сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-80-494

И.М.Рангелов

О КВАНТОВОМ ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА

2. Собственные механический и магнитный моменты и электростатическое поле

1980

Рангелов И.М. P4-80-494

О квантовом движении свободного электрона.
2. Собственные механический и магнитный моменты
и электростатическое поле

Исследовано поведение дираковского электрона и изучены следствия его высокочастотного шредингеровского дрожания. Исходя из простых физических соображений и с помощью элементарных вычислений получено, что высокочастотные осцилляции электрона создают собственные механический и магнитный моменты. Получено, что вся энергия покоя электрона mc^2 описывает только энергию его трехмерного осциллирования, так как собственная электростатическая энергия электрона E_c компенсируется его кинетической энергией E_k движения в нулевом фоне электромагнитного поля. При учете пространственного распределения осциллирующего электрона получено, что электростатический потенциал $\tilde{V}(r)$ его размазанного заряда является произведением кулоновского потенциала $V(r)$ неподвижного заряда на функцию вероятности $\Phi_0(\frac{r}{\lambda})$, а его формфактор $\tilde{V}(q)$ - произведением формфактора кулоновского потенциала $V(q)$ на экспоненциальный множитель $\exp[-q^2\lambda^2/4]$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Rangelov I.M. P4-80-494

About Quantum Motion of a Free Electron. 2. Proper
Mechanical and Magnetic Moments and Electrostatic Field

The behaviour of the Dirac electron is studied and the consequence of its high frequency Schroedinger zitterbewegung are studied. Going out from simple physical opinions and by means of elementary calculations it is obtained that high frequency oscillations of the Dirac electron causes proper mechanical and magnetic moments.

Исследовано поведение дрожащего электрона. Получено, что высокочастотные осцилляции электрона приводят: а/ к созданию собственных механического и магнитного моментов; б/ к созданию электростатического потенциала его заряда, конечного при малых r и экспоненциально убывающего при больших q формфакторах, т.е. к устранению ультрафиолетовой катастрофы. Показано, что вся энергия "покоя" mc^2 электрона есть энергия его осцилляции.

Хотя еще в 1921 г. Комптон[1] предположил, что электрон обладает внутренним /собственным/ механическим моментом /спином/ и собственным магнитным моментом, все еще бытует мнение[2-4], что спин есть четвертая внутренняя степень свободы дираковского электрона, которая не имеет аналогов в классической физике[5а-7]. Впервые Гаудсмит и Уленберг ввели спин для объяснения некоторых деталей атомного спектра[8]. Они выдвинули предположение /аналогично Комптону/, что электрон обладает вращением относительно оси, проходящей через его центр[9,10], и поэтому обладает собственным механическим моментом

$$L_s = \hbar s = \frac{\hbar\sigma}{2} \qquad /1/$$

и связанным с ним собственным магнитным моментом

$$\mu_s = \frac{-e\hbar s}{mc} = \frac{-e\hbar\sigma}{2mc} . \qquad /2/$$

Всегда при этом отмечалось, что отношение собственного магнитного момента μ_s(2) к собственному механическому моменту /спину/ L_s(1) в два раза превышает отношение орбитального магнитного момента

$$\mu_\ell = \frac{-e\hbar\ell}{2mc} \qquad /3/$$

к орбитальному механическому моменту электрона $L_\ell = \hbar\ell$.

$$L_\ell = \hbar\ell. \qquad /4/$$

Позднее Дирак[11] написал релятивистское волновое уравнение первого порядка, вводя четыре комплексные волновые функции /ВФ/: ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4. Вводом дополнительных матриц α_x, α_y, α_z и β он получил член, учитывающий взаимодействие свободного электрона с внешним магнитным полем в виде скалярного произведения двух векторов: напряженности магнитного поля H и $\mu_s = \frac{-e\hbar\sigma}{2mc}$ - собственного магнитного момента.

Позднее, используя замечания Брейта[12] и Фока[13], при исследовании физического смысла уравнения Дирака Шредингер[14] показал, что движение электрона состоит из[3,5б,15,16]: а/ регулярного поступательного движения со скоростью $[\frac{dr}{dt}] = \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{p}{m}$; б/ наложенного на него дрожания (Zitterbewegung) с большой частотой $\omega \sim \frac{mc^2}{\hbar}$ и с малой амплитудой порядка его комптоновской длины волны $\frac{\hbar}{mc}$. Ниже будет показано, что дрожание электрона действительно существует, так как оно проявляется.

