

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



СЗ41а

Б-21

P4 - 7922

2798 / 2-74

Е.Б.Бальбуцев

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА  
ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-ГОЛДСТОУНА  
В КОНЕЧНЫХ ЯДРАХ

**1974**

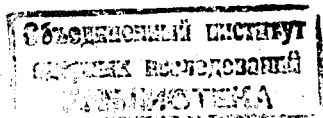
ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7922

Е.Б.Бальбуцев

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА  
ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-ГОЛДСТОУНА  
В КОНЕЧНЫХ ЯДРАХ

*Направлено в ТМО*



Бальбуцев Е.Б.

P4 - 7922

Модификация метода вспомогательного спектра для решения уравнения Бете-Голдстоуна в конечных ядрах

Метод вспомогательного спектра модифицирован так, что матричные элементы матрицы реакции в конечных ядрах находятся с помощью одних только алгебраических операций (обращение матриц). Не нужно решать никаких дифференциальных уравнений; принцип Паули учитывается точно. Одночастичный потенциал может быть любым, а двухчастичное взаимодействие должно быть без твердой сердцевины.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна, 1974

Balbutsev E.B.

P4 - 7922

The Reference Spectrum Method Modification  
for Solving the Bethe-Goldstone Equation  
for Finite Nuclei

The reference spectrum method is modified so, that only algebraic operations are required to obtain reaction matrix elements for finite nuclei. No differential equations should be solved. The Pauli operator is treated exactly. An one-particle potential can be arbitrary, but a two-particle interaction must not have a hard core.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1974

Не так давно в работе /1/ был предложен "простой и точный" метод решения уравнения Бете-Голдстоуна для конечных ядер. Это уравнение имеет вид:

$$\Psi_\alpha = \phi_\alpha + \sum_\gamma \frac{Q_\gamma \phi_\gamma \langle \phi_\gamma | v | \Psi_\alpha \rangle}{w - \epsilon_\gamma} \quad /1/$$

Здесь  $\Psi_\alpha$  - коррелированная волновая функция двух частиц в среде, соответствующая невозмущенной волновой функции  $\phi_\alpha$ ; которая является собственной функцией гамильтониана гармонического осциллятора  $H_0$  с собственным значением  $\epsilon_\alpha$ ;  $Q_\gamma$  - собственные значения оператора  $Q$ , учитывающего принцип Паули: они равны единице для свободных состояний и нулю - для занятых;  $v$  - реалистическое нуклон-нуклонное взаимодействие;  $w$  - так называемая стартовая энергия, которую можно считать параметром задачи. Суть предложенного метода заключается в том, чтобы разлагать  $\Psi_\alpha$  по полному набору собственных функций  $\phi_\gamma$  уравнения Шредингера:

$$(H_0 + v) \phi_\gamma = E_\gamma \phi_\gamma \quad /2/$$

Ожидается, что сходимость этого разложения будет очень быстрой, так как функции  $\phi_\gamma$  уже содержат в себе эффекты сильной короткодействующей части потенциала  $v$ . В идейном плане это основное достоинство нового метода.

Однако есть подозрение, что никакого преимущества здесь нет. Рассмотрим пример с потенциалом  $v$ , состоящим только из твердого кора. Известно /2/, что в этом

случае волновые функции  $\Psi_a$  и  $\phi_a$  заметно отличаются друг от друга в пределах кора и на некотором расстоянии от него постепенно сливаются, т.е. происходит "залечивание". Функция же  $\Phi_a$  будет просто сдвинута по фазе относительно  $\phi_a$  на величину радиуса кора и будет, таким образом, близка к  $\Psi_a$  вблизи кора и сильно отличаться от нее вдали. Ясно, что  $\Psi_a(\vec{r})$  одинаково сильно отличается и от  $\phi_a(\vec{r})$ , и от  $\Phi_a(\vec{r})$ , только в разных областях  $r$ .

