \cdot H']$; б) у генераторов $g_j^{(p_j)} \in G_I^{(p')}$, нагрузкой которых служит нерегулярная подстановка, добавлен второй верхний индекс, обозначающий число сохраняемых этим элементом "цветов" (число единичных циклов нерегулярной подстановки p_j). Этот индекс равен нулю в элементах $g_k^{(p_k)}$, не принадлежащих $H'^{(p)}$ или сопряженным ей подгруппам. (первый индекс по-прежнему указывает порядок подстановки и одинаков в $G_I^{(p')}$ и $G_R^{(p)}$).

5. В работе /13/ в других обозначениях предложена классификация групп Р-симметрии – по каждой из 45 групп подстановок 18 $(P)_p$ и 27 $(P,P')_{p',m}$. В табл. I указано число всех точечных, $G_{3,0}^{1,p}$, и выведенных до сих пор /8,12/ пространственных групп $G_3^{1,p}$ Р-симметрии каждого такого типа.

В заключение авторы выражают благодарность Ж.-Н.М.Кужукееву за полезные обсуждения и А.М.Заморзаеву за предоставление работы/13/.

ЛИТЕРАТУРА

I. А.Г.Курош. Теория групп. "Наука" , М., 1967.

2. А.В.Шубников, В.А.Копцик. Симметрия в науке и искусстве. "Наука", М., 1972. A.V.Shubnikov,V.A.Koptsik. Symmetry in Science, Art and Nature. Plenum-Press, N.Y.,1974.

3. В.А.Копцик, И.Н.Коцев. Сообщения ОИЯИ, Р4-8068, Дубна, 1974.

4. В.А.Копцик, И.Н.Коцев, Ж.-Н.М.Кужукеев. Сообщения ОИЯИ, Р4-7513, Р4-7514, Дубна, 1973.

5. В.А.Копцик, И.Н.Коцев, Ж.-Н.М.Кужукеев. Труды Международной конференции по магнетизму МКМ-73 (Москва,август 1973). "Наука",М. 1974, том 3, стр.474.

6. В.А.Копцик, И.Н.Коцев. II Национальная конференция молодых физиков,(София, апрель 1974), Тезисы, стр. 53.

7. А.М.Заморзаев. Кристаллография, 12, 819 (1967).

8. А.М.Заморзаев. Кристаллография, 14, 195 (1969)

9. O.Wittke,J.Garrido.Bul.Soc.franç.Min.Crist.,82,223 (1959).

10. A.Bienenstock,P.Ewald. Acta Crist.,15,1253 (1962).

11. Б.К.Вайнштейн, Б.Б.Звягин. Кристаллография, 8, 147 (1963).

12. В.А.Копцик, Ж.-Н.М.Кужукеев. Кристаллография, 17, 705(1972)

13. А.М.Заморзаев, И.С.Гуцул, А.П.Лунгу. "К теории и классификации квазисимметрий". В сб. "Исследования по дискретной геометрии", под ред. А.М.Заморзаева. Изд. "Штиинца", Кишинев, 1974, стр.3.

14. D.Harker. Preprint R.P.M., Buffalo, N.Y.,1974.

15. М.Холл. Теория групп. ИЛ, М., 1962.

16. B.L.van der Waerden,J.Burckhardt.Z.Krist.,115,231 (1961).

17. В.Е.Найш. ФММ, 14, 315 (1962); Изв. АН СССР, с.физ., 27, 1497 (1963)

18. A.Kitz. Phis.status solidi, 10,455 (1965).

19. D.B.Litvin. Acta Crist.,A29, 651 (1973).

20. В.А.Копцик. Шубниковские группы. Изд-во МГУ, Москва, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июля 1974 года.

