сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-80-493

И.М.Рангелов

О КВАНТОВОМ ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОНА

1. Энергия покоя и связь квантовой механики со стохастическими процессами

1980

Рангелов И.М. P4-80-493

О квантовом движении свободного электрона.
1. Энергия покоя и связь квантовой механики
со стохастическими процессами

Шредингеровское дрожание дираковского электрона интерпретируется как колебание трехмерного изотропного осциллятора в основном состоянии с энергией $\frac{3}{2}\hbar\omega = mc^2$ и волновой функцией $\psi_0(b)$. Поэтому исследована возможность описания поведения медленного свободного электрона с помощью двух координат: а/ координаты r, описывающей регулярное прямолинейное движение; б/ координаты b, описывающей нерегулярное осциллирующее движение. Предложено новое, релятивистски инвариантное выражение $P(b, r)$, имеющее правильную нерелятивистскую асимптотику и описывающее вероятность нахождения электрона, участвующего в стохастическом движении через время r на расстоянии b. Доказано, что пространственное распределение вероятности нахождения осциллирующего электрона $|\psi_0(b)|^2$ при учете равенства $\hbar\omega r = \frac{\hbar}{2}$, которое связывает $\Delta E = \hbar\omega$ и $\Delta t = r$ в основном состоянии осциллятора, переходит в пространственное распределение вероятности перескоков стохастически движущегося электрона в нерелятивистском приближении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1980

Rangelov I.M. P4-80-493

About Quantum Motion of a Free Electron. 1. Rest Energy and Connection of Quantum Mechanics with Schroedinger Processes

The Schroedinger zitterbewegung of a Dirac electron is interpreted as a vibration of a three-dimensional oscillator in a basic state with energy $\frac{3}{2}\hbar\omega = mc^2$ and a wave function $\psi_0(b)$. Therefore

Исследована возможность существования дрожания электрона, которое накладывается на его регулярное поступательное движение. Дрожание медленного электрона рассматривается как колебание трехмерного изотропного осциллятора в основном состоянии с энергией $\frac{3}{2}\hbar\omega = mc^2$. Пространственное распределение колеблющегося электрона совпадает с пространственным распределением стохастически дрожащего электрона, что обеспечивает возможность стохастически описывать его квантовое поведение.

Известно [1,2], что идея о релятивистской инвариантности основных законов физики и о равноправии координаты со временем предопределила форму записи уравнения Дирака [3] и выбор его параметров. Поэтому иногда говорят [4], что существование спина вытекает из теории относительности. Цель настоящей работы - показать, какому движению соответствует энергия покоя mc^2, а также причину отсутствия классической траектории у электрона и существование связи между квантовой механикой и стохастическими процессами. Исходя из общих физических предположений, мы получаем знакомые соотношения и смыкание релятивистской квантовой теории поля /РКТП/ в двух предельных случаях: с классической релятивистской механикой /КРМ/ при $\hbar \to 0$ и с нерелятивистской квантовой механикой /НКМ/ при $c \to \infty$.

Из КРМ следует, что связь между местоположением события (x, y, z) и моментом времени (t), в котором оно произошло, измеряемых в двух системах отсчета, осуществляется преобразованием Лоренца [5-7]:

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - u^2}}; \quad t' = \frac{t + (uz/c)}{\sqrt{1 - u^2}} . \qquad /1/$$

Здесь (x, y, z, t) - координаты и время события, измеренные неподвижным наблюдателем, а (x', y', z', t') - координаты и время этого же события, измеренные другим наблюдателем, движущимся с постоянной скоростью $v = uc$. Преобразование /1/ показывает, что пространственно-временной интервал

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = s^2 \qquad /2/$$

сохраняется и не зависит от выбора координатной системы. Та ким же преобразованием связаны энергия E и импульс p частицы [5-7].

