сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-80-201

К.К.Мусабаев

О СВОЙСТВАХ ФАЗОВЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПО ПОСТОЯННОЙ ПЛАНКА

1980

В работе [1] показывается, в частности, что те величины, которые допускают предельный переход по постоянной Планка $\hbar \to 0$, должны зависеть от $\hbar$ линейным образом. Это подтверждается результатами конкретного рассмотрения в работе [2], где такой величиной является производная функция отражения. При стремлении к нулю постоянной Планка эта функция зависит от $\hbar$ в основном линейным образом. В [2] показывается также, что существует другое фазовое уравнение, которое допускает противоположный предельный переход по постоянной Планка: $\hbar \to \infty$, но является неприемлемым при $\hbar \to 0$.

В предлагаемой работе обсуждаются причины, обусловливающие вышеотмеченные свойства фазовых уравнений. При этом установлено, что то фазовое уравнение, которое удобно для предельного перехода $\hbar \to \infty$, является типичным в случаях, когда потенциал испытывает конечный скачок, и может быть использовано для исследования потенциалов с резкими границами. Переход $\hbar \to \infty$ интерпретируется как переход от непрерывно изменяющихся потенциалов к скачкообразно изменяющимся, что соответствует устремлению к нулю характерного для потенциала расстояния. Другого типа фазовое уравнение удобно для перехода $\hbar \to 0$, оно содержит безразмерный параметр квазиклассичности общим множителем правой части. Его малость характеризует условие применимости квазиклассического приближения.

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера в безразмерных переменных

$$\psi''(y) + \beta^{-2} q(y) \psi(y) = 0, \qquad (1)$$

где

$$y = x/a, \quad \beta^{-2} q^2(y) = p^2(x)/\hbar^2, \qquad (2)$$

a, p_c – некоторые параметры размерности длины и импульса соответственно.

Величина

$$\beta = \hbar / a \cdot p_c \tag{3}$$

имеет смысл эффективной константы взаимодействия, которая определяется полным набором параметров системы:

$$\{m, E, \max V(x), a, \hbar\}. \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) имеем:

$$p_c = [2m(E - \max V(x))]^{1/2}. \tag{5}$$

То есть

$$\beta = \hbar / a \cdot [2m(E - \max V(x))]^{1/2}. \tag{6}$$

Решение уравнения (1) представим в виде [3]

$$\psi(y) = [q(y)]^{-1/2}\{A(y)\exp[i\beta^{-1}\int_{y_0}^{y} q\,dy_1] + C(y)\exp[-i\beta^{-1}\int_{y_0}^{y} q\,dy]\}, \tag{7}$$

где $A(y)$ и $C(y)$ – амплитуды падающей и отраженной волн.

В методе фазовых функций величины A, C должны удовлетворять дифференциальным уравнениям первого порядка. Последние получают из дополнительного условия, которое следует из рассмотрения производной

$$\psi'(y) = i\beta^{-1}q^{1/2}[Ae^{i\phi} - Ce^{-i\phi}] - \frac{q'}{2q^{1/2}}\psi + [A'e^{i\phi} + C'e^{-i\phi}]q^{-1/2}. \tag{8}$$

Суть в том, что дополнительное условие можно выбрать двояким способом.

Первый способ [3],

$$A'e^{i\phi} + C'e^{-i\phi} + \frac{q'}{2q^{1/2}}\psi = 0, \tag{9}$$

$$\psi' = i\beta^{-1}q^{1/2}[Ae^{i\phi} - Ce^{-i\phi}], \tag{10}$$

приводит к уравнению типа Риккати, не содержащему линейного члена

$$B'(y) = \frac{q'(y)}{2q(y)}[\exp(2i\beta^{-1}\int_{y_0}^{y} q\,dy - B^2(y)\exp(-2i\beta\int_{y_0}^{y} q\,dy)] \tag{11}$$

с начальным условием

$$B(+\infty) = 0. \tag{12}$$

Здесь величина

$$B(y) = C(y)/A(y) \tag{13}$$

называется функцией отражения и связана с коэффициентом отражения как [3]

$$R = |B(-\infty)|^2. \tag{14}$$

Второй способ [2],

$$A'e^{i\phi} + C'e^{-i\phi} = 0, \tag{15}$$

$$\psi' = i\beta^{-1}q^{1/2}[Ae^{i\phi} - Ce^{-i\phi}] - \frac{q'}{2q^{1/2}}\psi, \tag{16}$$

приводит также к уравнению Риккати, но уже с линейным членом

$$B'(y;\beta) = i\beta[\frac{2q''q - 3(q')^2}{8q^3}]\{e^{i\phi} + B(y;\beta)e^{-i\phi}\}^2;\ B(+\infty). \tag{17}$$

Выясним структуру этих уравнений и прежде всего физический смысл коэффициентов, стоящих в правых частях уравнений. Для этого используем следующие соображения. Прежде всего выявим, какую роль играет сила взаимодействия β.

