ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7782

С.К.Кузьмин, С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ СО СТЕПЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В ДВОЙНОМ СЛОЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7782

С.К.Кузьмин, С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ СО СТЕПЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В ДВОЙНОМ СЛОЕ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

Данная работа посвящена рассмотрению проблемы равновесия и устойчивости совокупности частиц со степенным взаимодействием в двойном слое с шаровой или эллипсоидальной геометрической конфигурацией. Для этого мы воспользовались общим методом оптимизации, предложенным в работах /I-3/.

§ I. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть $\mathfrak{B}$ - система борелевских множеств n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}^{(n)}$, $n \geq 2$. Обозначим через μ распределение частиц, т.е. вполне аддитивную, неотрицательную функцию множества, определенную на $\mathfrak{B}$. Если множество $B \in \mathfrak{B}$ и $\mu(B) = 1$, а $\mu(A) = 0$ для всякого $A \in \mathfrak{B}$ и $A \cap B = 0$, то говорят, что μ сосредоточено на B и это обстоятельство обозначают через $\mu \prec B$.

Пусть $\varphi(r)$ - потенциальная энергия взаимодействия двух единичных частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга. В рассматриваемом случае степенного взаимодействия

$$\varphi(r) = r^{-n+\alpha}, \tag{I.I}$$

где $0 < \alpha < 3/2$ при $n = 2$ и $0 < \alpha < 2$ при $n \geq 3$.

Пусть F - фиксированный компакт из n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}^{(n)}$, $n \geq 2$. Предположим, что рассматриваемая макроскопическая совокупность удерживается на компакте F под действием внешних и внутренних сил. Обозначим через $|P-Q|$ евклидово расстояние между точками P и Q, $P \in \mathcal{E}^{(n)}$ и $Q \in \mathcal{E}^{(n)}$. Пусть $\mu \prec F$, тогда функционал вида

$$I(\mu) = \int\int_{F \times F} \varphi(|P-Q|)\, d\mu(P)\, d\mu(Q), \tag{I.2}$$

где интегралы понимаем в смысле Лебега-Стильтьеса, определяет потенциальную энергию рассматриваемой совокупности частиц с распределением частиц μ .

Обозначим теперь через $W(F)$ минимальное значение потенциальной энергии данной совокупности, тогда

$$W(F) = \inf_{\mu \prec F} I(\mu), \tag{I.3}$$

где нижняя грань берется по всем возможным μ , сосредоточенным на F .

Так как потенциальная функция $\varphi(r)$, взятая в виде (I.I), удовлетворяет условиям теоремы равновесия, доказанной в /I,2/, то, следуя /4/, можно ввести φ -емкость компакта F из $\mathcal{E}^{(n)}$, определив её из уравнения

$$W(F) = \varphi(c(F;\varphi)), \tag{I.4}$$

где $C(F;\varphi)$ - φ -емкость компакта F . Предполагается, что потенциальная энергия данной совокупности $W(F)$ ограничена, т.е. $W(F) < +\infty$. Если же $W(F) = +\infty$, то говорят, что φ-емкость компакта F равна нулю.

Как известно из работ /I,2/, для степенного взаимодействия с потенциальной функцией $\varphi(r)$,определяемой выражением(I.1),и для любого компакта F из $\mathcal{E}^{(n)}$ положительной φ -емкости существует распределение частиц μ^* , реализующее минимум функционала (I.2). Распределение частиц μ^* называют инвариантным, в смысле Ляпунова, распределением частиц на компакте F . Инвариантное распределение частиц μ^* обладает тем свойством, что любые малые возмущения состояния совокупности частиц, обусловленные, в частности, малыми изменениями геометрической конфигурации данной совокупности F , не приводят к изменениям распределения частиц. Отметим, что частицы совокупности, находящейся в состоянии устойчивого, по Ляпунову равновесия, в действительности сосредоточены на носителе распределения частиц F_{μ^*}, т.е. на множестве тех точек из F, которые обладают тем свойством, что какова бы ни была окрестность O(P) данной точки P, $\mu^*(O(P)) \neq 0$.