$$p'_x = p_x;\ p'_y = p_y;\ p'_z = \frac{p_z + (uE/c)}{\sqrt{1-u^2}};\ E' = \frac{E + vp_z}{\sqrt{1-u^2}}. \qquad /3/$$

Легко проверить, что разность квадратов энергии и импульса

$$E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = (E')^2 - c^2[(p'_x)^2 + (p'_y)^2 + (p'_z)^2] = m^2c^4 \qquad /4/$$

тоже сохраняется и не зависит от выбора координатной системы измерения. Релятивистская инвариантность /4/ величины энергии покоя mc^2 частицы показывает, что она не зависит от системы отсчета, и поэтому ее нельзя свести к энергии равномерно поступательного движения.

Действительно, если в координатной системе K частица не имеет равномерного и поступательного движения, т.е. если в K $p_x = 0$, $p_y = 0$ и $p_z = 0$, а энергия покоя $E = mc^2$, то с помощью преобразования /3/ можно получить, что в системе K' /которая движется со скоростью $v = uc$ относительно системы K/ частица должна иметь

импульс $p' = \dfrac{mv}{\sqrt{1-u^2}}$ и энергию $E' = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-u^2}}$. /5а,б/

Если исключить из /5/ скорость v, то получим знакомое релятивистское соотношение

$$E' = c\sqrt{(p')^2 + m^2c^2}. \qquad /6/$$

Именно поэтому важно знать, откуда берется энергия покоя mc^2 и следствием какого движения является квантовое поведение электрона. Известно утверждение [1,2], что независимость матрицы α_x, α_y, α_z и β от p и r показывает, что они должны обозначать совершенно новые динамические переменные, которые описывают внутреннее движение электрона Дирака, следствием которого является его спин и его собственный магнитный момент.

Еще в 1931 г. в совместной работе [8] Ландау и Пайерлс назвали ошибочным часто встречающееся в то время утверждение, что комптоновская длина $\dfrac{\hbar}{mc}$ является универсальной границей точности для измерения координаты с помощью медленно движущейся частицы. Однако нам кажется, что их вывод ничем не подтвержден.

Действительно, можно вычислить оператор скорости [9-15]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H\ ,r] = c\alpha \qquad /7/$$

с помощью гамильтониана Дирака

$$H_D = c(\alpha \cdot p) + \beta mc^2. \qquad /8/$$

Получается парадоксальный результат, замеченный впервые Брейтом [9], а потом Фоком [10]. Действительно, из принципа соответствия следует, что в теории Дирака оператор $c\alpha$ необходимо считать операторным представлением вектора моментной скорости электрона в том смысле, в котором матрицы Паули $\hbar\sigma/2$ представляют компоненты его спина. Поэтому, поскольку собственные значения оператора α равны ± 1, то из /7/ следует, что собственные значения абсолютной величины скорости электрона /частицы со спином 1/2/ всегда равны скорости света c. Исследуя физический смысл уравнения Дирака, Шредингер [11] решил эту проблему. Так как сами матрицы α зависят от времени, то он сначала решил уравнение для $\eta_k = \alpha_k - cH^{-1}p_k$

$$i\hbar\frac{d\eta_k}{dt} = 2\eta_k H = -2H\eta_k \qquad /9/$$

и записал его решение:

$$\eta_k = \eta_k^\circ e^{2i\frac{Ht}{\hbar}} = e^{-2i\frac{Ht}{\hbar}}\eta_k^\circ. \qquad /10/$$

Потом Шредингер снова возвратился к уравнению /7/ и нашел его решение

$$r_k = a_k + c^2H^{-1}p_k t + \frac{ic\hbar}{2H}(\alpha_k - cH^{-1}p_k)_0\, e^{2i\frac{Ht}{\hbar}}. \qquad /11/$$