Цель настоящей работы - показать, что интерпретация дрожания электрона как колебания трехмерного изотропного осциллятора, в основном состоянии с энергией $\frac{3\hbar\omega}{2} = mc^2$ правильно описывает его поведение, дает наглядное физическое объяснение его собственным механическому и магнитному моментам и объясняет причину изменения его кулоновского потенциала на малом расстоянии.

Итак, если движение дираковского электрона является совокупностью двух движений: колебательного движения /дрожания/, описываемого ВФ основного состояния трехмерного осциллятора $\psi_0(b)$ и регулярного поступательного движения, описываемого орбитальной ВФ $\psi(r,t)$, то это должно проявиться в токе, созданном его зарядом. В приближенном представлении теории Дирака можно показать, что ток дираковского электрона действительно состоит из двух компонент[5б,16-18]: а/ обычного шредингеровского тока

$$j_I = -e\{\delta(r-r_0)\pi + \pi\delta(r-r\ )\}/2m \qquad /5/$$

и б/ тока, создающего его магнитный момент

$$j_{II} = -e\{\delta(r-r_0)(p\times\sigma) - (p\times\sigma)\delta(r-r_0)\}/2m\,, \qquad /6/$$

где $\pi = (p - \frac{e}{c}A)$ - количество движения.

В[16] Паули показывает, что разделение токов возможно, и квантовомеханическим путем получает разделение моментов электрона на собственный и орбитальный. Поэтому момент импульса он записывает в операторном виде:

$$L_{ik} = (r_i\pi_k - r_k\pi_i) - \frac{i\hbar}{2}\alpha_i\alpha_k\,. \qquad /7/$$

Если учесть, что

$$\alpha_i\alpha_k = i\epsilon^{ikj}\sigma_j\,, \qquad /8/$$

то из /7/ можно получить

$$L_{ik} = (r_i\pi_k - r_k\pi_i) + \frac{\hbar}{2}\epsilon^{ikj}\sigma_j\,. \qquad /9/$$

Однако Паули не говорит, что спин электрона является следствием какого-то внутреннего движения /как это сделал Шредингер/. Паули утверждает, что наличие добавочного члена $\frac{-i\hbar}{2}\alpha_i\alpha_k$ в операторе момента импульса L_{ik} связано с поведением ВФ $\psi_i(r,t)$ при бесконечно малом повороте. Паули признает, что первую часть $(r_i\pi_k - r_k\pi_i)$ оператора момента импульса L_{ik}, по аналогии с нерелятивистской теорией, можно интерпретировать как орбитальный момент. Но вторую часть $\frac{-i\hbar}{2}\alpha_i\alpha_k$ он не рассматривает как физическое следствие реального движения, а принимает его только как математическое следствие симметрии ВФ. Паули утверждает, что разделение полного момента импульса на орбитальный и спиновый есть только приближение в нерелятивистской области. Однако Бор отмечает, что спиновый момент электрона, однозначно отделенный от его орбитального момента, никогда не может быть определен посредством опытов, к которым применимо классическое понятие его траектории.

Оператор полного магнитного момента электрона

$$M_{ik} = \frac{-e}{2mc}(r_i\pi_k - r_k\pi_i) - \frac{e\hbar}{2mc}\epsilon^{ikj}\sigma_j \qquad /10/$$

состоит из двух частей: орбитальной части, которая представляет собой произведение орбитального механического момента $(r_i\pi_k - r_k\pi_i)$ на гиромагнитный фактор $\frac{-e}{2mc}$, и спиновой части, которая получается благодаря наличию в квадрате скалярного произведения

$$(\sigma.\pi).(\sigma.\pi) = (\pi.\pi) + i\sigma.(\pi\times\pi) \qquad /11/$$

смешанного произведения $\sigma.(\pi\times\pi)$. Таким образом, собственный магнитный момент электрона есть удвоенное произведение его спина $\frac{\hbar}{2}\epsilon^{ikj}\sigma_j$ на гиромагнитный фактор $\frac{-e}{2mc}$.