Рассмотрим, какого типа фазовое уравнение получится, если при его выводе не учитывать в (7) влияния множителя $q^{-1/2}$, а оставлять только то, что непосредственно определяется константой взаимодействия β. То есть будем искать решение в виде

$$\psi(y) = A(y)e^{i\phi(y)} + C(y)e^{-i\phi(y)}. \tag{18}$$

Беря производную, приходим к единственно возможному дополнительному условию

$$A'e^{i\phi} + C'e^{-i\phi} = 0, \tag{19}$$

$$\psi' = i\beta^{-1}q[A\cdot e^{i\phi} - Ce^{-i\phi}]. \tag{20}$$

Далее, подставляя (18), (20) в (1) и учитывая (19), опять приходим к уравнению(11). Это значит, что его структура не зависит от наличия множителя $q^{-1/2}$ в базисных функциях. Характерно, что в обоих случаях в правую часть уравнения в качестве множителя входит $q'/2q$. Тот факт, что он сохранился в двух разных подходах, видимо, указывает, что величина $q'/2q$ связана непосредственно с самим взаимодействием β.

Следующий вопрос – это выяснение физического смысла фактора $q'/2q$. Обратимся для этого к некоторым аспектам соответствующего рассмотрения в работе /4/, где исследуемый потенциал аппроксимируется прямоугольными ступенчатыми барьерами. Решение выбирается в виде (7). Далее процедура сводится к сшиванию решений и их первых производных по разные стороны от точки, где потенциал испытывает скачок. Это позволяет получить локальные амплитуды отражения ρ и прохождения γ в точках скачка, которые для произвольной точки скачка имеют следующий вид:

$$\rho(y_i-0)=\frac{q(y_i-0)-q(y_i+0)}{q(y_i-0)+q(y_i+0)},\quad \gamma(y_i+0)=\frac{2q(y_i+0)}{q(y_i-0)+q(y_i+0)}.\qquad(21)$$

Устремляя максимальную ширину ступенек к нулю и проделав ряд выкладок, авторы получают систему уравнений, эквивалентных уравнению (11). Теперь обратим внимание на то, что в пределе $|\Delta q_i|\to 0$ амплитуда отражения в (21) и множитель в правой части уравнения (11) совпадают.

Таким образом, общий коэффициент $dq/2q$ описывает дифференциальный амплитудный коэффициент в произвольной точке y. Эта величина принимает максимальное по модулю значение в точках скачка потенциала. Отсюда заключаем, что уравнение (11) должно быть эффективным именно для рассмотрения потенциалов с резкими границами.

И, наконец, рассмотрим предельный переход по параметру в уравнении (11).

а) Случай $\beta\to\infty$:

$$\lim_{\beta\to\infty} B'(y;\beta)=\frac{q'(y)}{2q(y)}[1-B^2(y;\beta)];\quad B(+\infty)=0.\qquad(22)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется непосредственно:

$$B(y)=\frac{q(y)-q_+}{q(y)+q_+};\quad q_+\equiv q(+\infty).\qquad(23)$$

Соотношение (23) представляет собой коэффициент отражения (21) в точке скачка потенциала. Поэтому переход к антиклассическому пределу $\beta\to\infty$ соответствует переходу от непрерывно изменяющихся потенциалов к скачкообразно меняющимся потенциалам.

б) Случай $\beta\to 0$:

$$\lim_{\beta\to 0} B'(y;\beta)=\frac{q'(y)}{2q(y)}[e^{i\infty}-B^2e^{-i\infty}].\qquad(24)$$

Как видим, в этом предельном случае производная $B'(y)$ в каждой точке оси y испытывает бесконечно быстрые осцилляции, что лишено определенного смысла. Это, в свою очередь, означает, что уравнение (11) не допускает непосредственного перехода к классическому пределу.

Теперь рассмотрим уравнение (17). Заметим, что если в (17) перейти к новым переменным

$$\phi=\beta^{-1}\int_{y_0}^{y}q(y_1)\,dy_1;\quad b(\phi)=B(y),\qquad(25)$$

то оно примет вид

$$b'(\phi)=i\beta\,\frac{2q''-3(q')^2}{8q^4}[e^{i\phi}+b(\phi)e^{-i\phi}],\qquad(26)$$

где величина

$$\beta^2\frac{2q''q-3(q')^2}{8q^4}\qquad(27)$$

интерпретируется /6,5/ как некоторый потенциал взаимодействия частицы с барьером. Здесь потенциал явно содержит параметр β, поэтому трактовка β как эффективной константы взаимодействия вполне приемлема. Можно убедиться также, что уравнение (17) допускает предельный переход к классике $\beta\to 0$, но не имеет определенного смысла при переходе к антиклассике.

Итак, можем резюмировать: определенное фазовое уравнение (11) или (17) удобно только для одного из предельных переходов по постоянной Планка (точнее, по безразмерному параметру β) и теряет смысл в противоположном случае. Иначе говоря, фазовое уравнение может быть удобным для развития, скажем, квазиклассического приближения, но оказывается непригодным при рассмотрении антиклассической ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков Ю.М. ТМФ, 1977, 31, №3, с.327.
2. Мусабаев К.К. Изв. вузов СССР, 1978, вып. 2, с.13.
3. Бабиков В.В. Метод фазовых функций,изд."Наука",1968.
4. Berry M.V., Mount K.E. Rep.Prog.Phys., 1972, 35, p.1.
5. Мусабаев К.К. Изв. АН КазССР, вып. 6, Алма-Ата, 1977, с.55.
6. Бабиков В.В. ОИЯИ, Р4-4567, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 марта 1980 года.