сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-80-289

Г.Н.Афанасьев, Г.Кырчев, Э.Наджаков

О ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОПЕРАТОРОВ УГЛОВОГО МОМЕНТА В СИСТЕМЕ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ

1980

1. Представление, в котором составляющие оператора углового момента (ОУМ) относительно лабораторной (л.с.) и внутренней (с.ц.и.) систем координат реализованы как дифференциальные операторы от углов Эйлера, является стандартным. Однако в последнее время появился интерес к бозонным реализациям ОУМ /I-3/. Это связано с возможностью их применения для описания высокоспиновых состояний /4/.

Найденные в работах /I-3/ замкнутые выражения для ОУМ удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям. Этого, однако, недостаточно, чтобы отождествить эти операторы с физическими угловыми моментами. Цель настоящей работы как раз и состоит в нахождении физических реализаций ОУМ. Под словом "физический" мы понимаем реализацию в терминах физических переменных (напр., коллективных координат /5/ модели Бора-Моттельсона (Б.М.) или микроскопических моделей /6/).

2. Итак, перейдем к построению ОУМ в с.ц.и. Начнем с формальной стороны дела. Пусть даны L_μ -операторы УМ в л.с. Будем искать $\mathcal{L}_\mu$ -ОУМ в с.ц.и. в виде линейной комбинации L_μ :

$$\mathcal{L}_\nu = \sum_\mu f^\nu_{-\mu} L_\mu . \qquad (I)$$

Условие инвариантности выражения (I) относительно вращений в физическом трехмерном пространстве приводит к следующим условиям для функций f^ν_μ :

$$[L_0, f^\nu_\mu] = \mu f^\nu_\mu , \quad [L_1, f^\nu_{-1}] = f^\nu_0 ; \quad [L_{-1}, f_1] = -f^\nu_0 ,$$

$$[L_1, f^\nu_0] = -f_1 , \quad [L_{-1}, f^\nu_0] = f_{-1} . \qquad (2)$$

Условие, что $\mathcal{L}_\nu$ коммутируют между собой как ОУМ, и условие эрмитовости $\mathcal{L}_\nu$ приводят к следующим билинейным соотношениям между f^ν_μ :

$$f^1_{-1} = \frac{f^1_0 \, f^0_{-1}}{1+f^0_0} , \quad f^1_1 = \frac{f^1_0 \, f^0_1}{f^0_0 - 1} ,$$

$$|f^0_1|^2 = \frac{1-(f^0_0)^2}{2} , \quad |f^1_0| = \frac{1-(f^0_0)^2}{2} . \qquad (3)$$

Из (3) следует, что задание f_0^0 полностью определяет остальные функции f_μ^ν. Само же f_0^0 определяется конкретным заданием ОУМ в л.с. В качестве примера рассмотрим следующую реализацию L_μ:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= 2(x_2 p_2 - x_{-2} p_{-2}) + x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1} , \\
L_1 &= \sqrt{2}(x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2}) + \sqrt{3}\,(x_1 p_0 + x_0 p_{-1}) , \\
L_{-1} &= \sqrt{2}(x_1 p_2 + x_2 p_{-1}) + \sqrt{3}\,(x_0 p_1 + x_{-1} p_0).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $p_\mu \equiv \partial / \partial x_\mu$.

В качестве x_μ можно взять α_μ – коллективные координаты модели Б.М. или микроскопических моделей. Первоочередной задачей является отыскание функций f_μ^ν. Стандартное представление для координат x_μ имеет вид

$$
x_\mu = \mathcal{D}^2_{\mu 0}(\varphi,\theta,\psi)\beta\cos\gamma + \left(\mathcal{D}^2_{\mu 2} + \mathcal{D}^2_{\mu -2}\right)\frac{\beta\sin\gamma}{\sqrt{2}} . \tag{5}
$$

Соотношения (5) можно обратить, т.е. выразить $\beta, \gamma, \varphi, \theta, \psi$ как функции x_μ. После несложных, но громоздких выкладок получаем

$$
\beta^2 = I_2(x) = x_0^2 - 2x_1 x_{-1} + 2x_2 x_{-2} ,
$$

$$
\cos 3\gamma = \frac{I_3(x)}{[I_2(x)]^{3/2}} ,
$$

$$
I_3(x) = x_0^3 - 3x_0(x_1 x_{-1} + 2x_2 x_{-2}) + 3\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,(x_2 x_{-1}^2 + x_{-2} x_1^2) ,
$$