Константа a_k есть постоянная интегрирования /оператор/, но она не является точным значением r_k при $t = 0$. Символ $\eta_k^\circ = (\alpha_k - cH^{-1}p_k)_0$ обозначает начальное значение оператора $\eta_k = (\alpha_k - cH^{-1}p_k)$. Второй член в /11/ растет линейно от времени со скоростью

$$v_k = c^2\frac{\sqrt{1-u^2}}{mc^2}\cdot\frac{mv_k}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad /12/$$

соответствующей импульсу p_k. Поэтому постоянная $c\alpha_k$ никак не связана с этой скоростью. Последний член в /11/ имеет явно периодический характер /точнее, весьма сложный, почти периодический характер [11]/, и поэтому дает быстро осциллирующий вклад. Величина $c\eta$ является скоростью этого высокочастотного, быстро дрожащего движения (Zitterbewegung) с малой амплитудой $\sim\dfrac{\hbar}{mc}$, которое накладывается на прямолинейное равномерное движение со скоростью v_k. Поэтому в РКТП собственные функции оператора координаты частицы r уже не являются δ-функциями, как это было для оператора r в НКМ, а размазаны по области, порядка комптоновской длины частицы $\frac{\hbar}{mc}$ [13-15]. Вот почему в РКТП взаимодействие поля с нерелятивистской частицей массы m не является локальным, а зависит от значения поля в области с размером $\frac{\hbar}{mc}$ и с центром в точке, где "находится" частица.

Для сохранения приближенного представления о движении одной частицы в РКТП в качестве оператора координаты частицы следует брать оператор $\vec{r}$ ее среднего положения $\langle r\rangle$, усредненного по объему, линейный размер которого порядка комптоновской длины частицы $\frac{\hbar}{mc}$.

Дальше Шредингер исследовал зависимость векторного произведения $[\alpha\times\alpha]$ от времени

$$\frac{d}{dt}[\alpha\times\alpha] = [\frac{d\alpha}{dt}\times\alpha] + [\alpha + \frac{d\alpha}{dt}]. \qquad /13/$$

Так как

$$-i\hbar\frac{d\alpha}{dt} = 2(cp - \alpha H) = 2(H\alpha - cp), \qquad /14/$$

то вместо /13/ можно записать

$$i\hbar\frac{d}{dt}[\alpha\times\alpha] = 4c[\alpha\times p]. \qquad /15/$$

С помощью /7/ из /15/ можно получить уравнение

$$i\hbar\frac{d}{dt}\{i\hbar[\alpha\times\alpha] - 4[r\times p]\} = 0, \qquad /16/$$

которое имеет решение

$$[r\times p] - \frac{i\hbar}{4}[\alpha\times\alpha] = const. \qquad /17а/$$

Если воспользоваться равенством

$$[\alpha\times\alpha] = 2i\sigma, \qquad /18/$$

то из /17а/ получаем

$$[r\times p] + \frac{\hbar\sigma}{2} = const. \qquad /17б/$$

Таким образом, Шредингер получил закон сохранения полного момента количества движения $\ell\hbar + s\hbar = j\hbar$. Дальше он решил уравнение для спина

$$\hbar\frac{d\sigma}{dt} = -2c[\alpha\times p] \qquad /19/$$

и записал его решение

$$\sigma = \sigma_0 - i\hbar[\alpha\times p]_0 H^{-1} e^{2i\frac{Ht}{\hbar}}. \qquad /20/$$

Затем Шредингер пытался представить спин электрона как следствие его дрожащего движения.

Итак, еще Шредингер показал, что электрон дрожит с большой частотой $\omega \sim \frac{mc^2}{\hbar}$, и поэтому координаты его регулярного движения неопределенны. Почему же тогда не принять, что соотношение неопределенности [16] в действительности не ограничивают возможности одновременного измерения взаимно дополняющих величин [14], а утверждают: если частица находится в течение времени Δt в состоянии с неопределенностью координат Δr, то в этом состоянии неопределенности ее энергии ΔE и импульса Δp должны удовлетворять неравенствам [15]:

$$(\Delta E)^2(\Delta t)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \qquad /21а/$$

$$(\Delta p_k)^2(\Delta_k)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \qquad /21б/$$

Другими словами, любой волновой пакет /ВП/ обладает ограниченной временной Δt и пространственной Δr протяженностями, удовлетворяющими неравенствам /21/ [2,13].