После квантовомеханического обсуждения физически более наглядно покажем, что дрожание /колебательное движение/ электрона способно создать его собственный магнитный момент.

Действительно, если электрон колеблется вокруг своего равновесного положения, то его круговое движение должно создавать магнитный момент [19] μ_s вдоль любого выбранного направления

$$\mu_s = \frac{JS}{c} = \frac{-e\omega\rho^2}{2c}. \qquad /12/$$

В /12/ J описывает ток, созданный электроном ($J=-\nu e$), а S описывает проекцию площади на выбранном направлении, которая обтянута на траектории электрона ($S=\pi\rho^2$). Так как формула /12/ является классической, то она применима для классического движения электрона, когда точно известна его траектория. Но дираковский электрон - это дрожащая квантовая частица, а в квантовом осцилляторе нам неизвестна настоящая траектория, а известна только вероятность ее пространственного распределения

$$\bar{P}(b) = |\psi_0(b)|^2 = (\sqrt{\pi}\lambda)^{-3}\exp\left(-\frac{b^2}{\lambda^2}\right). \qquad /13/$$

Поэтому для получения экспериментально наблюдаемого значения собственного магнитного момента $\langle\mu_s\rangle$ необходимо вычислить среднее значение $\langle b^2\rangle$ с весом $\bar{P}(b)$ /13/. Если учесть, что при сферической симметрии $\langle\rho^2\rangle = \frac{2}{3}\langle b^2\rangle$, то из /12/ и /13/ можно получить следующее выражение для экспериментально наблюдаемого значения собственного магнитного момента электрона:

$$\langle\mu_s\rangle = -\frac{4\pi e\omega}{3\pi\sqrt{\pi}c\lambda^3}\int_0^\infty e^{-b^2/\lambda^2} b^4\, db = -\frac{e\omega\lambda^2}{2c}. \qquad /14/$$

Так как параметр λ^2 имеет значение $\frac{\hbar}{m\omega}$, то из /14/ получаем

$$\langle\mu_s\rangle = -\frac{e\hbar}{2mc}. \qquad /15/$$

Выражение /15/ показывает, что колебательное движение /дрожание/ электрона действительно создает его собственный магнитный момент $\mu_s(2)$ $(s=1/2)$. Необходимо доказать, что это же дрожание электрона создает и его собственный механический момент /спин $L_s(1)$ /.

Известно [20], что для определения собственного значения проекции орбитального момента импульса частицы на некотором направлении удобно воспользоваться выражением для ее оператора в сферических координатах, выбрав при этом полярную ось вдоль рассматриваемого направления. Нам кажется, что для определения собственных значений проекции полного момента частицы

($j\hbar = \ell\hbar + s\hbar$) удобнее воспользоваться выражением для ее оператора в цилиндрических координатах, выбрав ось z вдоль рассматриваемого направления. Для этого необходимо переписать уравнение Шредингера для радиальной части ВФ $R(r,E)$ в сферических координатах [2, 5б, 6, 9, 20]

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R = \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)R \qquad /16/$$

в уравнение Шредингера для аксиально-симметричной части ВФ $\Phi(\rho)$ в цилиндрических координатах, т.е. необходимо заменить r на ρ, а $R(r)$ на $\Phi(\rho)/\sqrt{\rho}$. Тогда из /16/ можно получить

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Phi}{d\rho} - \frac{(\ell+½)^2}{\rho^2}\Phi = \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\,\Phi. \qquad /17/$$

Известно [5б, 21, 22], что уравнение Шредингера в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\,\psi. \qquad /18/$$