Введем потенциал макроскопического поля $u(P)$. Пусть $\mu \prec F$, тогда интеграл Лебега-Стильтьеса

$$u(P) = \int\limits_F \varphi(|P-Q|)\, d\mu(Q) \qquad (I.5)$$

называют φ-потенциалом, порожденным распределением частиц μ. Если φ-потенциал порожден инвариантным распределением частиц μ^*, его называют φ-потенциалом равновесия и обозначают через $u^*(P)$.

Согласно /I,2/, для выбранной потенциальной функции $\varphi(r)$ и для всякого компакта F из $E^{(n)}$ инвариантное распределение частиц μ^* порождает φ-потенциал равновесия $u^*(P)$, который обладает следующими свойствами:

I) потенциал макроскопического поля $u^*(P) = W(F)$ "приблизительно всюду" на F;

2) потенциал макроскопического поля $u^*(P) \leq W(F)$ всюду в $E^{(n)}$.

В этом случае говорят, что для данной потенциальной функции имеет место теорема равновесия. Характеристика класса функций $\varphi(r)$, которые удовлетворяют условиям теоремы равновесия, была дана в /I,2/ для $n \geq 2$ и в /5/ для $n = 1$.

Скажем, что функция $\varphi(r)$, удовлетворяющая условиям теоремы равновесия из /I,2/, принадлежит к классу Φ_n, если функция $r^{n-2}\varphi(r)$ убывает для данного $n \geq 3$ или если функция $r^{n-1}|\varphi'(r)|$ убывает для данного n = I,2.

В работах /I,2/ было показано, что для $\varphi(r) \in \Phi_n$ при выполнении условий теоремы равновесия на компакте F существует единственное инвариантное распределение частиц μ^*, реализующее минимум потенциальной энергии $I(\mu)$, выражаемой функционалом (I.2).

Согласно теореме равновесия из /I,2/ для выбранной потенциальной функции $\varphi(r) \in \Phi_n$ и $\mu \prec F$, приходим к следующему интегральному уравнению первого рода

$$W(F) = \int\limits_F \varphi(|P-Q|)\, d\mu(Q) \qquad (I.6)$$

с дополнительным условием нормировки на распределение частиц μ. В работе /3/ было показано, что функция множества μ, являющаяся решением интегрального уравнения первого рода (I.6) и удовлетворяющая соответствующему условию нормировки, обращает в минимум потенциальную энергию совокупности частиц $I(\mu)$.

В настоящей работе дано рассмотрение проблемы равновесия для случая, когда компакт F является двойным шаровым или эллипсоидальным слоем.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ В ШАРОВОМ СЛОЕ.

Пусть $S_i(0)$ - n-мерный шар радиуса R_i с центром в начале координат, i = I,2. Обозначим через $F = S_2(0) - S_1(0)$ замкнутый n-мерный слой между двумя концентрическими шарами радиусов R_1 и R_2 соответственно, $R_1 < R_2$, с центрами в начале координат.

Найдем образ Фурье $\psi^0(F, P)$ характеристической функции шарового слоя F. Пусть P = ($x_1, \ldots, x_n$) и M = ($y_1, \ldots, y_n$). Осуществим переход от декартовых координат $x_1, \ldots, x_n$ к сферическим координатам r, ϑ, ϑ_1, ..., ϑ_{n-2}, где ϑ - угол между радиус-векторами OP и OM, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \vartheta_i \le 2\pi$, i = I, ..., $n-2$, $0 \le r < +\infty$. Якобиан такого преобразования координат записывается в следующем виде

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})} =$$

$$= (-1)^{n-1} r^{n-1} \sin^{n-2}\vartheta \sin^{n-3}\vartheta_1 \dots \sin\vartheta_{n-2}.$$

Теперь получим

$$\psi^0(F,P) = \psi^0(F,\varrho) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_F e^{i(PM)}\, dv_M, \qquad (2.1)$$

где

$$\varrho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Так как /6/

$$J_{\frac{n}{2}-1}(\varrho r) = \frac{\left(\frac{\varrho r}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{i\varrho r\cos\vartheta} \sin^{2\left(\frac{n}{2}-1\right)}\vartheta\, d\vartheta, \qquad (2.2)$$

то

$$\psi^0(F,\varrho) = \varrho^{-\frac{n}{2}} \left[R_2^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_2\varrho) - R_1^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_1\varrho) \right]. \qquad (2.3)$$