$$
\cos^2\theta = \frac{x_2^2 - \frac{2}{3}\xi_0^2 - \frac{1}{6}x_0^2 - \frac{2}{3}x_0\xi_0}{\xi_2^2 - \frac{3}{2}\xi_0^2} \quad \left(\xi_0 = \beta\cos\gamma,\ \xi_2 = \frac{\beta\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right),
$$

$$
\cos 2\psi = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{x_0 + \frac{\xi_0}{3} - \xi_0\cos^2\theta}{\sqrt{2}\ \xi_2\sin^2\theta} ,
$$

$$
\cos 2\psi = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{x_0 + \frac{\xi_0}{2} - \frac{3}{2}\xi_0\cos^2\theta}{\beta\sin\gamma\sin^2\theta}
$$

$$
e^{i\psi} = \frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{d^{(2)}_{00}(\theta)\xi_0 + \left[d^{(2)}_{02}(\theta)e^{2i\psi} + d^{(2)}_{0,-2}(\theta)e^{-2i\psi}\right]\xi_2}{d^{(2)}_{10}(\theta)\xi_0 + \left[d^{(2)}_{12}(\theta)e^{2i\psi} + d^{(2)}_{1,-2}(\theta)e^{-2i\psi}\right]\xi_2} . \tag{6}
$$

Таким образом, ОУМ в с.ц.и. имеет вид

$$
\mathcal{L}_\mu = \sum_\nu \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu}(\varphi,\theta,\psi)\,L_\nu ,
$$

где L_ν даются соотношениями (4), а (φ, θ, ψ) определены через коллективные координаты $\alpha_{2\mu}$ соотношениями (6).

3. Хорошо известен факт [7], что из квадрупольных фононов нельзя построить соотношения с угловым моментом 1. Чтобы доказать, что это утверждение не соответствует действительности, построим пример подобного оператора. Пусть $b^+_{2\mu}$ – оператор рождения фонона с угловым моментом 2 и проекцией μ. Сделаем замену переменных:

$$
b^+_{2\mu} = \mathcal{D}^{(2)}_{\mu 0}(\varphi,\theta,\psi)\beta\cos\gamma + \left[\mathcal{D}^{(2)}_{\mu 2} + \mathcal{D}^{(2)}_{\mu,-2}\right]\frac{\beta\sin\gamma}{\sqrt{2}} . \tag{7}
$$

Подчеркнем, что соотношения (7) – постулат. Входящие в правую часть переменные $\beta, \gamma, \varphi, \theta, \psi$ не имеют никакого отношения к физическим переменным (с теми же обозначениями), использованным в предыдущем пункте. Действуя как и ранее, можно обратить (7), т.е. выразить $\varphi, \theta, \psi, \beta, \gamma$ как функции $b^+_{2\mu}$. При этом получаем в точности формулы (6) предыдущего пункта (с заменой $x_\mu \to b^+_\mu$). Наконец, составив выражение $B^+_{1\mu\nu} = \mathcal{D}^1_{\mu\nu}(\varphi,\theta,\psi)$, получаем искомый оператор первого ранга, построенный только из операторов рождения $b^+_{2\mu}$. Поэтому ранее упомянутое утверждение о невозможности построения оператора ранга 1 из квадрупольных операторов рождения явно содержит предположение, что число операторов рождения, составляющих это выражение, фиксировано. Отсюда следует, что $B^+_{1\mu\nu}$ невозможно разложить по состояниям с фиксированным числом операторов (так, чтобы каждый член разложения нес единичный угловой момент).

4. Подведем итоги. Нами построены ОУМ в с.ц.и. в терминах физических координат $\alpha_{2\mu}$. Доказана возможность построения операторов ранга 1 из квадрупольных операторов рождения.

Авторы выражают глубокую благодарность И.Н.Михайлову за стимулирование работы и ценные советы и Б.В.Ванагасу за полезные обсуждения, а также В.Картавенко за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marshalek E.R. Phys.Rev., 1975, C11, p.1426.
2. Yamamura M. et al. Prog.Theor.Phys., 1978, 60, p.197.
3. Gulshani P. Can.J. of Phys., 1979, 57, p.998.
4. Marshalek E.R. Nucl.Phys., 1977, A275, p.416;
   Janssen D., Mikhailov I.N. Nucl.Phys., 1979, A318, p.390;
   Илдижаков О. ЭЧАЯ, 1979, I0, с.1294.
5. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. "Мир", М., 1977, т.2, с.592.
6. Ванагас Б.В. ЭЧАЯ, 1980, II, с.454.
7. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Атомиздат, М., 1975, т.I, с.59.

Рукопись поступила в издательский отдел
II апреля 1980 года.