Сравнение уравнений /17/ и /18/ показывает, что множитель $(\ell+½)^2$ в /10/ получается вследствие двукратного дифференцирования ВФ $\psi(\rho,\phi,z)$ по азимутальному углу ϕ. Поэтому зависимость полной ВФ $\psi(\rho,\phi,z)$ электрона от угла ϕ приобретает следующий вид:

$$\psi(\rho,\phi,z) = \psi_\ell(\rho,z)\, e^{i(\ell\pm½)\phi}. \qquad /19/$$

Таким образом, мы получили равенство

$$\psi(\rho,z,\phi) = \tilde{\psi}(\rho,z,\phi)\, e^{\pm i\phi/2}, \qquad /20/$$

где $\tilde{\psi}(\rho,\phi,z)=\psi(r)$ - орбитальная ВФ электрона, описывающая его регулярное движение в пространстве. Из /20/ следует, что при переходе из сферической в цилиндрическую координатную систему мы получили дополнительный множитель $e^{\pm i\phi/2}$, учитывающий дополнительную зависимость полной ВФ дираковского электрона от азимутального угла ϕ из-за наличия ненулевой проекции его собственного механического момента /спина $L_s(1)$ /. Поэтому необходимо показать, что приведенное доказательство не является следствием формального /без физической наглядности/ перехода уравнения /16/ в уравнение /17/. Для этого необходимо записать уравнение Дирака в цилиндрических координатах.

Уравнение Дирака для свободного электрона имеет общий вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = c(\alpha\cdot p)\,\psi(r,t) + \beta mc^2\psi(r,t) \qquad /21/$$

Как уже было указано, α_x, α_y, α_z и β - четырехрядные матрицы, а $\psi(r,t)$ - четырехкомпонентная ВФ дираковского электрона, которую можно коротко записать в виде столбца. Поэтому уравнение /21/ можно расписать по компонентам. В декартовой координатной системе получается следующая система частных дифференциальных уравнений [23,24]:

$$\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+i\hbar c\Big[\frac{\partial\psi_4}{\partial x}-i\frac{\partial\psi_4}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\Big]=mc^2\psi_1,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+i\hbar c\Big[\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+i\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_4}{\partial z}\Big]=mc^2\psi_2,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+i\hbar c\Big[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-i\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\Big]=-mc^2\psi_3,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_4}{\partial t}+i\hbar c\Big[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+i\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\Big]=-mc^2\psi_4.
\end{aligned} \qquad /22/$$

Систему уравнений /22/ можно переписать в цилиндрическую координатную систему /при замене $x=\rho\cos\phi$ и $y=\rho\sin\phi$ /, где она приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+i\hbar c\Big[e^{-i\phi}\Big\{\frac{\partial\psi_4}{\partial\rho}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial\psi_4}{\partial\phi}\Big\}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\Big]=mc^2\psi_1,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+i\hbar c\Big[e^{i\phi}\Big\{\frac{\partial\psi_3}{\partial\rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial\psi_3}{\partial\phi}\Big\}-\frac{\partial\psi_4}{\partial z}\Big]=mc^2\psi_2,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+i\hbar c\Big[e^{-i\phi}\Big\{\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial\psi_2}{\partial\phi}\Big\}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\Big]=-mc^2\psi_3,\\
&i\hbar\frac{\partial\psi_4}{\partial t}+i\hbar c\Big[e^{i\phi}\Big\{\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\phi}\Big\}-\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\Big]=-mc^2\psi_4.
\end{aligned} \qquad /23/$$

Из /23/ видно, что ψ_1 и ψ_3 имеют одинаковый фазовый множитель, а ψ_2 и ψ_4 - тоже одинаковый, но уже другой фазовый множитель. Разность между двумя фазовыми множителями есть ϕ,

и поэтому, исходя из симметрии, мы можем предположить, что

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\rho,\phi,z)=\tilde\psi_1(\rho,\phi,z)e^{-i\phi/2}; \quad \psi_2(\rho,\phi,z)=\tilde\psi_2(\rho,\phi,z)e^{i\phi/2},\\
&\psi_3(\rho,\phi,z)=\tilde\psi_3(\rho,\phi,z)e^{-i\phi/2}; \quad \psi_4(\rho,\phi,z)=\tilde\psi_4(\rho,\phi,z)e^{i\phi/2}.
\end{aligned} \qquad /24/$$

Зависимость орбитальных компонент $\tilde\psi_j(\rho,\phi,z)$ от азимутального угла ϕ описывается множителем $\exp(\pm i\ell\phi)$ и определяется орбитальным моментом количества движения $\ell\hbar=\langle[r\times p]\rangle$. Хотя дрожание является сферически симметричным, оно имеет проекцию $\pm\frac{\hbar}{2}$ вдоль любого направления [7,9,22], т.е. сферически симметрическое колебание электрона имеет одинаковую проекцию спина во всех направлениях.