Итак, все признают, что дрожание электрона существует, но для его объяснения приводят разные причины. Например, в [17] Паули утверждает, что осциллирующее движение электрона является математическим следствием интерференции частей ВП, принадлежащих к положительным и отрицательным энергиям /зарядам/. Действительно, если ВП содержит собственные волновые функции /ВФ/ только одного знака энергии /заряда/, то дрожание "исчезает" [18,19]. Поэтому и делались попытки избавиться от этого нежелательного движения, т.е. найти такое представление уравнения Дирака, в котором дрожание электрона не имело бы места /например, Шредингер сохранял только четную часть операторов и отказывался от переходов между $\pm$ состояниями [20]; представление Фольди и Воитхойзен [21]/. Нам кажется, что так как самое плодотворное уравнение микромира - уравнение Дирака содержит в себе большой физический смысл, то необходимо до конца исследовать это уравнение, а не выбрасывать то, что нам пока кажется непонятным, необъяснимым или еще не известным. Именно поэтому необходимо объединить все имеющиеся теоретические и экспериментальные данные, которые подтверждают, что движение дираковского электрона необходимо описывать с помощью двух координат: r и b, т.е. что

$$R = r + b. \qquad /22/$$

Причем r должна описывать регулярную часть движения электрона со скоростью v_k /12/, а b - его нерегулярное, дрожащее движение со скоростью u_k. Ниже увидим, что это соответствует разделению полной ВФ электрона $\psi(R,t)$ на орбитальную $\psi(r,t)$ и спиновую $\psi_0(b)$.

Давно Велтон[22] предположил, что нулевой фон /или вакуум/ электромагнитного поля непрерывно взаимодействует с каждым электроном, в результате чего электрон испытывает флюктуационное изменение своего положения. Однако нам кажется, что эти колебания малы для создания всего спина и собственного магнитного момента электрона, хотя они могут создать его аномальную часть. Поэтому мы предполагаем, что настоящая причина дрожания электрона кроется в его стремлении избежать сильного самодействия, т.е. избежать сильного действия своего электрического поля на собственный заряд.

Итак, если дираковский электрон свободен, то он должен дрожать, а центр массы, около которого он дрожит, должен двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью $v = [v^+ + v^-]/2$, где $v^+(v^-)$ - его скорость дрейфа вперед /назад/. Чтобы исследовать только его стохастическое движение, мы должны описать дрожание в системе координат, которая движется вместе с его центром массы. В этой координатной системе пространство для описываемого медленного электрона изотропно, и поэтому его дрожание сферически симметрично, т.е. его стохастическое движение равновероятно в любом направлении. Поэтому вероятность нахождения электрона через время τ на расстоянии b от прежнего положения /где электрон находился в моменте $\tau = 0$/, должна описываться выражением:

$$P(b,\tau) = A \exp\left(\frac{mc}{\hbar}\sqrt{c^2\tau^2 - b^2}\right). \qquad /23/$$

Это единственно возможная релятивистски инвариантная комбинация, которая правильно описывает вероятностные процессы /линейную экспоненциальную зависимость от времени/, которую можно образовать из характеристик пространства и электрона. Очень важно, что это точное релятивистски инвариантное выражение /23/ имеет правильную нерелятивистскую асимптотику

$$\tilde{P}(b,\tau) = \tilde{A} \exp\left[\frac{mc^2\tau}{\hbar} - \frac{mb^2}{2\hbar\tau}\right]. \qquad /24/$$