Табл. 1. $(P)_p$ и $(P,P')_{p',m}$ представления абстрактных групп P

$P \leftrightarrow \frac{G}{H}$	$(P)_p$ $(P,P')_{p',m}$	число $G^{1,P}_{3,0}$	число $G^{1,P}_{3}$	$P \leftrightarrow \frac{G}{H}$	$(P)_p$ $(P,P')_{p',m}$	число $G^{1,P}_{3,0}$	$P \leftrightarrow \frac{G}{H}$	$(P)_p$ $(P,P')_{p',m}$	число $G^{1,P}_{3,0}$
C_1	$(C_1)_1=S_1$	32	230	D_6	$(D_6)_{12}$	8		$(O,C_3)_{8,2}$	3
C_2	$(C_2)_2=S_2$	58	1191		$(D_6,C_2')_{6,2}$	12		$(O,C_4)_{6,2}$	3
C_3	$(C_3)_3=A_3$	7	111	D_{6h}	$(D_{6h})_{24}$	1		$(O,D_2')_{6,2}$	3
C_4	$(C_4)_4$	4	327		$(D_{6h},C_2')_{12,4}$	2		$(O,D_3)_{4,1}=S_4$	3
C_6	$(C_6)_6$	7	379	T	$(T)_{12}$	2	O_h	$(O_h)_{48}$	1
C_{4h}	$(C_{4h})_8$	1			$(T,C_2)_{6,2}$	2		$(O_h,C_2)_{24,8}$	2
C_{6h}	$(C_{6h})_{12}$	1			$(T,C_3)_{4,1}=A_4$	2		$(O_h,C_s)_{24,8}$	1
D_2	$(D_2)_4$	26	1843	T_h	$(T_h)_{24}$	1		$(O_h,C_s')_{24,4}$	1
D_{2h}	$(D_{2h})_8$	3			$(T_h,C_2)_{12,4}$	1		$(O_h,C_3)_{16,4}$	1
D_3	$(D_3)_6$	10	282		$(T_h,C_s)_{12,4}$	1		$(O_h,C_4)_{12,4}$	2
	$(D_3,C_2')_{3,1}=S_3$	10			$(T_h,C_3)_{8,2}$	1		$(O_h,C_{2v})_{12,4}$	1
D_4	$(D_4)_8$	5			$(T_h,C_{2v})_{6,2}$	1		$(O_h,C_{2v}')_{12,4}$	1
	$(D_4,C_2')_{4,2}$	6		O	$(O)_{24}$	3		$(O_h,C_{2v}'')_{12,2}$	2
D_{4h}	$(D_{4h})_{16}$	1			$(O,C_2)_{12,4}$	3		$(O_h,D_3)_{8,2}$	2
	$(D_{4h},C_2')_{8,2}$	2			$(O,C_2')_{12,2}$	3		$(O_h,C_{4v})_{6,2}$	2

Табл. 2. Символы цветных групп $G_R^{(P)}=G_N^{(P)}$ типа $G^{1,P}_{3,0}$

№	G/H $(P)_p$	$G_R^{(P)}\leftrightarrow G$	№	G/H $(P)_p$	$G_R^{(P)}\leftrightarrow G$	№	G/H $(P)_p$	$G_R^{(P)}\leftrightarrow G$
1	$C_{2h}/C_1\ (D_2)_4$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	5	$D_{2h}/C_i\ (D_2)_4$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	9	$S_4/C_1\ (C_4)_4$	$(\bar{4}^{(4)})^{(4)}$
2	$D_2/C_1\ (D_2)_4$	$(2^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$	6	$D_{2h}/C_2\ (D_2)_4$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	10	$D_4/C_1\ (D_4)_8$	$(4^{(4)}2^{(2)}2^{(2)})^{(8)}$
3	$C_{2v}/C_1\ (D_2)_4$	$(m^{(2)}m^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$	7	$D_{2h}/C_s\ (D_2)_4$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m}\right)^{(4)}$	11	$D_4/C_2\ (D_2)_4$	$(4^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$
4	$D_{2h}/C_1(D_{2h})_8$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	8	$C_4/C_1\ (C_4)_4$	$(4^{(4)})^{(4)}$	12	$C_{4h}/C_1\ (C_{4h})_8$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$

Табл. 2 (продолжение)