Известно, что благодаря принципу неопределенности, если одну величину можно определить максимально точно, т.е. с минимальной ошибкой, то некоммутирующие с ней величины должны иметь минимальное значение. Чтобы определить среднее значение оператора L^2 в представлении, в котором L^2 и L_z диагональные, при эксперименте необходимо измерить величину [9,24]

$$\langle L^2\rangle=(L_{z\,max})^2+\langle(\Delta L_x)^2_{min}\rangle+\langle(\Delta L_y)^2_{min}\rangle. \qquad /25/$$

Из соотношения неопределенности следует, что если два оператора L_x и L_y не коммутируют между собой ($[L_x,L_y]=i\hbar L_z$), то для их среднеквадратичных неопределенностей $(\Delta L_x)^2$ и $(\Delta L_y)^2$ существует неравенство

$$\langle(\Delta L_x)^2_{min}\rangle\cdot\langle(\Delta L_y)^2_{min}\rangle=\frac{\hbar^2(L_{z\,max})^2}{4}=\frac{\hbar^4\ell^2}{4}. \qquad /26/$$

Учитывая сферическую симметрию, можно положить, что $\langle(\Delta L_x)^2_{min}\rangle=\langle(\Delta L_y)^2_{min}\rangle$. Тогда из /26/ следует, что

$$\langle(\Delta L_x)^2_{min}\rangle=\langle(\Delta L_y)^2_{min}\rangle=\frac{\hbar^2\ell}{2}. \qquad /27/$$

Поэтому можно утверждать, что при эксперименте получим

$$\langle L^2\rangle=\hbar^2\ell^2+\hbar^2\ell=\hbar^2\ell(\ell+1). \qquad /28/$$

Но все это относится к орбитальному моменту $\ell\hbar$. Конечно, формально мы можем воспользоваться формулой /26/, учитывая при этом, что $\langle(\Delta s_z)^2_{min}\rangle = \langle(s_z)^2_{max}\rangle = s_z^2$. Вследствие изотропности пространства имеем равенства

$$\langle(\Delta s_x)^2_{min}\rangle = \langle(\Delta s_y)^2_{min}\rangle = \langle(\Delta s_z)^2_{min}\rangle = \mathrm{const}. \qquad /29а/$$

Поэтому из /26/ можно определить значение const

$$s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \qquad /29б/$$

Конечно, такой же результат можно получить из /26/, если вместо ℓ, подставить $s = ½$, т.е. $s_{z\,max} = \frac{\hbar}{2}$. Но нам необходимо представить физическое объяснение, поэтому необходимо знать, откуда появляется член $\hbar^2/4r^2$ в /17/.

Известно [24,25], что в квантовой механике среднее значение кинетической энергии частицы ϵ_k определяется формулой

$$\langle\epsilon_k\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{\langle(\Delta p)^2\rangle}{2m}. \qquad /30/$$

Первый член в /30/ описывает кинетическую энергию классического движения частицы с усредненным импульсом $\bar{p}$, а второй член - квантовую энергию делокализации, которая появляется вследствие квантового описания ее поведения с помощью волновой функции. Этот член описывает минимальную кинетическую энергию локализованной в ограниченной области частицы. Второй член обеспечивает устойчивость основного состояния электрона в водородном атоме и ненулевое, вакуумное состояние в осцилляторе. Поэтому необходимо вычислить вклад квантового члена в кинетическую энергию частицы.

Итак,

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(\Delta p_x)^2\rangle + \langle(\Delta p_y)^2\rangle + \langle(\Delta p_z)^2\rangle. \qquad /31/$$

Известно, что минимальное значение произведения дисперсий $(\Delta p_x)^2$ и $(\Delta x)^2$ есть $\hbar^2/4$. Поэтому

$$\langle(\Delta p_x)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle(\Delta x)^2\rangle}; \quad \langle(\Delta p_y)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle(\Delta y)^2\rangle}; \quad \langle(\Delta p_z)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4\langle(\Delta z)^2\rangle}. \qquad /32/$$