Условие нормировки вероятности $P(b,\tau)$[23,24]

$$\int P(b,\tau)\, d^3b = 1 \qquad /25/$$

показывает, что в любой момент времени электрон находится где-то в пространстве, и поэтому вероятность найти его во всем пространстве равна 1. Если применить условие нормировки /25/ к асимптотическому выражению /24/, то для нормировочной константы $\tilde{A}$ получим выражение:

$$\tilde{A} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2\tau}{\hbar}\right). \qquad /26/$$

После подстановки /26/ в /14/ получаем знакомое выражение из теории броуновского движения [24,25]:

$$\tilde{P}(b,\tau) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mb^2}{2\hbar\tau}\right). \qquad /27/$$

Из /27/ видно, что коэффициент "диффузии" имеет значение $D = \hbar/2m$.

Необходимо отметить, что релятивистская неинвариантность условия нормировки /25/ не должна нас пугать. При переходе от неподвижной в движущуюся координатную систему K′ элементарный объем d^3b переходит в d^3b', причем

$$d^3b' = \sqrt{1-u^2}\, d^3b. \qquad /28/$$

Но так как число электронов не изменяется при переходе из одной координатной системы в другую, то множитель $(1-u^2)^{1/2}$ только перенормирует константу A и нарушит сферическую симметрию в /25/. Поэтому выбор системы отсчета существенно не влияет на конечный ответ.

Известно [23,24,28], что дрожащее движение свободного электрона можно рассматривать как свободное блуждание /стохастическое движение/, при котором не только движения разных электронов независимы друг от друга, но и движения одного и того же электрона в разные промежутки времени тоже независимы друг от друга, пока эти промежутки остаются не слишком малыми. Известно также [23,24,26-28], что при включении внешнего поля регулярная часть движения центра массы электрона с токовой скоростью $v = \frac{v^+ + v^-}{2}$, которая соответствует четной части оператора моментной скорости /12/ $\left(\left[\frac{dr}{dt}\right] = \frac{c^2 p}{E_p}\right)$, должна описываться ВФ $\psi(r,t)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера /или Дирака/. Действительно, если принять обозначения

$$m(v^{+}+v^{-}) = 2\hbar \nabla S_1 \qquad /29а/$$

$$m(v^{+}-v^{-}) = 2\hbar \nabla S_2, \qquad /29б/$$

то можно проверить, что ВФ

$$\psi(r,t) = \exp(S_2+iS_1) = B\exp(i\frac{S}{\hbar}) \qquad /30/$$

должна удовлетворять уравнению Шредингера /23, 24, 28/

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi + V\psi. \qquad /31/$$

Вторая запись ВФ $\psi(r,t)$ /30/ известна /15,13а/ из перехода с квантового описания электрона в классическое описание его поведения. Возможность пренебрежения членом $(\Delta B/B)$ в уравнении /13а/

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar\Delta B}{2mB} \qquad /32/$$

обеспечивает применимость классического описания движения электрона, т.е. пренебрежение зависимостью амплитуды вероятности B от координаты. Нерелятивистское приближение соответствует исключению диффузионного члена в уравнениях непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(r,t)|^2 = -\mathrm{div}(v^{+}|\psi(r,t)|^2) + \frac{\hbar\Delta}{2m}|\psi(r,t)|^2, \qquad /33а/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(r,t)|^2 = -\mathrm{div}(v^{-}|\psi(r,t)|^2) - \frac{\hbar\Delta}{2m}|\psi(r,t)|^2. \qquad /33б/$$

Из /29/ следует, что в нерелятивистском приближении равенство

$$v^{+} = v^{-} + \frac{2\hbar}{m}\nabla S_2 \qquad /34а/$$

заменяется равенством

$$v^{+} = v^{-}. \qquad /34б/$$

В нерелятивистском приближении пренебрегают осмотической скоростью $u = \frac{(v^{+}-v^{-})}{2}$ и тем самым пренебрегают шредингеровским дрожанием дираковского электрона. Именно поэтому в нерелятивистском приближении распределение электрона описывают точечной δ-функцией Дирака.

