

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С341a
M-69

12/11-74

P4 - 7862

И.Н. Михайлов

2323/2-74

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ
МЕЖДУ РОТАЦИОННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ
С БОЛЬШИМИ УГЛОВЫМИ МОМЕНТАМИ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7862

И.Н. Михайлов

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ
МЕЖДУ РОТАЦИОННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ
С БОЛЬШИМИ УГЛОВЫМИ МОМЕНТАМИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

P4 - 7862

Михайлов И.Н.

Матричные элементы тензорных операторов между ротационными состояниями с большими угловыми моментами

Рассматривается параметризация матричных элементов тензорных операторов между состояниями ротационных полос при больших угловых моментах. Особое внимание уделяется матричным элементам оператора электрического квадрупольного момента ядра.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

P4 - 7862

Mikhailov I.N.

Matrix Elements of the Multipole Operators
in the Case of Rotational States with High
Angular Momenta

The parametrization of matrix elements of the multipole operators is given applicable to the case of rotational states with the high angular momentum quantum numbers. In particular, the matrix elements of the quadrupole charge distribution are considered.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

©1974 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

Известно, что информация о матричных элементах оператора квадрупольного момента в распределении заряда $\hat{M}(E2, \mu)$, связывающих нижайшие состояния основной ротационной полосы четно-четных ядер, может быть описана одним параметром внутреннего квадрупольного момента ядра Q . Также один параметр определяет матричные элементы оператора магнитного момента в $K=0$ полосах (гиромагнитное отношение g). Аналогичная ситуация ожидается и для других физических наблюдаемых /1,2/. Следует думать, однако, что однопараметрическое описание, скажем, $\langle 1 | \hat{M}(E2) | 2 \rangle$ имеет примерно такую же точность, как и описание энергий формулой жесткого ротатора с постоянным моментом инерции. Прийти к разумной физической параметризации матричных элементов в более сложной ситуации можно разными путями /1,6/ и, в частности, вычислив их главные члены при значениях углового момента /2,6/. В пределе больших I направление момента в пространстве определено с хорошей точностью. Тогда при рассмотрении вращения ядра естественно выбрать оси внутренней системы координат так, чтобы одна из них, принимаемая нами за ось квантования момента и обозначаемая индексом 1 , примерно совпала с направлением

углового момента. Сделав такое предположение о выборе внутренней системы координат при анализе стационарных состояний, мы ограничиваем себя рассмотрением состояний, классическим аналогом которых является движение тела с малым углом прецессии между направлением момента и одной из двух экстремальных главных осей тензора инерции, которая в свою очередь близка к оси, выбранной в качестве первой оси внутренней системы координат /7,8/.

Запишем волновую функцию ядра в виде суммы

$$|\alpha, IM\rangle = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{I} \mathcal{D}_{M, I-\alpha}^I(\omega) |\alpha, I\alpha\rangle, \quad (1)$$

где $|\alpha, I\alpha\rangle$ - часть волновой функции, зависящая от внутренних координат q , $\mathcal{D}_{M, I-\alpha}^I(\omega)$ - обобщенная сферическая гармоника от углов Эйлера, определяющих положение внутренней системы координат в пространстве, а коэффициенты c_{α}^{I} нормированы так что

$$\sum_{\alpha} |c_{\alpha}^{I}|^2 = 1. \quad (2)$$

Считая угловые переменные ω функциями от координат (но не от импульсов) частиц и ограничиваясь изучением матричных элементов тензорных операторов электрического типа, напомним формулу приведения оператора $\hat{M}(\lambda, \mu)$ к внутренним осям /1/

$$\hat{M}(\lambda, \mu) = \sum_{\alpha=-\lambda}^{\lambda} \mathcal{D}_{\mu, \alpha}^{\lambda}(\omega) \hat{M}'(\lambda, \alpha; q). \quad (3)$$

Интересующие нас матричные элементы с учетом (1) и (3) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \langle \alpha_2 I_2 M_2 | \hat{M}(\lambda, \mu = M_2 - M_1) | \alpha_1 I_1 M_1 \rangle &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2} c_{\alpha_2}^{* I_2} c_{\alpha_1}^{I_1} \\ &\cdot (-1)^{M_2 - I_2 + \alpha_2} [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{1/2} \begin{pmatrix} \lambda & I_1 & I_2 \\ \mu & M_2 - \mu & -M_1 \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} \lambda & I_1 & I_2 \\ \alpha & I_1 - \alpha & -I_2 + \alpha \end{pmatrix} \langle \alpha_2 I_2 \alpha_2 | \hat{M}'(\lambda, \alpha) | \alpha_1 I_1 \alpha_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