Так как $\langle(\Delta p_x)^2\rangle$ имеет минимум при максимальном $(\Delta x)^2 = x^2$, а $x_{max} = r$ (x максимально при $y = 0$ и $z = 0$), то $\langle(\Delta x)^2_{max}\rangle = r^2$. Если учесть, что $\langle(\Delta x)^2_{max}\rangle = \langle(\Delta y)^2_{max}\rangle = \langle(\Delta z)^2_{max}\rangle$, то с помощью /31/ и /32/ можно получить

$$\langle(\Delta p)^2_{min}\rangle = \frac{\hbar}{4r^2} + \frac{\hbar}{4r^2} + \frac{\hbar}{4r^2} = \frac{3\hbar}{4r^2}. \qquad /33/$$

Благодаря выводу формулы /33/ нам становится ясно, почему при переходе из /16/ в /17/ появился множитель $(\hbar^2/4r^2)$. Это есть не что иное, как $\langle(\Delta p_z)^2_{min}\rangle = (\hbar^2/4r^2)$, находившийся в $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR)$.

Действительно, разделение трехмерного изотропного осциллятора на три одинаковых взаимно перпендикулярных осциллятора определяет проекцию собственного момента электрона в произвольно выбранном направлении. Так как ориентация этих осцилляторов для медленного электрона в сферически симметричном пространстве произвольна, то и проекция собственного механического момента /спина/ электрона вдоль любого предварительно выбранного направления должна быть постоянной /29/. Интерпретация $(3\hbar^2/4r^2)$, как и $(s(s+1)\hbar^2/4r^2)$, нам кажется физически более правильной; тем более, что таким образом устраняется одно забытое несоответствие в правилах раннего квантования.

Известно, что в трехмерном пространстве существуют три степени свободного движения вдоль трех осей декартовой координатной системы. Но неясно, почему при обобщении правила квазиклассического квантования Борна-Зоммерфельда приводятся только два симметричных выражения [20]:

$$\oint p_r\,dr = 2\pi\hbar\left(n_r + \frac{1}{2}\right), \qquad /34а/$$

$$\oint p_\theta\,d\theta = 2\pi\hbar\left(\ell - m + \frac{1}{2}\right), \qquad /34б/$$

а третье записывается без остаточного члена /1.2/

$$\oint p_\phi\,d\phi = 2\pi\hbar m. \qquad /34в/$$

Но когда необходимо решать проблему Кеплера [24,18] квазиклассическим образом, тогда уже специально доказывается, что необходимо заменить $\ell(\ell+1)$ на $(\ell+½)^2$, чтобы получить правильную асимптотику. Поэтому нам кажется, что если p_ϕ обозначает проекцию полного углового момента $j\hbar = (\ell+½)\hbar$, то в /34в/ необходимо вместо m подставить $m + ½$. Таким образом, симметрия в /34/ восстановлена, а /34в/ записано физически правильно.

Дальше необходимо исследовать, какое изменение вносит дрожание дираковского электрона в его классический электростатический кулоновский потенциал. Для этого необходимо решить уравнение Пуассона

$$\Delta\tilde{V}(r) = 4\pi e\tilde{\rho}(r) , \qquad /35/$$

используя для функции пространственного распределения электрического заряда электрона выражение /13/, т.е. при $\tilde{\rho}(r) = P(r)$. Тогда для усредненного по времени с периодом дрожания $\tau = \frac{3\hbar}{4mc^2}$ электростатического потенциала дираковского электрона мы получаем

$$\tilde{V}(r) = \frac{-2e}{\sqrt{\pi}\, r}\int_0^{r/\lambda} e^{-x^2}\,dx = -\frac{e}{r}\Phi_0\left(\frac{r}{\lambda}\right), \qquad /36/$$

где $\Phi_0(r/\lambda)$ есть интеграл вероятности /ошибки/.