№	$G/H\ (P)_p$	$G_R^{(p)} \leftrightarrow G$	№	$G/H\ (P)_p$	$G_R^{(p)} \leftrightarrow G$	№	$G/H\ (P)_p$	$G_R^{(p)} \leftrightarrow G$
13	$C_{4h}/C_i\ (C_4)_4$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	36	$D_{3d}/C_3\ (D_2)_4$	$\left(\bar{3}^{(2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	59	$D_{6h}/C_s\ (D_6)_{12}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
14	$C_{4h}/C_2\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	37	$C_6/C_1\ (C_6)_6$	$(6^{(6)})^{(6)}$	60	$D_{6h}/C_{2h}\ (D_3)_6$	$\left(\frac{6^{(3)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
15	$C_{4h}/C_s\ (C_4)_4$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m}\right)^{(4)}$	38	$C_6/C_2\ (C_3)_3$	$(6^{(3)})^{(3)}$	61	$D_{6h}/C_3\ (D_{2h})_8$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$
16	$C_{4v}/C_1\ (D_4)_8$	$(4^{(4)}m^{(2)}m^{(2)})^{(8)}$	39	$C_{3h}/C_1\ (C_6)_6$	$(\bar{6}^{(6)})^{(6)}$	62	$D_{6h}/D_3\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
17	$C_{4v}/C_2\ (D_2)_4$	$(4^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$	40	$C_{3h}/C_s\ (C_3)$	$(\bar{6}^{(3)})^{(3)}$	63	$D_{6h}/C_{3v}\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
18	$D_{2d}/C_1\ (D_4)_8$	$(\bar{4}^{(4)}2^{(2)}m^{(2)})^{(8)}$	41	$C_{6h}/C_1\ (C_{6h})_{12}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$	64	$D_{6h}/C_6\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
19	$D_{2d}/C_2\ (D_2)_4$	$(\bar{4}^{(2)}2^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$	42	$C_{6h}/C_i\ (C_6)_6$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	65	$D_{6h}/C_{3i}\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
20	$D_{4h}/C_1\ (D_{4h})_{16}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(16)}$	43	$C_{6h}/C_2\ (C_6)_6$	$\left(\frac{6^{(3)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	66	$D_{6h}/C_{3h}\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$
21	$D_{4h}/C_i\ (D_4)_8$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	44	$C_{6h}/C_s\ (C_6)_6$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m}\right)^{(6)}$	67	$T/C_1\ (T)_{12}$	$(2^{(4)}3$ [illegible]
22	$D_{4h}/C_2\ (D_{2h})_8$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	45	$C_{6h}/C_3\ (D_2)_4$	$\left(\frac{6^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	68	$T/D_2\ (C_3)_3$	$(2\ 3^{(3)})^{(3)}$
23	$D_{4h}/C_s\ (D_4)_8$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	46	$C_{6h}/C_{2h}\ (C_3)_3$	$\left(\frac{6^{(3)}}{m}\right)^{(3)}$	69	$O/C_1\ (O)_{24}$	$(4^{(4)}3^{(3)}2$ [illegible]
