СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 7967

Р.В.Джолос

МЕТОД РАСЧЕТА ЭНЕРГИЙ И ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НИЗКОЛЕЖАЩИХ СОСТОЯНИЙ НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7967

Р.В.Джолос

МЕТОД РАСЧЕТА ЭНЕРГИЙ И ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НИЗКОЛЕЖАЩИХ СОСТОЯНИЙ НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР

ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом рассмотрении нечетных ядер основным является вопрос о схеме связи нечетной частицы с остовом. В ядрах, близких к магическим или сильнодеформированных, ответить на этот вопрос нетрудно. В этих ядрах симметрия среднего поля хорошо известна. Средние поля устойчивы по отношению к малым вариациям ядерной плотности. Поэтому нечетная частица слабо возмущает остов, и волновую функцию можно искать в хорошо известной форме:

$$\sum_{s,n} C_{sn} a_s^+ b_n^+ |0>, \qquad /1/$$

где суммирование по "n" включает только нижайшие однофононные состояния остова; a_s^+ - оператор рождения квазичастицы в состоянии s; b_n^+ - оператор рождения фонона с квантовыми числами "n"; $|0>$ - основное состояние остова.

Такая схема связи была использована в /1/ при рассмотрении сферических ядер и в /2/ для описания сильнодеформированных ядер.

Посмотрим, какие возникнут трудности, если разложение /1/ использовать для описания нечетных ядер, удаленных от магических и сильнодеформированных, т.е. сферических и переходных.

Первая трудность очевидна: низколежащие уровни соседних с нечетным четно-четных ядер не являются однофононными. Более правильным будет использование разложения по реальным состояниям четно-четного остова:

$$\sum_{s,n} C_{sn}\, a^{+}_{s}\, |n>,$$

где $|n>$ – n-ое возбужденное состояние остова. По существу это означает, что в разложении волновой функции нечетного ядра учитываются не только однофононные, но и, по крайней мере, двухфононные состояния, так как

$$|n> = d_n b^{+}_{n}\, |0> + \sum_{p,q} d^{n}_{pq} b^{+}_{p} b^{+}_{q}\, |0> + \dots$$

Первая оценка влияния на свойства нечетных ядер отличия реальных возбуждений остова от однофононных была сделана в /3/, где было показано, что учет этого эффекта может на 200-400 *кэВ* изменить энергии возбужденных состояний нечетного ядра.

Позднее такие расчеты повторялись, например, в /4/, где было показано, что из спектров возбуждения нечетных ядер можно извлекать информацию о знаке квадрупольного момента четно-четного остова.

В сильнодеформированных ядрах от знака деформации зависит порядок следования одночастичных уровней /схема Нильссона/. По тому, какой уровень становится основным состоянием, при заданном числе нуклонов можно определить знаки деформации. В интересующем же нас случае ситуация иная. В основном состоянии - остов сферический, и спектр состояний нечетного ядра, у которых главная компонента - одноквазичастичная, состоит из обычных уровней сферического одночастичного потенциала. Но уровни однофононного мультиплета расщеплены, и расщепление пропорционально квадрупольному моменту 2^+_1 -состояния четно-четного остова.

Вторая трудность не столь очевидна. При рассмотрении нечетных ядер в схеме /1/, для нахождения энергий уровней нечетного ядра нужно решать уравнение, изображенное графически на *рис. 1*. Величина одноквазичастичной энергии ϵ согласована с четно-нечетной разностью масс. Поэтому появление дополнительного сдвига ΔE приводит к рассогласованию теоретических