Итак, если предположить, что усредненное пространственное распределение электрона описывается не идеально локализованной δ-функцией неподвижного электрона, а реально размытым волновым пакетом /13/ осциллирующего электрона [9], то электростатический потенциал точечного заряда дрожащего электрона является произведением кулоновского потенциала точечного заряда неподвижного электрона $V(r) = \frac{-e}{r}$ на функцию вероятности $\Phi_0(\frac{r}{\lambda})$. Эта модификация кулоновского потенциала чрезвычайно важна, т.к. при малых $r\,(r \le \lambda)$, т.е. в области размывки электрона и его заряда, из /36/ можно получить потенциал равномерно распределенного в пространстве заряда

$$\lim_{r<\lambda}\tilde{V}(r) = V_1(r) = -\frac{2e}{\sqrt{\pi}\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{3\lambda^2}\right). \qquad /37/$$

Самое важное, что при $r \to 0$ из /36/ и /37/ получаем конечный потенциал

$$\tilde{V}(0) = \lim_{r\to 0}\tilde{V}(r) = -\frac{2e}{\sqrt{\pi}\lambda} = \frac{-4}{\sqrt{6\pi}}\,\frac{e\,mc^2}{\hbar c}. \qquad /38/$$

Интересно также, что на больших расстояниях, где дрожание электрона не должно сказываться на его электростатическом потенциале /при $r > 3\lambda$ /, функция вероятности $\Phi_0(r/\lambda)$ принимает постоянное значение 1, и поэтому потенциал /36/ совпадает с кулоновским потенциалом точечного заряда неподвижного электрона $V(r)$. Конечно, дрожание электрона создает собственный магнитный момент его точечного заряда, и только благодаря этому можно узнать, что электрон дрожит.

Формфактор усредненного электростатического потенциала осциллирующего электрона тоже имеет вид произведения

$$\tilde{V}(q) = -\frac{4\pi e}{q^2}\exp\left(-\frac{q^2\lambda^2}{4}\right) \qquad /39/$$

двух множителей: а/ формфактора кулоновского потенциала $V(r)$ точечного заряда неподвижного электрона $V(q)$ и б/ экспоненциального множителя $\exp(-\frac{q^2\lambda^2}{4})$, учитывающего размывки электрона и его заряда. Этот множитель чрезвычайно важен. Действительно, фотонный пропагатор $D(k^2)$ при $\omega = 0$ должен удовлетворять равенству [26]

$$e^2 D(q^2) = -e\tilde{V}(q) . \qquad /40/$$

Поэтому из /40/ следует, что

$$D(q^2) = -\frac{4\pi}{q^2}\exp\left(-\frac{q^2\lambda^2}{4}\right). \qquad /41/$$

Проведенное исследование показывает, что замена идеальной дираковской δ-функции [9,21,22]

$$\tilde{\delta}(r) = \lim_{\lambda\to 0}(\sqrt{\pi}\lambda)^{-3}\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right) \qquad /42/$$

реальной $\tilde{\delta}$-функцией волнового пакета [13] при описании пространственного распределения электрона обеспечивает конечность его электростатического потенциала /36/ при малых r и устраняет ультрафиолетовую расходимость при больших q.

Вначале мы говорили, что осцилляции электрона энергетически выгодны и поэтому существуют, т.к. электрон бежит от поля своего заряда, чтобы взаимодействовать не с его бесконечным моментным значением, а с его запоздалым конечным значением. Действительно, если учесть усредненные распределения дрожащего электрона /13/ и его собственный потенциал /36/, то для собственной потенциальной энергии E_c осциллирующего электрона получаем выражение

$$E_c = \frac{2e\,4\pi e}{\sqrt{\pi}\,\pi\,\sqrt{\pi}\lambda^3}\int_0^\infty e^{-r^2/\lambda^2}\,\frac{r^2dr}{r}\int_0^{r/\lambda} e^{-x^2}\,dx. \qquad /43/$$

После перехода к новой переменной $(y = r/\lambda)$ и после интегрирования по частям, /43/ можно получить

$$E_c = \frac{4e^2}{\pi\lambda}\int_0^\infty e^{-2x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^2}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}\,\frac{e^2 mc^2}{\hbar c}. \qquad /44/$$

Здесь необходимо вспомнить, что нулевой фон электромагнитного поля оказывает существенное значение на движение дираковского электрона. Простые выкладки [7,24,27] показывают, что кинетическая энергия колеблющегося в нулевом фоне электромагнитного поля, δ-образно распределенного в пространстве электрона, описывается формулой:

$$E_k = \frac{m\langle\omega^2(\delta r)^2\rangle}{2} = \frac{e^2 m}{\pi\hbar c}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int_0^{\omega_{max}} \omega\, d\omega . \qquad /45/$$