В заключение отметим, что распределение вероятности случайного блуждания /дрожания/ $\tilde{P}(b,\tau)$ в нерелятивистском приближении описывается именно формулой/27/.Из выражения /23/ видно,

как часто должны повторяться перескоки дрожащего электрона ($\tau \sim \frac{\hbar}{mc^2}$) и как малы должны быть амплитуды его дрожания ($(\Delta b)^2 < \frac{\hbar\tau}{m} \sim \frac{\hbar^2}{m^2c^2}$).

Здесь предлагается другой способ описания дрожания дираковского электрона. Можно предположить, что электрон колеблется около своего центра массы с частотой ω, причем энергия этого колебания совпадает с энергией покоя электрона mc^2. В этом случае основное состояние изотропного трехмерного осциллятора имеет собственную ВФ /13а, 15, 29/

$$\psi_0(b) = (\sqrt{\pi}\lambda)^{-3/2}\exp(-\frac{b^2}{2\lambda^2}) \qquad /35/$$

и собственное значение

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega = mc^2. \qquad /36/$$

Параметр $\lambda^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ имеет значение

$$\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{m\hbar\omega} = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m^2c^2}. \qquad /37/$$

Из /35/ следует, что пространственное распределение вероятности нахождения электрона вблизи центра его массы описывается формулой

$$\bar{P}(b) = |\psi_0(b)|^2 = (\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\frac{mc}{\hbar})^3\exp(-\frac{2b^2m^2c^2}{3\hbar^2}). \qquad /38/$$

Известно, что для осциллятора в основном состоянии имеет место равенство

$$\tau = \frac{\hbar}{2\hbar\omega} = \frac{3\hbar}{4mc^2}. \qquad /39/$$

После подстановки в /38/ вместо mc^2 величины $3\hbar/4\tau$ получаем пространственное распределение вероятности /27/. Следовательно, дрожание электрона можно интерпретировать как его колебание с частотой ω в основном состоянии. Так как пространственное распределение колеблющегося электрона описывается собственной ВФ /36/ основного состояния трехмерного изотропного осциллятора, то распределение вероятности колебаний $|\psi_0(b)|^2$ совпадает с распределением вероятности перескоков для стохастического движения /блуждания/. Но для этого случая доказано, что поведение регулярной части координаты частицы r описывается ВФ $\psi(r,t)$ (30), удовлетворяющей уравнению Шредингера /31/

/или Дирака/. Поэтому и в случае, когда дрожание электрона рассматривается как его осцилляции и описывается ВФ $\psi_0(b)$ (35), поведение регулярной части его координаты должно описываться ВФ $\psi(r,t)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера /или Дирака/. Здесь необходимо отметить, что приравниваются только вероятности пространственных распределений, основного состояния осциллятора и стохастического движения, но не приравниваются оба процесса. Это позволяет понять, почему, выходя из предположения стохастичности пространства, можно доказать, что поведение регулярной части координаты электрона в квантовой механике необходимо описывать стохастическими, вероятностными законами, а не классическими, строго детерминированными законами движения.

Известно, что в случае колебательного движения осциллирующей частицы в гармоническом потенциале, ВП $|\psi_0(b)|^2$ основного состояния абсолютно устойчив, не меняет свою форму и его центр массы движется по классической траектории [13а, 14, 29, 30]. Известно также, что если ВФ /38/ попадает в какое-либо электрическое или магнитное поле, потенциал которого не меняется заметным образом на расстоянии, соизмеримом с размерами самого ВП, то он тоже должен двигаться по классической траектории [4,13а]. Важно, что для сохранения формы и размера ВП /38/ не предполагалось никакого взаимодействия. Поэтому, когда ВП описывает колебание электрона с большой энергией "покоя" mc^2, то вполне естественно, что движение этого электрона в любых полях, в которых его потенциальная энергия намного меньше энергии его колебаний mc^2, не должно приводить к расплыванию этого ВП.