Выполнив указанное разложение, для матричных элементов матрицы реакции  $G$  можно получить уравнение /1/:

$$G_{\beta a} = \langle \phi_\beta | v | \Psi_a \rangle = (\epsilon_a - w) \sum_{\gamma} \frac{E_{\gamma} - \epsilon_{\beta}}{E_{\gamma} - w} b_{\gamma a} b_{\gamma \beta} - \quad /3/$$

$$- \sum_{\gamma} \sum_{\mu} (\epsilon_{\mu} - w) \frac{E_{\gamma} - \epsilon_{\beta}}{E_{\gamma} - w} b_{\gamma \beta} b_{\gamma \mu} \left( \frac{1 - Q_{\mu}}{w - \epsilon_{\mu}} \right) G_{\mu a},$$

где  $b_{\gamma a}$  - интегралы перекрытия  $\langle \Phi_{\gamma} | \phi_a \rangle$ . Обозначая здесь

$$G_{\beta a}^R = (\epsilon_a - w) \sum_{\gamma} \frac{E_{\gamma} - \epsilon_{\beta}}{E_{\gamma} - w} b_{\gamma a} b_{\gamma \beta} = \quad /4/$$

$$= (\epsilon_a - w) \left[ \delta_{\beta a} - (\epsilon_{\beta} - w) \sum_{\gamma} \frac{b_{\gamma a} b_{\gamma \beta}}{E_{\gamma} - w} \right],$$

можно написать для  $G_{\beta a}$  более компактную формулу:

$$G_{\beta a} = G_{\beta a}^R - \sum_{\gamma} G_{\beta \gamma}^R \frac{1 - Q_{\gamma}}{w - \epsilon_{\gamma}} G_{\gamma a}. \quad /5/$$

Именно такое соотношение между  $G$ -матрицей и вспомогательной матрицей  $G^R$  получается в методе вспомогательного спектра /reference spectrum method / /3/. От-

сюда ясно /1/, что уравнение /3/ можно получить, начиная с другого конца. Надо разложить в ряд по  $\Phi_{\gamma}$  функцию метода вспомогательного спектра  $\Psi_a^R$ , подставить ее в соотношение  $G_{\beta a}^R = \langle \phi_\beta | v | \Psi_a^R \rangle$  и прийти, таким образом, к формуле /4/. Подставляя затем /4/ в /5/, снова возвращаемся к уравнению /3/.

Задачу, по-видимому, можно еще упростить. Уравнение для  $\Psi_a^R$  получается из /1/, если там положить все  $Q_{\gamma} = 1$ :

$$\Psi_a^R = \phi_a + \sum_{\gamma} \frac{\phi_{\gamma} \langle \phi_{\gamma} | v | \Psi_a^R \rangle}{w - \epsilon_{\gamma}} \quad /6/$$

или в дифференциальной форме:

$$(H_0 + v - w) \Psi_a^R = (\epsilon_a - w) \phi_a. \quad /7/$$

Похоже, что авторы работы /1/ сознательно усложнили проблему, разлагая решение этого уравнения по решениям уравнения /2/. Если этого не делать, то получаются намного более простые формулы. Умножая /7/ слева на  $\phi_{\beta}^*$  и интегрируя, находим:

$$G_{\beta a}^R = (\epsilon_{\beta} - w) \cdot (\delta_{\beta a} - B_{\beta a}),$$

где  $B_{\beta a} = \langle \phi_{\beta} | \Psi_a^R \rangle$ . Подставляя теперь это выражение вместо /4/ в формулу /5/, получаем уравнение для матрицы реакции:

$$Q_{\beta} G_{\beta a} + (w - \epsilon_{\beta}) \sum_{\mu} \frac{B_{\beta \mu}}{w - \epsilon_{\mu}} G_{\mu a} = (w - \epsilon_{\beta}) (B_{\beta a} - \delta_{\beta a}). \quad /9/$$