При сформулированных выше предположениях о выборе внутренней системы координат проекция углового момента на ось I должна быть близка к полному угловому моменту, т.е. суммы (1) и (2) могут быть ограничены без потери точности условием

$$I \gg \alpha. \quad (5)$$

Если выполняется неравенство (5), а также

$$I \gg \lambda \quad (5')$$

Здесь j - символы в формуле (4) можно заменить их асимптотическими значениями, пользуясь формулой /9/

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & l - \tau & m - \mu \\ \cos \vartheta = m/e \end{pmatrix} \approx (-1)^{l - \tau} \mathcal{D}_{\mu, l - \tau}^{\lambda}(0, \vartheta, 0) \quad (6)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \langle \alpha_2 I_2 M_2 | \hat{M}(\lambda, \mu = M_2 - M_1) | \alpha_1 I_1 M_1 \rangle &\approx \mathcal{D}_{\mu, I_1 - I_2}^{\lambda}(0, \vartheta, 0) \cdot \\ &\cdot \langle \alpha_2 I_2 | \hat{M}'(\lambda, \alpha = I_2 - I_1) | \alpha_1 I_1 \rangle, \quad (7) \\ \cos \vartheta &= M_1 / I_1 \approx M_1 / I_2, \end{aligned}$$

где введено обозначение для внутреннего матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle \alpha_2 I_2 | \hat{M}'(\lambda, \alpha) | \alpha_1 I_1 \rangle &= \sum_{\alpha'} c_{\alpha'}^{* I_2} c_{\alpha'}^{I_1} \cdot \\ &\cdot \langle \alpha_2 I_2 \alpha' | \hat{M}'(\lambda, \alpha) | \alpha_1 I_1 \alpha' \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Наличие ротационной серии означает приближенное совпадение внутренней части волновой функции для нескольких состояний с близкими значениями I . Соответственно, мы полагаем, что функции $|\alpha I \kappa\rangle$ и коэффициенты $c_{\alpha}^{I, I}$ совпадают для нескольких близких значений I при одном α . Тогда внутренние матричные элементы (8) плавно зависят от среднего $I = (\frac{1}{2})(I_1 + I_2)$ и, следовательно, сами могут рассматриваться как параметры. Их связь с матричными элементами от операторов в лабораторной системе координат по полным функциям ядра в пределе $I \gg 1$ устанавливает формулы (7).

Рассмотрим подробнее матричные элементы оператора электрического квадрупольного момента ядра $\hat{m}(E_2, \mu)$. Пять компонент оператора $\hat{m}(E_2, \alpha)$, приведенного к внутренним осям, выразим через декартовы компоненты неприводимого тензора второго ранга

$$\hat{m}_{ij}^{/10/} \quad (i, j = 1, 2, 3; \sum_i \hat{m}_{ii} = 0)$$

$$\hat{m}(E_2, \alpha=0) = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{m}_{11},$$

$$\hat{m}(E_2, \alpha=\pm 1) = \mp (\hat{m}_{21} \pm i \hat{m}_{31}), \quad (9)$$

$$\hat{m}(E_2, \alpha=\pm 2) = \frac{1}{2} (\hat{m}_{22} - \hat{m}_{33} \pm 2i \hat{m}_{23}).$$

Выбор внутренних осей был сделан так, что ось I совпадает с направлением в пространстве углового момента, а следовательно, и с одной из главных осей тензора инерции ядра (опять имеется в виду стационарность состояния). При этом главные оси тензора квадрупольного момента могут оказаться ориентированными произ-

вольным образом относительно выбранных внутренних осей^{*}.

Отражением такой возможности является отличие от нуля $\hat{m}(E_2, \alpha=\pm 1)$, а вместе с тем и матричных элементов $\langle I \pm 1, m_2 | \hat{m}(E_2, m_2) | I, m_1 \rangle$. Если же направление главных осей тензора инерции и квадрупольного момента (заряда) совпадают, то

$$\hat{m}(E_2, \alpha=\pm 1) = 0, \quad (10)$$

$$\hat{m}(E_2, \alpha=2) = \hat{m}(E_2, \alpha=-2).$$

Формулы (10) соответствуют общим положениям коллективной модели О.Бора и Моттельсона, однако их применимость при описании состояний с $I \gg 1$ не может считаться доказанной. Если (10) имеет место, при усреднении $\hat{m}(E_2)$ по внутреннему состоянию $d=d_1=d_2$ остается только два действительных параметра, например, $\langle \alpha | \hat{m}_{11} | \alpha \rangle, \langle \alpha | \hat{m}_{22} | \alpha \rangle$. Такая ситуация характеризуется наличием ряда состояний, различающихся по I , для которых величины $(2I+1)^{1/2} \langle I, \tau | \hat{m}(E_2) | I \rangle$ примерно совпадают между собой при разных I и равны нулю при $\tau = \pm 1$. Отношение этих величин при $\tau=0$ и $\tau=2$ можно связать с параметром неаксиальности в распределении заряда.