24	$D_{4h}/C_4\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	47	$D_6/C_1\ (D_6)_{12}$	$(6^{(6)}2^{(2)}2^{(2)})^{(12)}$	70	$O/D_2\ (D_3)_6$	$(4^{(2)}3^{(3)}2$ [illegible] $)^{(6)}$
25	$D_{4h}/S_4\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	48	$D_6/C_2\ (D_3)_6$	$(6^{(3)}2^{(2)}2^{(2)})^{(6)}$	71	$T_d/C_1\ (O)_{24}$	$(\bar{4}^{(4)}3^{(3)}m^{(2)})^{(24)}$
26	$D_{4h}/D_2\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(4)}}\frac{2}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	49	$D_6/C_3\ (D_2)_4$	$(6^{(2)}2^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$	72	$T_d/D_2\ (D_3)_6$	$(\bar{4}^{(2)}3^{(3)}m^{(2)})^{(6)}$
27	$D_{4h}/C_{4h}\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	50	$C_{6v}/C_1\ (D_6)_{12}$	$(6^{(6)}m^{(2)}m^{(2)})^{(12)}$	73	$T_h/C_1\ (T_h)_{24}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(24)}$
28	$D_{4h}/C_{2v}\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	51	$C_{6v}/C_2\ (D_3)_6$	$(6^{(3)}m^{(2)}m^{(2)})^{(6)}$	74	$T_h/C_i\ (T)_{12}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3)}\right)^{(12)}$
29	$C_3/C_1\ (C_3)_3$	$(3^{(3)})^{(3)}$	52	$C_{6v}/C_3\ (D_2)_4$	$(6^{(2)}m^{(2)}m^{(2)})^{(4)}$	75	$T_h/D_2\ (C_6)_6$	$\left(\frac{2}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(6)}$
30	$C_{3i}/C_1\ (C_6)_6$	$(\bar{3}^{(6)})^{(6)}$	53	$D_{3h}/C_1\ (D_6)_{12}$	$(\bar{6}^{(6)}m^{(2)}2^{(2)})^{(12)}$	76	$T_h/D_{2h}\ (C_3)_3$	$\left(\frac{2}{m}\bar{3}^{(3)}\right)^{(3)}$
31	$C_{3i}/C_i\ (C_3)_3$	$(\bar{3}^{(3)})^{(3)}$	54	$D_{3h}/C_s\ (D_3)_6$	$(\bar{6}^{(3)}m^{(2)}2^{(2)})^{(6)}$	77	$O_h/C_1\ (O_h)_{48}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(48)}$
32	$D_3/C_1\ (D_3)_6$	$(3^{(3)}2^{(2)})^{(6)}$	55	$D_{3h}/C_3\ (D_2)_4$	$(\bar{6}^{(2)}m^{(2)}2^{(2)})^{(4)}$	78	$O_h/C_i\ (O)_{24}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}3^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$
33	$C_{3v}/C_1\ (D_3)_6$	$(3^{(3)}m^{(2)})^{(6)}$	56	$D_{6h}/C_1\ (D_{6h})_{24}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$	79	$O_h/D_2\ (D_6)_{12}$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
34	$D_{3d}/C_1\ (D_6)_{12}$	$\left(\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$	57	$D_{6h}/C_i\ (D_6)_{12}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$	80	$O_h/D_{2h}\ (D_3)_6$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
35	$D_{3d}/C_i\ (D_3)_6$	$\left(\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	58	$D_{6h}/C_2\ (D_6)_{12}$	$\left(\frac{6^{(3)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$	81	$O_h/T\ (D_2)_4$	$\left(\frac{4^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$