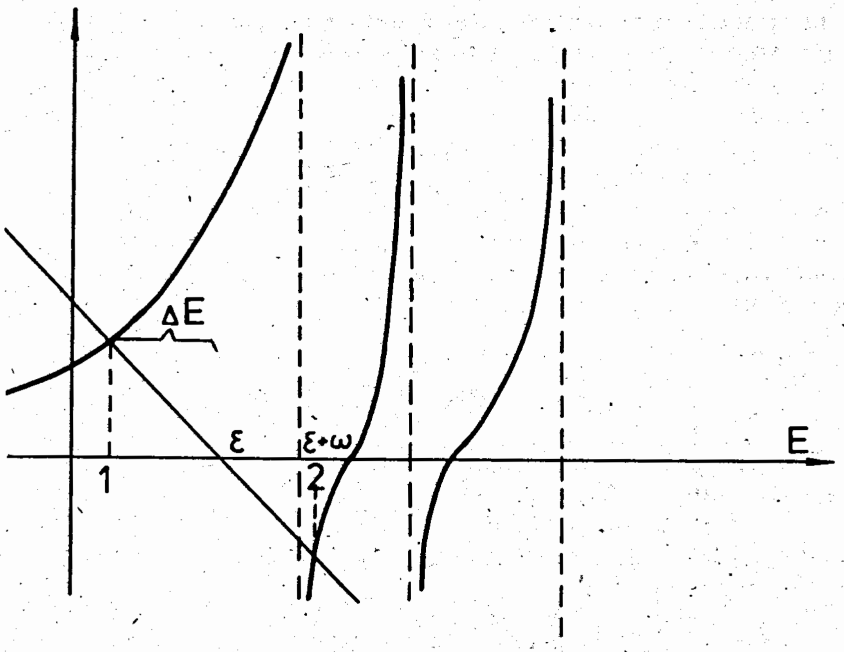

Рис. 1. Графическое решение уравнения для энергий основного и возбужденных состояний нечетного ядра. ΔE - *сдвиг энергии основного состояния нечетного ядра, обусловленный взаимодействием квазичастицы с фононами; 1,2 - корни уравнения;* ϵ - *одноквазичастичная энергия.*

и экспериментальных результатов для четно-нечетной разности масс.

Оценим величину ΔE:

$$\Delta E \approx \omega C^2,$$

где ω - энергия фонона, C^2 - вклад однофононной компоненты в норму основного состояния нечетного ядра. В расчетах Кисслингера и Соренсена /1/ $C^2 \approx 0{,}2 \div 0{,}5$, $\omega = 0{,}5$-$0{,}7$ *МэВ* и $\Delta E = 100$-300 *кэВ*. Это большая величина.

Какой вывод следует из этой оценки? Либо нельзя рассматривать раздельно парные и квадрупольные корреляции, либо при рассмотрении нечетных ядер в схеме /1/

не учитывается важный эффект, либо и то и другое. Какого рода эффект мог быть упущен - можно сказать сразу. Это корреляции в остове, вызванные связью с нечетной частицей. На то обстоятельство, что они могут быть существенными, обратили внимание еще в работах /5-8/.

Учет корреляций в остове означает учет изменения чисел заполнения одночастичных состояний, т.е. учет изменения коэффициентов u_j, v_j. При этом изменения коэффициентов могут быть различными для различных состояний нечетного ядра.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Сформулируем метод, который позволил бы включить в рассмотрение оба упомянутых выше эффекта:

а/ в качестве базисных функций нужно использовать волновые функции низколежащих состояний соседних четно-четных ядер;

б/ не следует переходить от операторов частиц к операторам квазичастиц, так как коэффициенты зависят от состояний остова, с которыми связана нечетная частица.

Гамильтониан ядра выберем следующим:

$$\hat{H} = \sum_{jm} E_j a^+_{jm} a_{jm} - \frac{G}{4}\hat{A}^+\hat{A} - \kappa \sum_{\mu} \hat{Q}^+_{2\mu}\hat{Q}_{2\mu},$$

где

$$\hat{A} = \sum_{jm} (-)^{j-m} a_{j-m} a_{jm},$$

$$\hat{Q}_{2\mu} = \sum_{jj'mm'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} C^{jm}_{j'm'2\mu} \langle j \| r^2 Y_2 \| j' \rangle a^+_{jm} a_{j'm'} ;$$

E_j - одночастичные энергии; G - константа парного взаимодействия; κ - константа квадрупольного взаимодействия; a^+_{jm} (a_{jm}) - операторы рождения /уничтожения/ нуклонов в состояниях с квантовыми числами jm ; $C^{j_1 m_1}_{j_2 m_2 j_3 m_3}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Волновую функцию нечетного ядра, состоящего из $(N+1)$ частицы, ищем в виде:

$$|JM, N+1\rangle = \sum_{InMjm} \Big(P^J_{Inj} C^{JM}_{IMjm} a^+_{jm} |InM, N\rangle - h^J_{Inj} C^{JM}_{IMjm} (-)^{j-m} a_{j-m} |In M, N+2\rangle\Big), \qquad /2/$$

где $|InM, N\rangle$ - векторы состояний, соседних с нечетными четно-четными ядрами; I, M - момент и проекция момента четно-четного ядра; n - дополнительное квантовое число; J , M - момент и проекция момента нечетного ядра.