Индекс  $\mu$  здесь пробегает только занятые состояния. Если состояние  $\beta$  занято и  $w \neq \epsilon_{\beta}$ , то /9/ сводится к следующему:

$$\sum_{\mu} \frac{B_{\beta \mu}}{w - \epsilon_{\mu}} G_{\mu a} = B_{\beta a} - \delta_{\beta a}. \quad /10/$$

Обозначая здесь  $\frac{V_{\beta\mu}}{w - \epsilon_\mu} = D_{\beta\mu}$ , запишем /10/ в операторном виде:

$$D \cdot G = B - I,$$

где  $I$  - единичная матрица. Решение находится в результате обращения матрицы  $D$ :

$$G = D^{-1} \cdot (B - I).$$

Будет ли  $D$  конечной или бесконечной, зависит от того, что понимается под "занятыми" состояниями. Если  $G_{\alpha\beta}$  нужны нам, чтобы рассчитать энергию связи дважды магического ядра, например  $^{16}\text{O}$ , то матрица  $D$  будет конечной. В этом случае занятыми называются все двухчастичные состояния, которые можно скомбинировать из одночастичных состояний  $os$ -и  $op$ -оболочек.

Если же мы хотим использовать  $G$ -матрицу в качестве эффективного взаимодействия, например /1/, в  $s-d$ -оболочке того же  $^{16}\text{O}$ , тогда занятыми надо называть те двухчастичные состояния, в которых хотя бы одна частица находится в  $os$ -или  $op$ -оболочках, либо обе частицы находятся в  $s-d$ -оболочке. Матрица  $D$  в этом случае имеет бесконечную размерность и нужно где-то ее обрезать.

Из уравнения /10/ видно, что для нахождения матричных элементов  $G_{\beta\alpha}$  между занятыми состояниями, нам не нужно ничего знать об остальных матричных элементах. Можно подумать, что свободные состояния вообще не влияют на занятые. На самом деле это не так. Связь между ними осуществляется посредством коэффициентов  $V_{\beta\alpha}$ . Напишем для них уравнения. Для этого представим  $\psi_\alpha^R$  в виде ряда:

$$\psi_\alpha^R = \sum_\gamma \phi_\gamma V_{\gamma\alpha}, \quad /11/$$

умножим /7/ слева на  $\phi_\beta^*$  и проинтегрируем:

$$(\epsilon_\beta - w) V_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \langle \phi_\beta | v | \phi_\gamma \rangle V_{\gamma\alpha} = (\epsilon_\alpha - w) \delta_{\beta\alpha}$$

$$\sum_\gamma (v_{\beta\gamma} + \epsilon_\gamma \delta_{\beta\gamma} - w \delta_{\beta\gamma}) V_{\gamma\alpha} = (\epsilon_\alpha - w) \delta_{\beta\alpha} \quad /12/$$

Ясно, что при  $\epsilon_\alpha = w$  должно быть  $V_{\gamma\alpha} = 0$ , поэтому положим:

$$V_{\gamma\alpha} = (\epsilon_\alpha - w) C_{\gamma\alpha}.$$

Кроме того, обозначим  $v_{\beta\gamma} + \epsilon_\gamma \delta_{\beta\gamma} = V_{\beta\gamma}$ . Тогда из /12/ имеем:

$$\sum_\gamma (V_{\beta\gamma} - w \delta_{\beta\gamma}) C_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\alpha},$$

или в операторной форме:

$$(V - wI) \cdot C = I.$$

Формальное решение задачи получается в виде

$$C = (V - wI)^{-1}.$$

Матрица  $V - wI$  имеет бесконечную размерность. Чтобы получить какие-то численные результаты, придется ее обрезать. Строгого обоснования этой процедуры нет. Некоторым оправданием ее может служить лишь то, что матричные элементы  $v_{\beta\alpha}$  постепенно убывают с ростом энергии, соответствующей индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . По существу, с этой же проблемой сталкиваются и авторы /1/, когда им приходится так же произвольно обрезать суммирование в /4/. Впрочем, их расчеты показывают, что, если ряд /4/ обрывается при достаточно больших  $\gamma$ , возникающая ошибка пренебрежимо мала.