Табл. 3. Символы цветных групп $G_I^{(P)} = G_{wB}^{(P)}$ типа $G_{3,0}^{\frac{1}{\cdot},P}$.

№	$G/H'/H\ (P,P')_{p',m}$	$G_I^{(P)} \leftrightarrow G$	№	$G/H'/H\ (P,P')_{p',m}$	$G_I^{(P')} \leftrightarrow G$
1	$D_4/[illegible]/C_1\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$(4^{(4)}2^{(2,2)}2^{(2)})^{(4)}$	19	$D_{3h}/C_2'/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$(\bar{6}^{(6)}m^{(2)}2^{(2,2)})^{(6)}$
2	$C_{4v}/C_s/C_1\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$(4^{(4)}m^{(2,2)}2^{(2)})^{(4)}$	20	$D_{3h}/C_s'/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$(\bar{6}^{(6)}m^{(2,2)}2^{(2)})^{(6)}$
3	$D_{2d}/[illegible]/C_1\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$(\bar{4}^{(4)}2^{(2,2)}m^{(2)})^{(4)}$	21	$D_{6h}/D_{2h}/C_{2h}\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$\left(\frac{6}{m}^{(1)}\frac{2^{(2,1)}}{m^{(2,1)}}\frac{2^{(2,1)}}{m^{(2,1)}}\right)^{(3)}$
4	$D_{2d}/[illegible]/C_1\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$(\bar{4}^{(4)}2^{(2)}m^{(2,2)})^{(4)}$	22	$D_{6h}/D_2/C_2\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{6^{(1)}}{m^{(1)}}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
5	$D_{4h}/C_{2v}/C_s\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$\left(\frac{4}{m}^{(4)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	23	$D_{6h}/C_{2v}/C_2\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{6}{m}^{(1)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(6)}$
6	$D_{4h}/[illegible]/C_i\ (D_4,C_2')_{4,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(4)}$	24	$D_{6h}/C_{2v}'/C_s\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
7	$D_{4h}/[illegible]\ (D_{4h},C_2')_{8,4}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	25	$D_{6h}/C_{2h}'/C_i\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{6}{m}^{(2)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
8	$D_{4h}/[illegible]/C_1\ (D_{4h},C_2')_{8,4}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$	26	$D_{6h}/C_2'/C_1\ (D_{6h},C_2')_{12,4}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
9	$D_3/[illegible]/C_1\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(3^{(1)}2^{(2,1)})^{(3)}$	27	$D_{6h}/C_s'/C_1\ (D_{6h},C_2')_{12,4}$	$\left(\frac{6^{(6)}}{m^{(2)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
10	$C_{3v}/C_s/C_1\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(3^{(1)}m^{(2,1)})^{(3)}$	28	$T/C_3/C_1\ (T,C_3)_{4,1}$	$(2^{(2)}3^{(3,1)})^{(4)}$
11	$D_{3d}/C_{2h}/C_i\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$\left(\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2,1)}}{m^{(2,1)}}\right)^{(3)}$	29	$T/C_2/C_1\ (T,C_2)_{6,2}$	$(2^{(2,2)}3^{(3)})^{(6)}$
12	$D_{3d}/C_2'/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	30	$T_h/C_{3i}/C_i\ (T,C_3)_{4,1}$	$\left(\frac{2}{m}^{(2)}\bar{3}^{(3,1)}\right)^{(4)}$
13	$D_{3d}/C_s/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(6)}$	31	$T_h/C_{2h}/C_i\ (T,C_2)_{6,2}$	$\left(\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\bar{3}^{(3)}\right)^{(6)}$
14	$C_{6v}/C_{2v}/C_2\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(6^{(1)}m^{(2,1)}m^{(2,1)})^{(3)}$	32	$T_h/C_{2v}/C_1\ (T_h,C_{2v})_{6,2}$	$\left(\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(6)}$
15	$C_{6v}/C_s/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$(6^{(6)}m^{(2,2)}m^{(2)})^{(6)}$	33	$T_h/C_3/C_1\ (T_h,C_3)_{8,2}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6,0)}\right)^{(8)}$
16	$D_6/D_2/C_2\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(6^{(1)}2^{(2,1)}2^{(2,1)})^{(3)}$	34	$T_h/C_2/C_1\ (T_h,C_2)_{12,4}$	$\left(\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(12)}$
17	$D_6/C_2'/C_1\ (D_6,C_2')_{6,2}$	$(6^{(6)}2^{(2,2)}2^{(2)})^{(6)}$	35	$T_h/C_s/C_1\ (T_h,C_s)_{12,4}$	$\left(\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(6)}\right)^{(12)}$
18	$D_{3h}/C_{2v}/C_s\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(\bar{6}^{(3)}m^{(2,1)}2^{(2,1)})^{(3)}$	36	$O/D_4/D_2\ (D_3,C_2')_{3,1}$	$(4^{(2,1)}3^{(3)}2^{(2,1)})^{(3)}$

Табл. 3 (продолжение)