Вышеизложенное показало, что учет симметричности между координатами и импульсами, между энергией и временем, как и минимизация неравенства неопределенности в /21/, в НКМ приводят к рассмотрению энергии покоя электрона как энергии его дрожания. Дрожание дираковского электрона только описывается, и то грубо, с помощью ВФ /35/ изотропного трехмерного осциллятора в основном состоянии. Основание для этого дает нам совпадение пространственных распределений $|\psi_0(b)|^2$ /38/ и $\tilde{P}(b,\tau)$ /27/, причем $\tilde{P}(b,\tau)$ есть только нерелятивистское приближение точного выражения $P(b,\tau)$ [23].

Известно [2], что динамическая система, состоящая из ансамбля одинаковых бозонов, эквивалентна динамической системе, состоящей из ансамбля осцилляторов. Поэтому операторы рождения b^+ и уничтожения b бозона связаны с координатой q и импульсом p связью [13б, 18, 31]

$$b^+ = (m\omega q - ip)/\sqrt{2m\hbar\omega}; \quad b = (m\omega q + ip)/\sqrt{2m\hbar\omega}, \qquad /40/$$

которая точно следует из теории осциллятора [2, 13а, 15]. Но для операторов рождения a^+ и уничтожения a электрона /фермиона/ существует следующее представление [2,31]

$$a^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /41/$$

Причем ВФ вакуума есть $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а ВФ основного состояния $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому дрожание электрона правильно описывается в теории Дирака как переход между четырьмя вырожденными состояниями $/\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2/$. Однако нельзя говорит об интерференции ВП $\pm$ энергий /зарядов/, а необходимо утверждать, что дрожание электрона описывается с помощью четырех ВФ, представляющих движение вперед $(\xi \sim e^{ikr - i\omega t})$ и назад $(\eta \sim e^{-ikr - i\omega t})$ и круговое движение направо $((\xi_1, \eta_1) \sim e^{-i\phi/2})$ /или налево/ $((\xi_2, \eta_2) \sim e^{i\phi/2})$. Поэтому в стандартном представлении $(2\phi = \xi + \eta$ и $2\chi = \xi - \eta)$ /при малых скоростях $p^2 \ll m^2c^2$ имеем $|\chi| \ll |\phi|$, т.е. оба вида движения вперед и назад равноправны, как и должно быть в изотропном пространстве [32].

Хотя наша интерпретация груба, но она позволяет правильно понять связь НКМ со стохастическими процессами, причину отсутствия классической траектории у электрона и происхождение его энергии покоя mc^2. Так как дрожание электрона описывается матрицами перехода $c\alpha_i$ между четырьмя вырожденными состояниями, то разделение переменных $R = r + b$ /22/ не может приводить к представлению полной ВФ электрона $\psi(R,t)$ в виде скалярного произведения орбитальной ВФ $\psi(r,t)$ на спиновую $\psi_0(b)$. Поэтому полная ВФ дираковского электрона есть совокупность четырех вырожденных орбиталей. Однако при пренебрежении дрожанием необходимо перейти к однокомпонентной орбитальной ВФ. ВФ/35/ и пространственное распределение /38/ показывают, что в случае, когда параметр $\lambda \to 0$, дрожание исчезает, и электрон локализуется. Действительно, одно из определений $\tilde{\delta}$-функции имеет вид [29, 33, 34]

$$\tilde{\delta}(b) = \lim_{\lambda \to 0} (\sqrt{\pi}\lambda)^{-3} \exp\left(-\frac{b^2}{\lambda^2}\right). \qquad /42/$$

Из /37/ следует, что граничный переход /42/ возможен только в двух случаях: а/ когда $\hbar \to 0$, т.е. при переходе с РКТП в КРМ; б/ когда $c \to \infty$, т.е. при переходе с РКТП в НКМ. Интересно, что

$$\tilde{\delta}(b) = \tilde{\delta}(b_x)\tilde{\delta}(b_y)\tilde{\delta}(b_z). \qquad /43/$$

Граничный переход /42/ показывает, что смыкание РКТП с НКМ и КРМ происходит при замене реальной размазанной δ-функции $\bar{P}(b)$ ВП /38/ идеальной дираковской δ-функцией. Поэтому в НКМ и КРМ дрожанием электрона пренебрегается, пренебрегается и его собственным магнитным и механическим моментами, электрон локализован и имеет кулоновский электростатический потенциал.