^{*}/Заметим, что структура волновой функции $|\alpha I M\rangle$ в формуле (1) и ограничения на входящие в нее коэффициенты не накладывает условий на ориентацию внутренних осей 2 и 3. Поэтому вторую и третью оси внутренней системы координат можно направить произвольно, например, вдоль векторов $I \times m_1, I \times (I \times m_1)$, где m_1 - единичный вектор вдоль главной оси тензора квадрупольного момента.

Наличие аксиальной симметрии в состояниях ротационной полосы α можно понимать как совпадение двух матричных элементов $\langle \alpha | \hat{m}'_{ii} | \alpha \rangle$. Формально могут представиться два существенно различных случая

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \langle \alpha | \hat{m}'_{22} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{m}'_{33} | \alpha \rangle = -(\frac{1}{2}) \langle \alpha | \hat{m}'_{11} | \alpha \rangle, \\ \text{II} \quad & \langle \alpha | \hat{m}'_{11} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{m}'_{22} | \alpha \rangle = -(\frac{1}{2}) \langle \alpha | \hat{m}'_{33} | \alpha \rangle. \end{aligned}$$

В первом случае "ротационная полоса" выступает как совокупность состояний с примерно одинаковым статическим квадрупольным моментом, причем состояния ее не связаны между собой квадрупольными электрическими переходами. Вращение в этом случае нельзя понимать как изменение со временем ориентации квадрупольного момента.

Второй случай имеет непосредственное отношение к низкоэнергетическим ядерным спектрам. Все внутренние матричные элементы выражаются через один параметр, в качестве которого можно взять

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{m}'_{33} | \alpha \rangle &= \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \langle \alpha | \hat{Q}_2^{-1}(\frac{\pi}{2}) \hat{M}(E_2, \alpha=0) \hat{Q}_2(\frac{\pi}{2}) | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (\text{II})$$

т.е. матричный элемент сферической компоненты оператора квадрупольного момента с проекцией $K=0$ на ось 3 внутренней системы координат. В повернутой системе координат все остальные проекции $\hat{m}'(E_2, K')$ равны нулю, так что можно считать, что состояния $|\alpha \rangle$ обладают аксиальной симметрией и характеризуются определенной проекцией K момента на ось 3:

$$|\alpha \rangle = \hat{Q}_2^{-1}(\frac{\pi}{2}) |\alpha K \rangle. \quad (\text{12})$$

При определенных соотношениях между коэффициентами C_{α}^{I} в формуле (I) волновая функция системы приобретает вид адиабатической волновой функции /1,2/ и параметризация матричных элементов оканчивается возможной без привлечения асимптотических оценок $3j$ -символов. Этот случай соответствует правилам Алаги /1,2/ адиабатического предела обобщенной модели */.

Во всех остальных случаях тензор распределения заряда имеет разные составляющие вдоль главных осей, и о состояниях при этом естественно говорить как о состояниях без аксиальной симметрии. Для описания неаксиальной квадрупольной деформации введем стандартные параметры внутреннего квадрупольного момента Q и угла γ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{m}'_{33} | \alpha \rangle &= (\frac{5}{24\pi})^{1/2} e Q \cos \gamma, \\ \langle \alpha | (\hat{m}'_{11} - \hat{m}'_{22}) | \alpha \rangle &= (\frac{5}{8\pi})^{1/2} e Q \sin \gamma. \end{aligned} \quad (\text{13})$$

Асимптотическое выражение для матричного элемента $\langle \alpha I_1 M_1 | \hat{m}(E_2, \mu) | \alpha I_1 M_1 \rangle$ принимает вид

*/ Очевидно, что адиабатические функции обобщенной модели удовлетворяют критерию, использованному при получении (7) и (8), когда $K \ll I$. В этом можно убедиться, заметив следующее: коэффициенты C_{α}^{I} адиабатической функции пропорциональны

$$D_{I\alpha, K}^I(0, \frac{\pi}{2}, 0) \approx (\frac{2}{\pi I}) [1 - \frac{K^2}{I^2} - (1 - \frac{\alpha}{I})^2]^{1/2} e^{iS(\alpha, K)}$$