По определению векторов состояний $|InM, N\rangle$:

$$\hat{H}|InM\rangle = (E_0(N) + E^N_{In})|InM, N\rangle,$$

где $E_0(N)$ - энергия основного состояния ядра из N нуклонов; E^N_{In} - энергия возбуждения состояния In в ядре из N- нуклонов.

При решении уравнения Шредингера

$$\hat{H}|JM, N+1\rangle = \epsilon_J(N+1)|JM, N+1\rangle,$$

где $\epsilon_J(N+1)$ - энергия нечетного ядра, будем учитывать только диагональные матричные элементы операторов $\hat{A}^+$ и $\hat{A}$:

$$\hat{A}^+|InM, N\rangle \approx |InM, N+2\rangle\langle InM, N+2|\hat{A}^+|InM, N\rangle \equiv$$

$$\equiv \frac{2\Delta(InN)}{G}|InM, N+2\rangle.$$

Результат действия $\hat{Q}_{2\mu}$ на состояния четного ядра можно записать следующим образом:

$$\hat{Q}_{2\mu}|In M, N\rangle = \sum_{I'n'M'} |I'n'M', N\rangle\langle I'n'M', N|\hat{Q}_{2\mu}|InM, N\rangle =$$

$$= \sum_{I'n'M'} C^{I'M'}_{IM2\mu} \frac{1}{\sqrt{2I'+1}} \langle I'n', N \| Q_2 \| In, N \rangle |I'n'M', N\rangle .$$

В результате для амплитуд P^J_{Inj}, h^J_{Inj}, которые удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{Inj} \{ (P^J_{Inj})^2 + (h^J_{Inj})^2 \} = 1,$$

получаем следующие уравнения:

$$P^J_{Inj} (E_j - \lambda + E^N_{In}) + \Delta(InN) h^J_{Inj} - 2\kappa \sum_{I'n'j'} (-)^{I'+j+J} \times$$

$$\times \langle j \| r^2 Y_2 \| j' \rangle \begin{Bmatrix} I' & 2 & I \\ j & J & j' \end{Bmatrix} \langle InN \| Q_2 \| I'n'N \rangle P^J_{I'n'j'} =$$

$$= \left(\epsilon_J (N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2} \right) P^J_{Inj}, \qquad /3/$$

$$h^J_{Inj} (-E_j + \lambda + E^{N+2}_{In}) + \Delta(InN) P^J_{Inj} + 2\kappa \sum_{I'n'j'} (-)^{I'+j+J} \times$$

$$\times \langle j \| r^2 Y_2 \| j' \rangle \begin{Bmatrix} I' & 2 & I \\ j & J & j' \end{Bmatrix} \langle In, N+2 \| Q_2 \| I'n', N+2 \rangle h^J_{I'n'j'} \times$$

$$= \left(\epsilon_J (N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2} \right) h^J_{Inj},$$

где $\begin{Bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix}$ – 6j - символ; $\lambda \equiv \dfrac{E_0(N+2) - E_0(N)}{2}$.

В четно-четных ядрах величина $2\Delta(InN)$ играет роль энергетической щели. При рассмотрении низколежащих состояний обычно предполагается, что $\Delta(InN)$ не зависит от In, т.е. $\Delta(InN) = \Delta(N)$.

При $\kappa = 0$ уравнения /3/ переходят в уравнения модели независимых квазичастиц. При $\Delta(N) = 0$ получаем обычные уравнения частично-дырочного подхода.

Так как собственное значение уравнений /3/ для основного состояния нечетного ядра совпадает с четно-нечетной разностью масс, Δ можно определить так, чтобы эта разность совпадала с экспериментальной. В отличие от обычного рассмотрения при этом будет учтено влияние на четно-нечетную разность масс квадрупольных сил.

2. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ ПОДХОДАМИ

В "сверхтекучей" модели ядра различием в свойствах соседних четно-четных ядер обычно пренебрегают. Приняв это предположение, можно записать вектор состояния/2/ следующим образом:

$$| JM, N+1 \rangle = \sum_{InMjm} C^{JM}_{IMjm} (P^J_{Inj} a^+_{jm} - h^J_{Inj} (-)^{j-m} a_{j-m}) | InM \rangle . \qquad /4/.$$

Введем новые коэффициенты:

$$P^J_{Inj} = f^J_{Inj} u^J_{Inj}, \qquad h^J_{Inj} = f^J_{Inj} v^J_{Inj},$$

$$(u^J_{Inj})^2 + (v^J_{Inj})^2 = 1.$$

Теперь /4/ перепишется так:

$$| JM, N+1 \rangle = \sum_{InMjm} C^{JM}_{IMjm} f^J_{Inj} (u^J_{Inj} a^+_{jm} - v^J_{Inj} (-)^{j-m} a_{j-m}) | InM \rangle .$$

Выражение в круглых скобках в /5/ напоминает определение оператора рождения квазичастицы, но в нашем случае коэффициенты u, v зависят от квантовых чисел состояния четно-четного остова, о чем говорилось во введении. Если бы эта зависимость была несущественной, и мы могли бы приближенно написать:

$$u^{J}_{lnj} = u_j , \quad v^{J}_{lnj} = v_j , \qquad /6/$$

то /5/ совпало бы с выражением для волновой функции нечетного ядра, использованным в работах /1,2/.

Сделать численные оценки для проверки предположения /6/ можно в рамках следующей простой модели. Будем считать, что имеется один изолированный одночастичный уровень j /например, уровень "противоположной" четности $g_{9/2}$ или $h_{11/2}$ /. Среди состояний четно-четного остова учтем лишь основное и первое возбужденное 2^+_1 -состояния. Будем пренебрегать квадрупольным моментом 2^+_1 -состояния. Тогда из /5/ следует:

$$2\Delta(u^j_{0_1 j} u^j_{2_1 j} + v^j_{0_1 j} v^j_{2_1 j}) = [\,2(\epsilon_j(N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2}) - \omega] \times$$

$$\times (u^j_{0_1 j} v^j_{2_1 j} + u^j_{2_1 j} v^j_{0_1 j}) , \qquad /7/$$

$$\omega(u^j_{2_1 j} v^j_{0_1 j} + v^j_{2_1 j} u^j_{0_1 j}) + 2(E_j - \lambda)(u^j_{2_1 j} v^j_{0_1 j} - v^j_{2_1 j} u^j_{0_1 j}) = 0,$$

где ω - энергия возбуждения 2^+_1 -состояния соседнего четно-четного ядра.

Так как

$$(u^j_{0_1 j})^2 + (v^j_{0_1 j})^2 = (u^j_{2_1 j})^2 + (v^j_{2_1 j})^2 = 1,$$

то можно полагать

$$u^j_{0_1 j} = \cos\phi_{0j}, \quad v^j_{0_1 j} = \sin\phi_{0j}, \quad u^j_{2_1 j} = \cos\phi_{2j}, \quad v^j_{2_1 j} = \sin\phi_{2j},$$

Из /7/ следует, что

$$\mathrm{tg}(\phi_{2j} - \phi_{0j}) = \frac{\omega\,\Delta}{(E_j - \lambda)\,[2(\epsilon_j\,(N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2}) - \omega]} . \qquad /8/$$

Предположению /6/ отвечает равенство

$$\phi_{2j} = \phi_{0j} . \qquad /9/$$

Из /8/ следует, что это равенство, вообще говоря, не выполняется. Наиболее сильные отклонения от /9/ имеют место при $E_j - \lambda \approx 0$.

Величина $\cos(\phi_{2j} - \phi_{0j})$ играет роль интеграла перекрытия волновых функций квазичастиц, определенных наборами коэффициентов $u^j_{0_1 j}$, $v^j_{0_1 j}$ и $u^j_{2_1 j}$, $v^j_{2_1 j}$. Она входит в выражения для вероятностей электрических и магнитных переходов.

Коэффициенты $u^j_{2_1 j}$, $v^j_{2_1 j}$ принимают значения:

$$u^j_{2_1 j} = 0{,}92\,u^j_{0_1 j} - 0{,}39\,v^j_{0_1 j} , \qquad v^j_{2_1 j} = 0{,}39\,u^j_{0_1 j} + 0{,}92\,v^j_{0_1 j}$$

при ω = O,5 *МэВ*, $E_j - \lambda$ = O,5 *МэВ*, Δ = O,7 *МэВ*, $\epsilon_j\,(N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2}$ = 1,1 *МэВ*. Отличие $u^j_{2_1 j}$, $v^j_{2_1 j}$ от $u^j_{0_1 j}$, $v^j_{0_1 j}$ существенно.