Итак, чтобы рассчитать энергию связи дважды магического ядра, необходимо:

- 1/ вычислить матричные элементы  $\langle \phi_\alpha | v | \phi_\beta \rangle$ ,
  - 2/ обратив матрицу  $V - wI$ , найти коэффициенты  $C_{\alpha\beta}$ ,
  - 3/ обратив матрицу  $D$ , найти матричные элементы  $G_{\alpha\beta}$ .
- Операции 2/ и 3/ надо повторять для каждого значения  $w$ , если оно меняется. Очень просто в этом методе можно ввести в энергетические знаменатели сдвиги, как это предлагали Иден и Эмери /4/. Для этого достаточно повсюду заменить  $\epsilon_\gamma$  на  $\epsilon_\gamma + \Delta_\gamma$ .

Таким образом, задача нахождения матричных элементов  $G_{\alpha\beta}$  сводится к одним только алгебраическим операциям /  $v_{\alpha\beta}$  считаются известными/. Не нужно решать никаких дифференциальных уравнений, причем принцип Паули так же, как и в /1/, учитывается точно. Следует также подчеркнуть, что при выводе основных

уравнений нигде не использовались какие-либо особые свойства невозмущенных волновых функций  $\phi_\gamma$ . Поэтому не возникает никаких проблем при переходе от гармонического осциллятора, например, к потенциалу Саксона-Вудса или какому-нибудь другому среднему полю.

В случае потенциала с твердым кором матричные элементы  $\langle \phi_\beta | v | \phi_\gamma \rangle$  обращаются в бесконечность и тогда лучше применить обычный метод вспомогательного спектра, т.е. решить численно уравнение /7/, вычислить затем интегралы перекрытия  $\langle \phi_\alpha | \Psi_\gamma^R \rangle$  и использовать их в /10/.

В заключение я хочу поблагодарить И.Н. Михайлова за многочисленные полезные дискуссии.

#### Литература

1. B.R.Barrett, R.G.L.Hewitt, R.J.McCarthy. *Phys.Rev.*, C3, 1137 (1971).
2. B.D.Day. *Rev.Mod.Phys.*, 39, 719 (1967).
3. H.A.Bethe, B.H.Brandow, A.G.Petschek. *Phys.Rev.*, 129, 225 (1963).
4. R.J.Eden, V.J.Emery. *Proc.Roy Soc.*, (L) A248, 266 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 мая 1974 года.

#### Условия обмена

Препринты и сообщения ОИЯИ рассылаются бесплатно, на основе взаимного обмена, университетам, институтам, лабораториям, библиотекам, научным группам и отдельным ученым более 50 стран.

Мы ожидаем, что получатели изданий ОИЯИ будут сами проявлять инициативу в бесплатной посылке публикаций в Дубну. В порядке обмена принимаются научные книги, журналы, препринты и иного вида публикации по тематике ОИЯИ.

Единственный вид публикаций, который нам присылать не следует, - это репринты /оттиски статей, уже опубликованных в научных журналах/.

В ряде случаев мы сами обращаемся к получателям наших изданий с просьбой бесплатно прислать нам какие-либо книги или выписать для нашей библиотеки научные журналы, издающиеся в их странах.

#### Отдельные запросы

Издательский отдел ежегодно выполняет около 3000 отдельных запросов на высылку препринтов и сообщений ОИЯИ. В таких запросах следует обязательно указывать индекс запрашиваемого издания.

#### Адреса

Письма по всем вопросам обмена публикациями, а также запросы на отдельные издания следует направлять по адресу:

101000 Москва,  
Главный почтамт, п/я 79.  
Издательский отдел  
Объединенного института  
ядерных исследований.

Адрес для посылки всех публикаций в порядке обмена, а также для бесплатной подписки на научные журналы:

101000 Москва,  
Главный почтамт, п/я 79.  
Научно-техническая библиотека  
Объединенного института  
ядерных исследований.