№	$G/H'/H\ (P,P')_{p',m}$	$G_I^{(p')} \leftrightarrow G$	№	$G/H'/H\ (P,P')_{p',m}$	$G_I^{(p')} \leftrightarrow G$
37	$O/D_3/C_1\quad (O,D_3)_{4,1}$	$(4^{(4)}3^{(3,1)}2^{(2,2)})^{(4)}$	56	$O_h/D_{2h}'/C_i\quad (O,D_2')_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2,2)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(6)}$
38	$O/C_4/C_1\quad (O,C_4)_{6,2}$	$(4^{(4,2)}3^{(3)}2^{(2)})^{(6)}$	57	$O_h/D_{2d}'/C_1\quad (O_h,C_{4v})_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$
39	$O/D_2'/C_1\quad (O,D_2')_{6,2}$	$(4^{(4,0)}3^{(3)}2^{(2,2)})^{(6)}$	58	$O_h/C_{3i}/C_i\quad (O,C_3)_{8,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3,2)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$
40	$O/C_3/C_1\quad (O,C_3)_{8,2}$	$(4^{(4)}3^{(3,2)}2^{(2)})^{(8)}$	59	$O_h/D_3/C_1\quad (O_h,D_3)_{8,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6,0)}\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\right)^{(8)}$
41	$O/C_2/C_1\quad (O,C_2)_{12,4}$	$(4^{(4,0)}3^{(3)}2^{(2)})^{(12)}$	60	$O_h/C_{3v}/C_1\quad (O_h,D_3)_{8,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6,0)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\right)^{(8)}$
42	$O/C_2'/C_1\quad (O,C_2')_{12,2}$	$(4^{(4)}3^{(3)}2^{(2,2)})^{(12)}$	61	$O_h/C_4'/C_1\quad (O_h,C_4)_{12,4}$	$\left(\frac{4^{(4,4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
43	$T_d/D_{2d}/D_2\quad (D_3,C_2')_{3,1}$	$(\bar{4}^{(2,1)}3^{(3)}m^{(2,1)})^{(3)}$	62	$O_h/S_4/C_1\quad (O_h,C_4)_{12,4}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
44	$T_d/C_{3v}/C_1\quad (O,D_3)_{4,1}$	$(\bar{4}^{(4)}3^{(3,1)}m^{(2,2)})^{(4)}$	63	$O_h/D_2'/C_1\quad (O_h,C_{2v}'')_{12,2}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
45	$T_d/S_4/C_1\quad (O,C_4)_{6,2}$	$(\bar{4}^{(4,2)}3^{(3)}m^{(2)})^{(6)}$	64	$O_h/C_{2v}/C_1\quad (O_h,C_{2v})$[illegible]	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2,8)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
46	$T_d/C_{2v}/C_1\quad (O,D_2')_{6,2}$	$(\bar{4}^{(4,0)}3^{(3)}m^{(2,2)})^{(6)}$	65	$O_h/C_{2v}'/C_1\quad (O_h,C_{2v}')$[illegible]	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\right)^{(12)}$
47	$T_d/C_3/C_1\quad (O,C_3)_{8,2}$	$(\bar{4}^{(4)}3^{(3,2)}m^{(2)})^{(3)}$	66	$O_h/C_{2v}''/C_1\quad (O_h,C_{2v}'')_{12,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(12)}$
48	$T_d/C_2/C_1\quad (O,C_2)_{12,4}$	$(\bar{4}^{(4,0)}3^{(3)}m^{(2)})^{(12)}$	67	$O_h/C_{2h}/C_i\quad (O,C_2)_{12,4}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(12)}$
49	$T_d/C_s/C_1\quad (O,C_2')_{12,2}$	$(\bar{4}^{(4)}3^{(3)}m^{(2,2)})^{(12)}$	68	$O_h/C_{2h}'/C_i\quad (O,C_2')_{12,2}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(12)}$
50	$O_h/D_{4h}/D_{2h}\quad (D_3,C_2')_{3,1}$	$\left(\frac{4^{(2,1)}}{m}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2,1)}}{m^{(2,1)}}\right)^{(3)}$	69	$O_h/C_3/C_1\quad (O_h,C_3)_{16,4}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6,0)}\frac{2^{(8)}}{m^{(2)}}\right)^{(16)}$
51	$O_h/D_{3d}/C_i\quad (O,D_3)_{4,1}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(3,1)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(4)}$	70	$O_h/C_2/C_1\quad (O_h,C_2)_{24,8}$	$\left(\frac{4^{(4,0)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$
52	$O_h/C_{4h}/C_i\quad (O,C_4)_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(4,2)}}{m^{(2,2)}}\bar{3}^{(3)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	71	$O_h/C_2''/C_1\quad (O_h,C_s')_{24,4}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2,4)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$
53	$O_h/C_{4v}/C_1\quad (O_h,C_{4v})_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(4,2)}}{m^{(2,4)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(6)}$	72	$O_h/C_s/C_1\quad (O_h,C_s)_{24,8}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2,8)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2)}}\right)^{(24)}$
54	$O_h/D_4/D_2\quad (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(2,2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2,2)}}{m^{(2)}}\right)^{(6)}$	73	$O_h/C_s'/C_1\quad (O_h,C_s')_{24,4}$	$\left(\frac{4^{(4)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,4)}}\right)^{(24)}$
55	$O_h/D_{2d}/D_2\quad (D_6,C_2')_{6,2}$	$\left(\frac{4^{(2,2)}}{m^{(2)}}\bar{3}^{(6)}\frac{2^{(2)}}{m^{(2,2)}}\right)^{(6)}$			