Таким образом, если $(E_j - \lambda)$ заметно меньше, чем Δ , то отличие нашей волновой функции нечетного ядра от волновой функции, использованной в /1/, весьма существенно. Если $(E_j - \lambda) \gg \Delta$, то обе волновые функции близки друг к другу.

Сравним уравнения для энергий различных состояний нечетного ядра, полученные в рамках нашего метода и в работе /1/. Мы получаем следующее уравнение для

$$\epsilon_j(N+1) - \frac{E_0(N) + E_0(N+2)}{2} \equiv \epsilon_j :$$

$$[(u^j_{0_1 j})^2 - (v^j_{0_1 j})^2](E_j - \lambda) + 2\Delta u^j_{0_1 j} v^j_{0_1 j} - \epsilon_j =$$

$$= \sum_{j'} g^2_{jj'} (u^j_{0_1 j} u^j_{2_1 j'} - v^j_{0_1 j} v^j_{2_1 j'})^2 \times$$

$$\times \frac{1}{[(u^{j'}_{2_1 j'})^2 - (v^{j'}_{2_1 j'})^2](E_{j'} - \lambda) + 2\Delta u^{j'}_{2_1 j'} v^{j'}_{2_1 j'} + \omega - \epsilon_j},$$

где

$$g_{jj'} = 2\kappa < 0^+_1 || Q_2 || 2^+_1 >< j || 2^2 Y_2 || j' > \left\{ \begin{matrix} j' & j & 2 \\ 2 & 2 & j \end{matrix} \right\}.$$

В работе /1/ вместо $u^j_{2_1 j}$, $v^j_{2_1 j}$ стоят соответственно $u^j_{0_1 j}$, $v^j_{0_1 j}$. Так как отличие $u^j_{2_1 j}, v^j_{2_1 j}$ от $u^j_{0_1 j}$, $v^j_{0_1 j}$ наиболее существенно, если уровень j лежит вблизи поверхности Ферми, то при рассмотрении связи с такими уровнями в /1/ делаются наиболее существенные ошибки.

Рассмотрим опять модель с изолированным одночастичным уровнем j и будем предполагать, что $E_j - \lambda = 0$. В этом случае $u^j_{0_1 j} = v^j_{0_1 j} (\phi_{0j} = \frac{\pi}{4})$ и модель Кисслингера-Соренсена дает два "невозмущенных" решения:

$$\epsilon = \left\{ \begin{matrix} \Delta \\ \omega + \Delta . \end{matrix} \right. \qquad /10/$$

В нашем же случае из /8/ следует, что $\mathrm{tg}(\phi_{2j} - \phi_{0j}) = \infty$, т.е. $\phi_{2j} - \phi_{0j} = \frac{\pi}{2}$ и $\phi_{2j} = \frac{3\pi}{4}$. При $\omega = 0{,}5$ *МэВ*, $\Delta = 1$ *МэВ*, $g^2_{jj} = 0{,}55$

$$\epsilon_j = \left\{ \begin{matrix} 1{,}5 \text{ МэВ} \\ 1{,}85 \text{ МэВ}. \end{matrix} \right.$$

Разность энергий этих двух решений /энергия возбужденного состояния со спином j, отсчитанная от основного/ заметно меньше ω.

Литература

1. L.S.Kisslinger and R.A.Sorensen. Rev.Mod.Phys., 35, 853, 1963.
2. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Наука, 1971.
3. L.S.Kisslinger, K.Kumar. Phys.Rev.Lett., 19, 1239, 1967.
4. B.Castel, K.W.Stewart and M.Harvey. Nucl.Phys., A162, 273, 1971.
5. D.R.Bès, Cho-Yi-Chumg. Nucl.Phys., 86, 581. 1966.
6. Б.Л.Бирбраир. ЯФ 5, 746 /1967/.
7. A.Kiriyama, T.Marumori and K.Matsuyamagi. Prog. Theor. Phys., 47, 498, 1972.
8. F.Dönau and D.Janssen. Nucl.Phys., A209, 109, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел 22 мая 1974 года.