Приведенное выражение и зависимость фазового множителя от α и I получены в /9/.

$$\langle \alpha I, M_2 | \hat{M}(E_2, \mu = M_2 - M_1) | \alpha I, M_1 \rangle \approx \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{1/2} e Q \cdot (-1) \cdot$$

$$D_{\mu, I_2 - I_1}^2(0, \arccos \frac{\mu}{I_2}, 0) \cdot \begin{cases} \sin(\pi/6 - \gamma) & \text{при } I_1 = I_2 \\ (\frac{1}{\sqrt{2}}) \cos(\pi/6 - \gamma) & \text{при } I_1 = I_2 \pm 2 \end{cases} \quad (14)$$

Интервал изменения γ , воспроизводящий произвольное отношение диагонального и недиагонального матричных элементов, составляет как видно угол π , так что угол γ может быть ограничен секторами I-III на рис. I. Направления, различающиеся на $\pi/3$ и отмеченные прямыми, соответствуют аксиальной форме (с осью, отмеченной в скобках). Прямая, ограничивающая физически интересную область изменения γ , (прямая a-b) отвечает случаю I, когда момент направлен вдоль оси симметрии. Полупрямые $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/3$ соответствует вращению квадрупольного момента аксиального ядра вытянутого и сплюснутого типов, соответственно. При $\gamma = \pi/6$ статический квадрупольный момент состояния обращается в нуль.

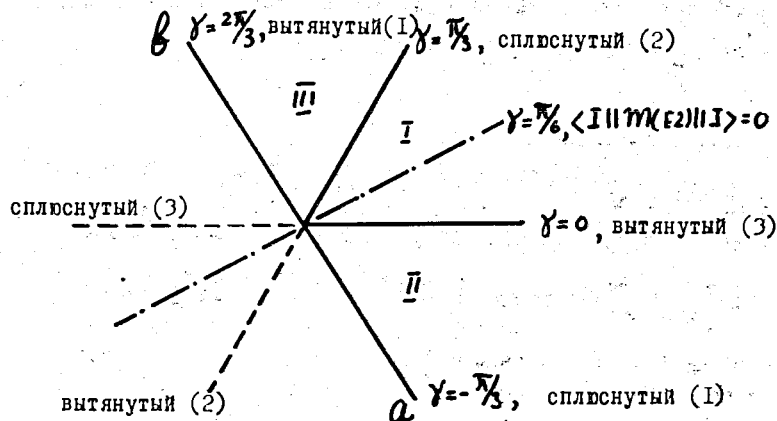


Рис. I.

Ориентация в распределении заряда по отношению к направлению углового момента в зависимости от γ .

Обобщение формализма на случай небольших значений I в предположении о плавной зависимости Q и γ от степеней $I(I+1)$ получено феноменологически рассмотрением эффектов смешивания адиабатических функций силами Кориолиса $1/I, 2/$. В работе ^{15/} для той же цели использован формализм "ротонных операторов", давший возможность вычислять матричные элементы на основе гамильтониана взаимодействия нуклонов. Здесь приведены выражения для матричных элементов мультипольных операторов в пределах одной ротационной полосы (см. формулы (4.18)-(4.21), (4.26), (4.28)). Пользуясь ими, можно получить формулы для приведенных матричных элементов оператора квадрупольного момента в распределении заряда $\hat{Q} = \frac{1}{2} (16\pi/5)^{1/2} \hat{M}(E_2)$ в $K=0$ -полосе, учитывающие смешивание адиабатических компонент в состояниях $|\alpha I M\rangle$ (см. также ^{11/})*

$$\langle I || Q || I \rangle = -\frac{1}{2} \left[\frac{2I(2I+1)(2I+2)}{(2I-1)(2I-3)} \right]^{1/2}$$

$$\cdot Q_0 \left\{ 1 + \frac{I(I+1)}{2} x - \sqrt{\frac{3}{2}} [I(I+1) - 1] y \right\}, \quad (15)$$

$$\langle I+2 || Q || I \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{(2I+4)(2I+2)}{2I+3} \right]^{1/2}$$

$$\cdot Q_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} [(I+2)(I+3) + I(I+1)] (x + \sqrt{\frac{3}{2}} y) \right\}. \quad (16)$$

Зависимость от момента у множителей перед фигурными скобками здесь та же, что и в правилах Алага. В пределе больших I формулы (15), (16) и формула (14) согласуются с точностью до членов $1/I$. При этом