Обычно принимают, что верхняя граница интегрирования в /45/ должна совпадать с пороговой энергией рождения электрон-позитронной пары $\hbar\omega_{max} = 2mc^2$. Поэтому /45/ можно получить

$$E_k = \frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar c} mc^2 . \qquad /46/$$

Нам кажется важным совпадение кинетической энергии E_k электрона, которую он получает благодаря колебанию в ненаблюдаемом фоне электромагнитного поля, с его потенциальной энергией E_c самодействия собственного электрического поля на собственный заряд. Несущественным отличием $\sqrt{3\pi}$ от π в данном случае можно пренебречь, если учесть приближенный характер получения результатов /44/ и /46/. Полученное совпадение показывает, что благодаря дрожанию наличие заряда у электрона вполне компенсируется влиянием нулевого фона электромагнитного поля. Именно поэтому можно утверждать, что вся энергия "покоя" mc^2 электрона имеет механическое происхождение и вполне можно обойтись без предположения ее электромагнитного происхождения [5a,28] / $mc^2 = e^2/r_0$, где r_0 - классический радиус электрона/. Таким образом снимается вопрос о размере электрона, о его структуре и о пространственном распределении электрона. Тем самым теряется связь ультрафиолетовой катастрофы в квантовой электродинамике с классическим размером электрона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Compton A.H. Journ.Franklin Inst., 1921, 192, p.144.
2. Фок В.А. Начало квантовой механики. "Наука", М., 1976.
3. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. "Наука", М., 1979.
4. Липкин Г. Квантовая механика. "Мир", М., 1979.
5. Мессиа А. Квантовая механика. "Мир", М., 1878, т.1; 1979, т.2.
6. Ферми Э. Квантовая механика. "Мир", М., 1965.

7. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. "Наука", М., 1971. т.2.
8. Uhlenbek G., Goudsmit S. Naturwiss., 1925, 13, p.953; Nature, 1926, 117, p.264.
9. Бом Д. Квантовая теория. Физматгиз, М., 1961.
10. Маттис Д. Теория магнетизма. "Мир", М., 1967.
11. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc., 1928, A117, p.610.
12. Breit G. Proc.Nat.Acad.Sc,., USA, 1928, 14, p.553.
13. Fock V.A. Zsch.Phys., 1929, 55, p.127.
14. Scrödinger E. Sitzungsber.Preus.Akad.Wiss., 1930, K1, 24, p.418; 1936, 5, 66, 144, p.238.
15. Дирак П.А.М. Основы квантовой механики. ГТТИ, М-Л., 1932.
16. Паули В. Общие принципы волновой механики. ГТТИ, М.-Л., 1947.
17. Gordon W. Zsch.Phys., 1928, 50, p.630.
18. Флюге З. Задачи по квантовой механике. "Мир", М., 1974, т.1,2.
19. Тамм И.Е. Основы теории электричества. "Наука", М.,1976.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. "Наука", М., 1974.
21. Арфкен Г. Математические методы в физике.Атомиздат, М., 1970.
22. Цюлике Л. Квантовая химия. "Мир", М., 1978, т.1.
23. Шифф Л. Квантовая механика. ИЛ, М., 1959.
24. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. "Наука", М., 1979.
25. Давыдов А.С. Квантовая механика. "Наука", М., 1973.
26. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория поля. "Наука", М., 1971, ч.2.
27. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория поля. "Наука", М., 1978, т.1.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники

Нет ли пробелов в Вашей библиотеке?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д1,2-8405	Труды IV Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Варна, 1974.	2 р. 05 к.
Р1,2-8529	Труды Международной школы-семинара молодых ученых. Актуальные проблемы физики элементарных частиц. Сочи, 1974.	2 р. 60 к.
Д6-8846	XIV совещание по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1975.	1 р. 90 к.
Д13-9164	Международное совещание по методике проволочных камер. Дубна, 1975.	4 р. 20 к.
Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по колективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды УI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна 1978. /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна 1978.	5 р. 00 к.
Р18-12147	Труды III совещания по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач.	2 р. 20 к.

Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Р2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д-12965	Труды Международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Минск, 1979.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1979.	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.