Распределение частиц μ будем искать в виде

$$d\mu = f(|Q|)\, dv_Q, \qquad (2.4)$$

где $f(|Q|)$ - плотность распределения частиц в точке Q, расположенной в двойном слое F; $Q = (y_1, \dots, y_n)$. Теперь имеем

$$f^0(P) = f^0(\varrho), \qquad (2.5)$$

где $f^0(\varrho)$ - образ Ханкеля плотности распределения частиц $f(Q)$, который определяется по формуле

$$f^{0}(\rho)=\rho^{1-\frac{n}{2}}\int_{R_1}^{R_2} y^{\frac{n}{2}} f(y)\, J_{\frac{n}{2}-1}(\rho y)\,dy. \tag{2.6}$$

Для образа Ханкеля потенциальной функции $\varphi(r)$ степенного взаимодействия находим

$$\varphi^{0}(\rho)=2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/ 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\rho^{\alpha}. \tag{2.7}$$

Применим к интегральному уравнению первого рода (I.6) n-мерное преобразование свертки Фурье, тогда в рассматриваемом здесь случае двойного шарового слоя получим следующее операторное уравнение

$$W(F)\,\rho^{-\frac{n}{2}}\left[R_2^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_2\rho)-R_1^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_1\rho)\right]= \\ =\pi^{\frac{n}{2}}2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) f^{0}(\rho)\Big/\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\rho^{\alpha}. \tag{2.8}$$

Отсюда в результате тождественных преобразований находим /3/

$$W(F)\left[R_2^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_2\rho)-R_1^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_1\rho)\right]\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}= \\ =2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\,\rho^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left[f^{0}(\rho)\rho^{\frac{n}{2}-1}\right]. \tag{2.9}$$

Рассмотрим преобразование Ханкеля порядка ($\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}$) от левой и правой частей равенства (2.9). Введем обозначения

$$I_1=\frac{2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\int_0^{\infty}\rho^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} J_{\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}}(r\rho)\times \\ \times\left[f^{0}(\rho)\,\rho^{\frac{n}{2}-1}\right]\sqrt{r\rho}\,d\rho; \tag{2.10}$$

$$I_2=\int_0^\infty \rho^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left[R_2^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R_2\rho)-R_1^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R_1\rho)\right]J_{\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}}(r\rho)\times\sqrt{r\rho}\,d\rho. \qquad (2.11)$$

Преобразуем сначала выражение I_1. Так как

$$\gamma^0(\rho)\rho^{\frac{n}{2}-1}=\int_{R_1}^{R_2} y^{\frac{n}{2}}\gamma(y)J_{\frac{n}{2}-1}(y\rho)\,dy,$$

то, согласно /7/, находим

$$I_1=\begin{cases}\dfrac{2^{1+\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\, r^{\frac{n-\alpha-1}{2}}\displaystyle\int_r^{R_2} y\gamma(y)(y^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}dy & \text{при } y>r, \\ 0 & \text{при } y<r,\end{cases} \qquad (2.12)$$

где $R_1<r<R_2$.

Вычислим теперь I_2. Пусть $I_2=I_{21}-I_{22}$, где

$$I_{21}=\int_0^\infty \rho^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}R_2^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\rho R_2)J_{\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}}(r\rho)\sqrt{r\rho}\,d\rho;$$

$$0<r<R_2,$$

$$I_{22}=\int_0^\infty \rho^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}R_1^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R_1\rho)J_{\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}}(r\rho)\sqrt{r\rho}\,d\rho;$$

$$0<R_1<r,$$

$R_1<r<R_2$. Рассмотрим I_{21}. При $0<r<R_2$ находим /8/

$$I_{21}=r^{\frac{n-\alpha-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/2^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right). \qquad (2.13)$$

Рассмотрим теперь I_{22}. При $r>R_1>0$ получим /8/

$$I_{22}=2^{1+\frac{\alpha}{2}}r^{\frac{n-\alpha-1}{2}}\left(R_1^2/r^2\right)^{\frac{n}{2}}\times \qquad (2.14)$$

$$\times F\left(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{R_1^2}{r^2}\right).$$

Теперь операторное уравнение (2.8) преобразуется в следующее интегральное уравнение первого рода

$$\int_r^{R_2} y f(y)(y^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}dy=\frac{W(F)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\left(\frac{R_1}{r^2}\right)^{\frac{n}{2}}F\left(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{R_1^2}{r^2}\right)\right]. \qquad (2.15)$$

Полагая в (2.15) $y^2=R_2^2-t$, находим

$$\int_0^{R_2^2-r^2} f(\sqrt{R_2^2-t})\left((R_2^2-r^2)-t\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}dt=\frac{W(F)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\left(\frac{R_1}{r^2}\right)^{\frac{n}{2}}F\left(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{R_1^2}{r^2}\right)\right], \qquad (2.16)$$

где $R_1<r<R_2$. Пусть $b=R_2^2-r^2$, тогда уравнение (2.16) приводится к интегральному уравнению Абеля /9/

$$\int_0^{b} f(t)(b-t)^{\frac{\alpha}{2}-1}dt=g(b), \qquad (2.17)$$

где

$$f(t)=f(\sqrt{R_2^2-t});$$

$$g(b)=\frac{W(F)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}\left[1-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2-b}\right)^{\frac{n}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times F\left(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{R_1^2}{R_2^2-b}\right)\right].$$

Решение уравнения (2.17) записывается в виде /9/

$$f(b) = \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}\frac{d}{db}\int_0^b g(y)(b-y)^{-\frac{\alpha}{2}}dy. \qquad (2.18)$$

Отсюда находим

$$f(b) = \frac{W(F)\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}\Big(b^{-\frac{\alpha}{2}} -$$

$$-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\frac{d}{db}\int_0^b\Big(\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big)^{\frac{n}{2}}F\Big(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\frac{n}{2}+1;\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big)(b-y)^{-\frac{\alpha}{2}}dy\Big). \qquad (2.19)$$

Введем обозначения

$$I_3(b) = \frac{d}{db}I_4(b), \qquad (2.20)$$

где

$$I_4(b) = \int_0^b\Big(\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big)^{\frac{n}{2}}F\Big(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\frac{n}{2}+1;\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big)(b-y)^{-\frac{\alpha}{2}}dy. \qquad (2.21)$$

Согласно /10/, находим

$$\Big(\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big)^{\frac{n}{2}}F\Big(\frac{n}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\frac{n}{2}+1;\frac{R_1^2}{R_2^2-y}\Big) = \frac{n}{2}B_{\frac{R_1^2}{R_2^2-y}}\Big(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2}\Big),$$

где $B_a(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2})$ – неполная бэта-функция

$$B_a\Big(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2}\Big) = \int_0^a t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-1}dt.$$

Теперь для $I_4(b)$ получим

$$I_4(b) = \frac{n}{2}\int_0^b(b-y)^{-\frac{\alpha}{2}}dy\int_0^{R_1^2/(R_2^2-y)} t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-1}dt. \qquad (2.22)$$

Пусть $x = b-y$, тогда $y = b-x$ и

$$I_4(b)=\frac{n}{2}\int\limits_0^{b}x^{-\frac{\alpha}{2}}dx\int\limits_0^{R_1^2/(R_2^2-b+x)}t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-1}dt. \tag{2.23}$$

Теперь

$$I_3(b)=\frac{n}{2}(R_2^2-r^2)^{-\frac{\alpha}{2}}B_{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2}\right)+$$
$$+\frac{n}{2}r^{\alpha}\int\limits_{(R_1/R_2)^2}^{(R_1/r)^2}x^{\frac{n+\alpha}{2}-1}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{R_1^2}{r^2}-x\right)^{-\frac{\alpha}{2}}dx. \tag{2.24}$$

Отсюда, используя /8/, получим выражение для искомой плотности распределения частиц в шаровом слое

$$f^{*}(r)=\frac{W(F)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}+1}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(R_2^2-r^2)^{-\frac{\alpha}{2}}G(r), \tag{2.25}$$

где

$$G(r)=1-\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}B_{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2}\right)-$$
$$-\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}r^{\alpha}\left(B\left(\frac{n+\alpha}{2};1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n}F\left(-\frac{\alpha}{2}-1;\frac{n+\alpha}{2};\frac{n}{2}+1;\left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{n+\alpha}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}\left(\frac{R_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}F_1\left(\frac{n+\alpha}{2};\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}+1;\frac{n+\alpha}{2}+1;\frac{r^2}{R_2^2};\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\right), \tag{2.26}$$

$R_1 < r < R_2$. Постоянная $W(F)$ находится из условия нормировки

$$\int\limits_F f(r)\,dV_G=1. \tag{2.27}$$

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОМ СЛОЕ.

Пусть F – n-мерный замкнутый эллипсоидальный двойной слой

$$R_1^2 \le a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \dots + a_n^2 x_n^2 \le R_2^2, \tag{3.1}$$

где $a_k > 0$ – обратные величины полуосей n-мерного эллипсоида; к = 1,2,..., n; R_i – эллиптический радиус эллипсоида $\mathcal{D}_i$, который служит границей слоя; $i = 1,2$; $R_1 < R_2$.

Для образа Фурье $\psi^0(F,M)$ характеристической функции двойного слоя F находим

$$\psi^0(F,M) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_1^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 y_k^2 \le R_2^2} e^{i(QM)} dv_Q, \tag{3.2}$$

где $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; $M = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Пусть $t_k = a_k y_k$, к = 1,2,..., n, тогда приходим к шаровому слою с характеристической функцией $\psi(F;T)$ и

$$\psi^0(F,M_1) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_1^2 \le \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \le R_2^2} e^{i(M_1T)} dv_T, \tag{3.3}$$

где $M_1 = (z_1/a_1, \dots, z_n/a_n)$; $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, причем $R_1^2 \le t_1^2 + \dots + t_n^2 \le R_2^2$. Совершим теперь переход от декартовых координат $t_1, \dots, t_n$ к сферическим r, ϑ, ϑ_1, ..., ϑ_{n-2}, где ϑ – угол между радиус-векторами OM_1 и OT, тогда получим

$$\psi^0(F,R) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^{n-1} dr \int\limits_0^{\pi} e^{iRr\cos\vartheta} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta, \tag{3.4}$$

где

$$R^2 = \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{z_n^2}{a_n^2}. \tag{3.5}$$

Откуда

$$\psi^0(F,R)=\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} R^{-\frac{n}{2}}\left(R_2^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_2 R)-R_1^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(R_1 R)\right). \tag{3.6}$$

Распределение частиц μ^* будем искать в виде

$$d\mu^* = f^*\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k^2 y_k^2\right|\right) dv_Q. \tag{3.7}$$

Для образа Фурье плотности распределения частиц получим

$$f^0(M)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_1^2\le \sum_1^n a_k^2 y_k^2 \le R_2^2} f\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k^2 y_k^2\right|\right) \exp(i(QM))\, dv_Q. \tag{3.8}$$

Пусть вновь $t_k = a_k y_k$, к = I,2,..., n , тогда

$$f^0(M_1)=\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_1^2\le \sum_1^n t_k^2 \le R_2^2} f(\zeta)\exp(i(M_1 T))\, dv_T, \tag{3.9}$$

где $\zeta^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2 y_k^2$ - эллиптический радиус. После перехода от декартовых координат к сферическим, находим

$$f^0(M)=\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} f^0(R), \tag{3.10}$$

где $f^0(R)$ - образ Ханкеля плотности распределения частиц $f(\zeta)$

$$f^0(R)=R^{1-\frac{n}{2}}\int_{R_1}^{R_2} y^{\frac{n}{2}} f(y)\, J_{\frac{n}{2}-1}(Ry)\, dy. \tag{3.11}$$

Образ Ханкеля потенциальной функции определяется формулой (2.7).

В результате преобразования свертки Фурье в рассматриваемом случае n-мерного эллипсоидального слоя F из интегрального уравнения первого рода (I.5) приходим к операторному уравнению вида

$$W(F)\psi^0(F,R)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n} a_k^{-1}\varphi^0(\rho) f^0(R), \tag{3.12}$$

где
$$\rho^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 .$$

Пусть $z_k = R a_k t_k$, где $R_1^2 \le \sum_1^n t_k^2 \le R_2^2$, тогда /3/

$$\rho^2 = R^2 \left(a_1^2 t_1^2 + \dots + a_n^2 t_n^2 \right). \tag{3.13}$$

Перепишем операторное уравнение (3.12) в следующем виде

$$W(F)\Psi^0(F,R) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} \varphi^0\left(R\left(\sum_1^n a_k^2 t_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \chi^0(R). \tag{3.14}$$

Проинтегрируем левую и правую части (3.14) по поверхности n-мерного единичного шара S^*, в результате чего получим уравнение вида

$$S\, W(F)\Psi^0(F,R) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} a_k^{-1} \varphi^{0*}(R)\, \chi^0(R), \tag{3.15}$$

где S - величина поверхности единичного шара S^*, $\sum_1^n t_k^2 = 1$;

$$\varphi^{0*}(R) = \int_{S^n} \varphi^0\left(R\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 t_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) d\sigma_T, \tag{3.16}$$

$d\sigma_T$ - элемент поверхности шара S^*. Для n-мерного шарового слоя все $a_k = 1$, $k = 1,2,\dots, n$, и $\varphi^{0*}(R) = \varphi^0(\rho)$, поэтому операторное уравнение (3.15) переходит в операторное уравнение (2.8).

В рассматриваемом случае степенного взаимодействия для $\varphi^{0*}(R)$ находим (см. /3/)

$$\varphi^{0*}(R) = \gamma\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) 2^{\alpha} \Big/ 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) R^{\alpha}, \tag{3.17}$$

где

$$\gamma = \int_{S^*} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 t_k^2 \right)^{-\frac{\alpha}{2}} d\sigma_T .$$

Теперь операторное уравнение для $\chi^0(R)$ в случае эллипсоидального двойного слоя можно записать в следующем виде

$$S\frac{W(F)}{\gamma}R^{-\frac{n}{2}}\left[R_1^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R_2R)-R_1^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R_1R)\right]=$$

$$=\frac{2^{\alpha}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}R^{-\alpha}f^{0}(R). \tag{3.18}$$

Аналогично предыдущему случаю с помощью операторного уравнения (3.18) в результате обратного преобразования Ханкеля порядка ($\frac{n}{2}-1-\frac{\alpha}{2}$) приходим к выражению для плотности распределения частиц $f(\xi)$ в n -мерном эллипсоидальном слое

$$f^{*}(\xi)=S\frac{W(F)}{\gamma}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}+1}}\left(R_2^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2y_k^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}G(\xi), \tag{3.19}$$

где

$$G(\xi)=1-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}B_{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left(\frac{n}{2};-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2y_k^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(B\left(\frac{n+\alpha}{2};1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(R_1^2\Big/\sum_{1}^{n}a_k^2y_k^2\right)^{\frac{n}{2}}\times\right.$$

$$\times F\left(-\frac{\alpha}{2}-1;\frac{n+\alpha}{2};\frac{n}{2}+1;R_1^2\Big/\sum_{1}^{n}a_k^2y_k^2\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{n+\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+\alpha}\left(\frac{R_1^2}{\sum_{1}^{n}a_k^2y_k^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}F_1\left(\frac{n+\alpha}{2};\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+1;\frac{n+\alpha}{2}+1;\frac{\sum_1^n a_k^2y_k^2}{R_2^2};\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\right).$$

Условие нормировки дает значение постоянной $W(F)$. Для всех a_k = 1, к = 1,2,..., n , плотность инвариантного распределения частиц $f(\xi)$ в n -мерном двойном слое эллипсоидальной конфигурации переходит в ранее полученное выражение $f(r)$ для n -мерного шарового слоя.

В заключение выражаем благодарность академику Н.Н.Боголюбову и

академику А.Н.Тихонову за обсуждение настоящей работы и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА:

1. К.В.Темко, С.В.Темко, ДАН СССР, 166, № 3, 551-554, 1966.
2. К.С.Кузьмин, К.В.Темко, С.В.Темко, Дифференц. уравнения, 8, № 6, 1036-1047, 1972.
3. С.В.Темко, К.В.Темко, Дифференц. уравнения, 5, № 8, 1484-1494, 1969
4. O.Frostman, Potential d'equilibre et capacite des ensembles avec quilques applications a la théorie des fonctions, Meddel, Land,1935.
5. К.В.Темко, Матем. сб., 49 (91), № 1, 1959.
6. Г.Н.Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, М., ИИЛ, 1949.
7. В.А.Диткин, А.П.Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., Физматгиз, 1961.
8. Г.Бейтман, А.Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 2, М., "Наука", 1970.
9. С.Г.Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.
10. Г.Бейтман, А.Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра, М., "Наука", 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1974 года.