*/ При выводе формул предполагалось, что члены в фигурных скобках, пропорциональные $(I(I+1))^k$ при $k > 1$ пренебрежимо малы, а коэффициенты x, y удовлетворяют неравенствам $x \ll 1, y \ll 1$.

$$Q(M^2) \approx Q_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} y + \frac{1}{2} x M^2 \right), \quad (17)$$

$$Y(M^2) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} y M^2 - \frac{3}{4\sqrt{2}} y,$$

где оставлены лишь члены, содержащие x и y в степени не выше первой, а величина M^2 равна

$$M^2 = \frac{1}{2} [I_1(I_1+1) + I_2(I_2+1)]. \quad (18)$$

Измерения времен жизни состояний ротационной полосы^{/12/} свидетельствуют о том, что коэффициент

$$d = x + \sqrt{\frac{2}{3}} y, \quad (18)$$

определяющий отклонение от правил Алаги в факторах $B(E2, I \rightarrow I-2)$, заметно отличается от нуля для ядер переходной области. Прямым способом определения природы неадиабатичности могли бы служить прецизионные измерения статических квадрупольных моментов состояний ротационной полосы.

Нужно иметь в виду, однако, что изменение внутренних состояний с I может заметно повлиять на величину матричных элементов $\langle I-2 || \hat{Q} || I \rangle$ (см. формулу (8)). Для определения параметров квадрупольной деформации заряда данные о матричных элементах $\hat{M}(E2, \mu)$ следует комбинировать с данными о средне-квадратических (зарядовых) радиусах ядер. Появление неаксиальной деформации не отражается на изменениях зарядовых радиусов со спином ротационных состояний, однако сказывается на соотношении между изменениями радиусов и матричных элементов оператора квадрупольного момента. Полагая, что ядра при вращении остаются эллипсоидами, получаем^{/11/}

$$y = \sqrt{6} \left\{ d - \frac{(2\lambda+1)(\lambda+2)}{12(1-\lambda)^2} \left[\left(\frac{\delta R^2}{R^2} \right)_{2+} - \frac{6\lambda}{(2\lambda+1)(\lambda+2)} \left(\frac{\delta V}{V} \right)_{2+} \right] \right\}, \quad (19)$$

Здесь $\lambda^{1/2}$ - отношение осей эллипсоида вращения, форму которого имеет покоящееся ядро:

$$\frac{1-\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{5}{2} \frac{Q_0}{Z A^{2/3} r_0^2}, \quad (20)$$

$$\lambda = 1 - 3 \left(\frac{5}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\beta_2 - \frac{5}{7} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{1/2} \beta_2^2 + \dots \right)$$

(Q_0 - внутренний квадрупольный момент в е. барн; A, Z - массовое число и заряд ядра). Формулы (19), (20) учитывают возможность неаксиальной деформации, изменения объема ядра V , и справедливы при любых значениях параметра эллипсоидальной деформации λ */.

*/ формула (20) приведена в^{/11/} с ошибкой (степень λ в левой части в работе^{/11/} указана неправильно).

Литература

- I. О.Натан, С.Г.Мильссон. "Коллективное ядерное движение и обобщенная модель". В сборнике "Альфа-бета-гамма спектроскопия", под ред. К.Зигбана, т.2, стр. 4I-136, Атомиздат, 1969.
2. О.Бор, Б.Моттelson. "Структура атомного ядра". т.2, М., Мир, 1975.
3. В.М.Михайлов. Изв. АН СССР, сер.физ., 28, 308 (1964); 30, 1970 (1966).
4. A.S.Davydov. "Nuclear Deformability"... 2 in "Nucl. Structure". Proc.Dubna Symp. 1968, IAEA, Vienna (1968).
5. И.Н.Михайлов, Е.Наджаков, Д.Караджов. "Теория ядерных ротационных полос", ЭЧАЯ, 4, 3II-356 (1973).
6. J.Meyer. Nucl.Phys., A137, 193 (1969).
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Механика", физматгиз, 1962.
8. А.Зоммерфельд. "Механика", стр.203-206, М., ИЛ., 1947.
9. P.J.Brussaard, M.A.Tolhoek. Physica, 23, 955 (1957).
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Квантовая механика", стр. 467-477. физматгиз, 1963.
- II. D.Karajov, I.N.Mikhailov, J.Piperova. Phys.Lett., 46B, 163 (1973).
12. R.M.Diamond et al. Nucl.Phys., A184, 481 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1974 года.