После проведенного исследования нам кажется, что нет надобности вводить элементарное движение электрона в дискретном пространстве и времени [/35/] и не требуется также предполагать, что продвижение электрона из одной точки в другую происходит путем перескоков [/36/], т.е. посредством его уничтожения в одной точке и возрождения во второй /реновация/. Возможность возникновения новых частиц /электрон-позитронных пар/ также является следствием дрожащего движения электрона /антикоммутационных соотношений $2\delta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i$ / и расплывания ВП возбужденных состояний, а не причиной, лишающей смысла измерения его координаты в сильных полях [/32/].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дирак П.А.М. Основы квантовой механики, ГТТИ, М.-Л., 1932.
2. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. "Наука", М.,1979.
3. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc., 1928, A117, p.610.
5. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. "Мир", М., 1969.
5. Фейнман Р., Лентон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике. "Мир", М., т.1 и 2, 1976.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1973.
7. Левич В.Г. Курс теоретической физики. "Наука", М., 1969, т.1.
8. Landau L.D., Paierls Zsch.Phys., 1931, 69, p.56.
9. Breit G. Proc.Nat.Acad.Sc. USA, 1928 14, p.553; 1931, 17, p.70.
10. Fock V.A. Zsch.Phys., 1929, 55, p.127.
11. Schrödinger E. Sitzunsber.Preus.Akad.Wiss., 1930, K1, 24, p.418.
12. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976.
13. Мессиа А. Квантовая механика. "Наука", М., 1978, т.1, 1979, т.2.
14. Шифф Л. Квантовая механика. ИЛ, М., 1959.
15. Давыдов А.С. Квантовая механика. "Наука", М., 1973.
16. Heisenberg W. Zsch.Phys., 1927, 43, p.172.
17. Паули В. Общие принципы волновой механики. ГТТИ, М.-Л., 1947.
18. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М., 1963, с.7.
19. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория поля. "Наука", М., 1978.
20. Schrödinger E. Sitzungsber.Preus.Akad.Wiss., 1931, S66, p.238.
21. Foldy L.L., Wouthuysen S.A. Phys.Rev., 1950, 78, p.29.
22. Weiton T.A. Phys.Rev., 1948, 74, p.1157.
23. Kershaw D. Phys.Rev., 1964, B136, p.1850.
24. Nelson E. Phys.Rev., 1966, 150, p.1079; Dynamical Theory of Brownian Motion", Princeton, N.Y., 1967.
25. Фейнман Р., Лентон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике. "Мир", М., 1976, т.3 и 4.
26. De la Pena Auerbax L. J.Math.Phys., 1969, 10, p.1620; 1971, 12, p.453; 1977, 18, p.1612.
27. Lehr W.J., Park J.L. J.Math.Phys., 1977, 18, p.1235.
28. Lee V.J. Found.Phys., 1980, 10, p.77.
29. Бом Д. Квантовая теория. Физ.Мат., М., 1961.
30. Schrödinger E. Naturwiss., 1926, 14A, p.664.
31. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. "Наука", М., 1979.
32. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1968.
33. Цюлике Л. Квантовая химия. "Мир", М., 1978.
34. Арфкен Г. Математические методы в физике. Атомиздат, М., 1970.
35. Вялцев А.Н. Дискретное пространство-время. "Наука", М., 1965.
36. Френкель Я.И. ДАН СССР, 1949, 64, с.507.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники